

# Perçage de maillage préservant la sémantique

Ruding Lou <sup>1,2,3</sup>, Jean-Philippe Pernot <sup>1</sup>, Franca, Giannini <sup>2</sup>, Alexei Mikchevitch <sup>3</sup>,  
Philippe Véron <sup>1</sup>, Bianca Falcidieno <sup>2</sup>, Raphaël Marc <sup>3</sup>

<sup>1</sup>LSIS UMR-CNRS 6186, Arts et Métier ParisTech, Aix en Provence, France

<sup>2</sup>IMATI-CNR, Genova, Italy

<sup>3</sup>Electricité de France, Département Recherche et Développement, Clamart, France

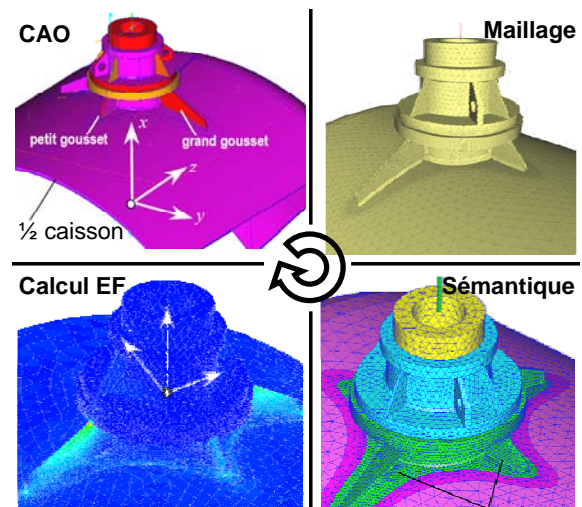
## Abstract

*Dans le cadre de la maintenance de produits industriels, on utilise de plus en plus la simulation numérique pour évaluer plusieurs solutions possibles. La simulation numérique permet d'éviter des expérimentations parfois longues et coûteuses pour arriver à des modifications physiques optimales sur les équipements. Pour réaliser la simulation numérique, on doit d'abord créer un modèle CAO, puis son modèle discrétisé et maillé. Ensuite il faut définir les différentes données sémantiques telles que les matériaux, les efforts et les conditions limites en déplacement permettant de faire le calcul EF. Cette succession d'étapes CAO-Maillage-Sémantique-Calcul nécessite de répéter la boucle complètement pour évaluer chaque solution d'optimisation du produit. Comme les produits à maintenir sont des équipements industriels de production, le temps d'arrêt de production dépend fortement de l'évaluation des solutions optimales du produit. On constate que la plus grande partie du temps d'étude est passée sur la préparation du modèle de calcul. Dans cet article, nous posons les bases d'un opérateur permettant de modifier un maillage EF tout en préservant les informations sémantiques qu'il porte et ceci afin de gagner du temps en évitant les retours à la CAO. Deux instances de l'opérateur ont été implémentées dans le cas de maillages 2D et 3D : perçage (trou cylindrique) et fissuration (zone de contact plane).*

**Keywords:** maillage triangulaire/tétraédrique, sémantique de calcul EF, sémantique de forme, déformation de maillage, perçage, fissuration.

## 1. Introduction

La simulation numérique du comportement de produit est devenue le mode largement utilisé dans différents domaines d'ingénierie dans le but d'éviter des expérimentations physiques coûteuses lors du prototypage et de permettre l'évaluation de nouvelles solutions tout au long du cycle de vie du produit. Il comprend le prototypage des opérations de maintenance qui doivent être développées et validées aussi vite que possible pour réduire autant que possible les arrêts de production coûteux. Ainsi, il est important d'être capable de fournir rapidement une solution pour améliorer l'équipement de production en satisfaisant les critères de sécurité. Ainsi, les experts doivent se doter d'outils numériques permettant d'évaluer rapidement et précisément les différentes solutions alternatives du point de vue physique et mécanique. Malheureusement, l'approche classique existante pour l'analyse du comportement et l'évaluation de solution ne répond pas à ce besoin..



**Figure 1:** Boucle classique dans l'étude numérique sur le comportement de produits. (courtesy EDF-R&D).

Aujourd'hui, la plupart des études numériques sur le comportement de produits sont basées sur une boucle classique composée des 4 étapes suivantes: 1) La proposition de solution conceptuelle et sa conception détaillée à l'aide de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO), 2) La création de maillages complexes pour les études spécifiques de comportement, 3) La création de différents groupes d'entités de

maillage pour la définition de la sémantique mécanique 4) Le calcul basé sur la méthode d'Éléments Finis (EF) et l'évaluation de ses résultats. La

Figure 1 est un exemple qui montre clairement les quatre principales étapes citées dans le sens des aiguilles d'une montre: la CAO, le Maillage, la Sémantique et le Calcul EF. Les trois premières étapes avant celle du calcul EF peuvent être considérées comme un travail de préparation de modèle pour le calcul EF, qui prennent la plus grande partie du temps utilisé dans la boucle. Beaucoup de temps est utilisé pour l'adaptation et/ou la modification de forme sur le modèle CAO, pour le maillage complexe et non-entièrement automatique depuis la CAO en tenant compte des critères de la qualité de maille (ex. génération de mailles libres / mappés, création de sous-maillages ayant des topologies différentes, maillage adaptatif a priori, création d'entités double), pour la création de groupes d'entités de maillage, ainsi que l'affectation de l'information sémantique physique (par exemple des conditions aux limites (CL), lois de comportement des matériaux, propriétés géométriques et mécaniques) nécessaires pour le calcul EF.

Au cours de l'optimisation du produit, différentes modifications sont proposées et réalisées généralement sur le modèle CAO dans la première étape de la boucle classique illustrée dans la

Figure 1 ; ensuite toutes les étapes de la boucle sont répétées d'une manière circulaire jusqu'à ce que la 4ème étape (calcul EF) donne les résultats acceptables. Par conséquent, le temps nécessaire est multiplié pour évaluer plusieurs solutions de modification. La

Figure 1 montre la boucle d'étude numérique sur un modèle industriel utilisé par EDF-R&D : un caisson contenant plusieurs goussets. Selon le résultat du calcul EF, le modèle devrait être modifié pour éviter une concentration de contraintes au niveau du contact entre les goussets et la partie cylindrique. Plusieurs modifications ont été proposées: créer une fissure sur les goussets; inciser et trouer les goussets; couper entièrement les goussets. Toutes ces modifications ont été évaluées par la boucle classique d'étude numérique pour trouver la meilleure.

Cette approche CAO-Maillage-Sémantique-Calcul est visiblement très coûteuse et demande beaucoup de temps elle est donc inappropriée pour une évaluation rapide de solutions alternatives de maintenance. En outre, dans ce contexte, les modèles CAO ne sont pas toujours disponibles et/ou ne correspondent pas entièrement à la réalité qui peut être mesurée sur les véritables modèles physiques en utilisant les techniques de numérisation 3D. En conséquence, la création à partir de zéro des modèles de CAO correspondant entraînerait une perte supplémentaire de temps et devrait donc être évitée autant que possible.

Il est bien évident que le retour au modèle CAO n'est pas la méthode la plus efficace pour effectuer une modification de la structure locale. Cela est particulièrement vrai lorsque le modèle contient de nombreux groupes (ex. des ensembles de nœuds, des ensembles de faces ou tétraèdres) pour supporter beaucoup de données sémantiques physiques (ex. les

CLs, les relations de lien, les différentes lois de comportement, les paramètres géométriques, la modélisation mécanique des phénomènes spécifiques) ainsi que des données spécifiques à un post-traitement particulier. Par exemple, le modèle conçu par les ingénieurs de EDF (Électricité de France) peut contenir jusqu'à 500 groupes. Malheureusement, les systèmes de CAO commercialisés actuellement ne permettent pas d'automatiser le processus de modification directe et rapide de maillages enrichis par des données sémantiques EF qui sont nécessaires pour la simulation numérique de comportement de la machine de production. Ceci est très critique pour les études de court délai dans le cadre de maintenance industrielle. En conséquence, pour prototyper et évaluer des modifications structurelles afin d'améliorer le comportement de la machine de production, même de petits changements locaux nécessitent une mise à jour complète, donc coûteuse du modèle de simulation, ce qui est problématique pour les études efficaces dans la maintenance industrielle. .

Pour surmonter ces limites, nous proposons un cadre de prototypage rapide sans CAO pour travailler directement sur des maillages enrichis par la sémantique de nature géométrique groupes .. De cette façon, le nombre d'étapes nécessaires pour la préparation du modèle de calcul EF peut être réduit. L'idée est de supprimer les étapes "dures" de modification du CAD, de re-maillage et de re-définition des groupes de mailles ainsi que la sémantique en apportant les modifications locales nécessaires directement sur les maillages tout en maintenant et en potentialisant la multiplication des données sémantiques. Dans cet article, nous proposons différents opérateurs de modification directe des maillages EF enrichis mécaniquement et recalés (physiquement validés). Une telle approche est particulièrement intéressante non seulement pour la réutilisation des modèles EF recalés et validés, mais aussi dans le cas des maillages dits "mort", c'est-à-dire des maillages auxquels les modèles CAO associés sont indisponibles. Elle présente également un intérêt dans la phase préliminaire de conception de produits où plusieurs solutions alternatives peuvent être prototypées et comparées. D'une manière générale, une telle approche est utile dans toutes les applications 3D où la géométrie avec l'information sémantique associée nécessite une série de modifications différentes. L'élaboration de l'opérateur de modification de maillage en prenant en compte la présence des données sémantiques EF (par exemple la préservation de la forme géométrique des groupes de mailles situées dans la zone de modification du maillage) permet la réutilisation complète de modèles 3D enrichis par la sémantique. Évidemment, les règles de la conservation et de la propagation sont en fonction du contexte et de la sémantique concernée.

Dans cet article, nous proposons des opérateurs de modification de maillage qui travaillent directement sur les maillages EF enrichis d'informations sémantiques. Ces opérateurs agissent simultanément au niveau géométrique, ce qui correspond aux éléments de bas niveau, et au niveau structural, correspondant au regroupement d'éléments du maillage à l'aide de groupes supportant les données sémantiques [AIM04]. Le comportement de l'opérateur est piloté par la sémantique elle-même, y compris la forme extérieure des opérandes (ex. formes du modèle opéré et de l'outil de modi-

fication), ainsi que la forme des frontières des groupes. Toutes ces informations sont transformées en un ensemble de contraintes géométriques qui pilotent un moteur de déformation de maillage.

La suite de notre article est organisée comme ceci. La Section 2 résume quelques travaux existants ainsi que les principales étapes de notre approche. Les types d'opérateurs de modification de maillage proposés et leurs éléments de base sont décrits dans la section 3. La section 4 présente une application du processus de modification de maillage appliquée au problème du trou cylindrique sur maillage. La section 5 présente certains résultats de modification de maillages enrichis.

## 2. État de l'art

Aujourd'hui, certains logiciels de modélisation commercialisés ou disponibles en open source, fournissent déjà des fonctionnalités pour travailler directement sur des maillages 2D et 3D. Ils offrent généralement des outils pour créer des formes grâce à l'instanciation de primitives simples et/ou la réalisation de déformations. La plupart de ces outils répondent à des exigences relatives aux jeux et aux applications spécifiques. Ils attachent peu d'importance à la qualité du maillage obtenu, et encore moins d'importance à la conservation des données sémantiques associées. Par conséquent, ils ne peuvent pas modifier les modèles EF enrichis sans perte de données sémantiques, ce qui pose problème dans notre contexte industriel.

Côté recherche, certaines publications ont été faites dans les domaines de l'ingénierie et des applications pour la chirurgie. Bremberg et Dhondt [BRE08] proposent une approche pour l'insertion de fissure dans un maillage volumique en calculant l'intersection entre le maillage surfacique du profil de fissure et la peau surfacique du maillage volumique à fissurer. La fissure est calculée par l'insertion de nombreux nouveaux nœuds et de triangles le long de la ligne d'intersection. Ensuite, le modèle volumique est entièrement remaillé en utilisant la peau extérieure fissurée du maillage volumique initial et le maillage surfacique du profil de fissure. Ceci n'est pas pertinent quand on travaille sur les modèles enrichis et recalés. En outre, cette approche nécessite la modélisation du maillage de la fissure et ne peut pas travailler directement avec une définition analytique de l'équation de la fissure. Dans [SCH03], l'insertion d'une fissure dans un maillage est basée sur l'insertion de nouveaux nœuds le long de la fissure suivie d'une subdivision des éléments de maillage. La subdivision directe des éléments est un processus très rapide qui présente un intérêt pour la visualisation en temps réel du processus de fissuration. Par contre, du point de vue du calcul EF, le maillage résultant n'est pas approprié parce que les éléments subdivisés peuvent avoir une mauvaise qualité en termes d'aspect ratio. De la même manière, l'approche du Turini et al. [TUR06] raffine le maillage au tour de l'outil de coupe et supprime des éléments en intersection avec l'outil de coupe. Ici encore, rien ne garantit que le maillage résultant possède de bonnes propriétés de forme vis-à-vis des besoins liés aux calculs EF. Nienhuys et al. [Nie01] décrivent un algorithme de dé-

coupage qui déforme continuellement les tétraèdres de sorte que la trajectoire de coupe s'aligne avec des faces et des arêtes du modèle coupé. Cette méthode évite d'introduire de nouveaux nœuds, mais peut produire des tétraèdres dégénérés. L'approche proposée dans [KUN07] permet plusieurs incisions consécutives de tétraèdres dans la zone de la fissure. Chaque tétraèdre maintient ses informations d'état, y compris le nombre et la position des coupures. De multiples coupures sont fusionnées, et les tétraèdres touchés sont répartis le long du plan de coupe où une partie de la maille est complètement séparée du reste. L'intersection booléenne est proposée dans [YAN09]. Un ensemble d'algorithmes d'intersection entre les modèles de différents types sont présentés. Cependant, dans les applications visées, la qualité des triangles produits n'est pas contrôlée. Enfin, on peut citer les travaux de [MOE99], dans lesquels la simulation EF du processus de propagation des fissures est réalisée sans re-maillage. Dans ce cas, la fissure est modélisée par une équation analytique qui est directement prise en compte lors de l'analyse EF.

Pour résumer, diverses variantes des opérations booléennes sont proposées. Certaines appliquent des subdivisions directes qui pourraient produire des éléments plats et dégénérés donc inadéquats du point de vue du calcul EF. Certaines méthodes ont aussi besoin d'un re-maillage complet du modèle initial avec l'insertion de nouveaux nœuds partout. Cela prend du temps et n'est pas bien adapté à la modification des maillages recalés et validés par des mesures effectuées sur la structure réelle. Enfin, ces travaux correspondent à des manipulations purement géométriques qui ne prennent pas en compte les données sémantiques potentiellement attachées.

Dans cet article, nous proposons un nouvel opérateur de modification de maillage, basé sur de la déformation locale sous contraintes liées à la sémantique de forme. L'utilisation d'un moteur de déformation évite le re-maillage complet du modèle 2D/3D recalé et enrichi, et assure la qualité des mailles modifiées en termes d'aspect ratio et de conformité. La section suivante décrit en détail la méthode.

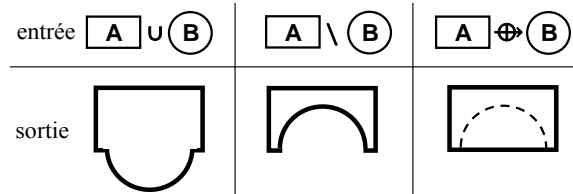
## 3. Éléments de base pour l'opérateur sans CAO

Cette section présente les divers aspects qui caractérisent les opérateurs de notre plate-forme de modification sans CAO. Elle comprend la présentation sur le type de modification de maillage, l'outil de déformation de forme adopté, les contraintes de forme qui peuvent être appliquées au cours du processus de déformation, la notion de groupe et les concepts liés, la notion d'interface de modification de maillage ainsi que la caractérisation des nœuds dans leur environnement et les contraintes de déformation associées.

### 3.1 Types de modifications

A partir des besoins de l'ingénierie mécanique, une première série d'opérateurs de modification de maillages EF a été conçue. Ces opérateurs peuvent être classés en catégorie selon les types suivants (**Figure 2**): ajout de matière (U), suppression de matière (V) ainsi que fissuration ou l'insertion

de zone de contact ( $\oplus$ ). Ces opérateurs agissent directement sur un maillage (A), initial ou de référence, avec un autre maillage ou une autre surface primitive (B) qui sert comme un outil d'exploitation. Ces opérations peuvent correspondre à des opérations booléennes sur le maillage de référence (pour l'ajout de matière et la suppression), ou à des modifications sous contrainte du maillage de référence (pour la fissuration / l'insertion de contact). En fait, elles peuvent être à peu près comparées aux opérateurs classiques de modélisation CSG (Constructive Solid Geometry) : la fusion et la soustraction de maillages. L'insertion de fissure / contact peut être considérée comme un cas particulier des opérations non-classiques. Ici, en plus de modifications géométriques, nous considérons la sémantique potentiellement attachée aux maillages comme une source d'information utilisée pour contraindre les modifications. À l'avenir, cette première série d'opérateurs sera étendue pour couvrir les besoins en termes d'intersection de maillages, d'ajout de congés de raccord le long des arêtes vives de maillages, et ainsi de suite.



**Figure 2:** Exemples de différentes catégories d'opérations effectuées sur un maillage A avec un modèle d'outil B

Dans cet article, nous expliquons en détail l'opération d'enlèvement de matière pour laquelle l'opérande (B) représente physiquement un outil de coupe pour supprimer un ensemble d'entités appartenant au maillage (A). En fonction de l'effet sur la topologie du maillage résultant, des variantes de ces opérateurs sont à distinguer. Lorsque l'outil final divise le modèle (A) en deux parties distinctes ou plus, l'opération peut être considérée comme une coupe, tandis que lorsque l'opération conduit à une modification topologique, comme une insertion de trou, l'opération peut être considérée comme un perçage. Ici, nous examinerons comment percer les maillages et ainsi introduire des trous cylindriques dans des maillages EF 2D/3D enrichis (section 4). Cet opérateur supprime les triangles / tétraèdres totalement enfermés dans la surface cylindrique d'outil et utilise un moteur de déformation, non seulement pour la forme de la partie cylindrique, mais aussi pour optimiser l'aspect ratio des triangles / tétraèdres situés à l'intérieurs et sur les bords.

### 3.2 Outil de déformation maillage

Dans notre approche, la modification de maillage résulte de la résolution d'un problème d'optimisation, défini par un ensemble de contraintes exprimées par un ensemble d'équations linéaires et non linéaires, et d'une fonction objectif  $\phi$  à minimiser (Eq. 1). Les inconnues sont les positions des nœuds du maillage aux abords de la zone à modifier (section. 3.5). Elles sont réunies dans le vecteur d'inconnues  $\mathbf{X}$ . Les contraintes forment un vecteur de contraintes  $\mathbf{G}$  lié à la position de certains nœuds :

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \\ \min \phi(\mathbf{X}). \end{cases} \quad (1)$$

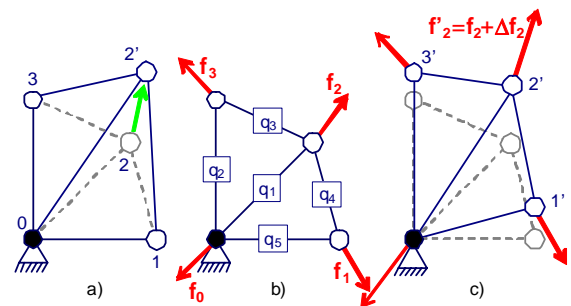
Pour mieux contrôler l'évolution de forme entre les contraintes, nous avons développé un moteur de déformation basé sur la Méthode dite des Densités d'Efforts [PER05]. Étant donné un maillage initial à déformer (Figure 3.a), un réseau de barres est construit à partir des nœuds de contrôle (Figure 3.b) : soit il peut être typologiquement équivalent au réseau de contrôle du maillage, soit la connectivité des barres peut être différente pour générer des comportements anisotropes. Les conditions aux limites, comme les déplacements prescrits, sont réalisées au travers de liaisons entre les sommets bloqués et les nœuds du réseau de barres. Chaque barre peut être considérée comme un ressort avec une longueur initiale nulle et une raideur  $q_i$  (plus précisément une densité de force). Pour maintenir l'état d'équilibre statique des barres de longueur  $\ell_i$ , des efforts extérieurs  $f_i$  doivent être appliqués aux extrémités de la barre :  $f_i = q_i \cdot \ell_i$ . L'ensemble des forces extérieures appliquées au réseau de barres initial peut être obtenu par les équations d'équilibre statique de chaque nœud (Figure 3.c). À la fin, on obtient un ensemble d'équations linéaires reliant les positions des nœuds  $\mathbf{X}$  aux efforts extérieurs appliqués [PER05]. Soit  $\mathbf{F}$  le vecteur contenant les composantes des efforts extérieurs appliqués aux nœuds libres de se déplacer, il existe une fonction linéaire  $g$  liant  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{X} = g(\mathbf{F}) \quad (2)$$

Grâce à cet ensemble d'équations, nous facilitons la manipulation de maillage. La Figure 3.a montre que sans couplage de notre réseau de barres à la structure, seul le nœud 2 est déplacé quand on le déplace. Si un réseau de barres est couplé à la structure, des efforts extérieurs doivent être appliqués pour maintenir l'état d'équilibre statique (Figure 3.b). En outre, une perturbation de l'effort extérieur appliqué au nœud 2 induit une modification de la position de tous les nœuds libres (Figure 3.c). Si au moins un nœud est bloqué, l'équation (2) peut être inversée afin d'obtenir une relation liant les efforts extérieurs aux positions des nœuds :

$$\mathbf{F} = g^{-1}(\mathbf{X}) \quad (3)$$

En d'autres termes, cela signifie que les efforts extérieurs appliqués aux nœuds libres, ou les positions des nœuds libres elles-mêmes, peuvent être considérés comme des inconnues du problème de déformation de maillage.



**Figure 3:** Déformation d'un réseau avec (c) et sans (a)

couplage avec le modèle mécanique de réseau de barres (b).

Une telle formulation montre clairement l'existence du découplage entre:

- les **contraintes géométriques** qui peuvent être imposées aux maillages (ex. position ou forme spécifique comme un plan). Ces contraintes produisent un ensemble d'équations éventuellement non-linéaires, liant directement la position des sommets libres. Le vecteur de contrainte  $G$  peut alors s'exprimer par une fonction des forces extérieures  $F$  appliquées aux nœuds libres en utilisant l'équation (2),

- la **fonction objective**  $\phi$  à minimiser. Ceci est un paramètre de niveau plut haut permettant la spécification de divers comportements de déformation via la combinaison de plusieurs quantités géométriques et / ou mécaniques par rapport au réseau de barres [PER05]. Par exemple, la minimisation des forces extérieures tend à minimiser l'aire de la surface et permet un repositionnement intéressant des sommets du maillage. A l'inverse, la minimisation des variations des forces extérieures tend à conserver la forme pendant la déformation.

En fait, un tel découplage permet la spécification d'un problème d'optimisation avec ou sans contraintes. Un exemple intéressant de la minimisation de la variation relative des forces extérieures, qui tend à minimiser les variations de courbure discrète sur la zone déformée. Cela présente un intérêt pour combler les trous dans des maillages [PER06].

Enfin, la fonction objective  $\phi$  étant une forme quadratique des inconnues  $F$  ou  $X$ , et puisque les contraintes peuvent être non-linéaires, une linéarisation est effectuée au premier ordre et en conséquence la résolution en utilisant un Lagrangien devient itérative.

### 3.3 Nouvelles contraintes élémentaires

Pour permettre la définition d'opérateurs géométriques basés sur le moteur de déformation proposé, de nouvelles contraintes élémentaires doivent être définies. Par conséquent, afin de couvrir la plupart des besoins en ingénierie mécanique, au minimum les contraintes de type plan, sphère et cylindre doivent être prises en considération. Soit  $P_m$  un nœud du maillage de coordonnées  $(x_m, y_m, z_m)$ ,  $P_0$  un point 3D de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $n_0$  une normale unitaire de composantes  $(n_{x0}, n_{y0}, n_{z0})$ , les contraintes suivantes peuvent être définies sur le nœud  $P_m$ :

- **contrainte de type « plan »** afin que  $P_m$  reste sur un plan défini par le point  $P_0$  et la normale  $n_0$ :

$$G_{pm0}(x_m, y_m, z_m) = (P_m - P_0) \cdot n_0 = 0 \quad (4)$$

Ici, il y a une équation scalaire qui dépend de façon linéaire de la position de  $P_m$ .

- **contrainte de type « sphère »** définie avec le centre de la sphère en  $P_0$  et un rayon  $R$ :

$$G_{sm0}(x_m, y_m, z_m) = \|P_m - P_0\|^2 - R^2 = 0 \quad (5)$$

Cette équation non-linéaire scalaire peut être linéarisée par rapport aux composantes du vecteur des inconnus  $X$  ou du vecteur des inconnus  $F$  tout en utilisant les équations (3). Par conséquent, à l'itération  $k$ , les équations de contrainte sphérique linéarisées par rapport aux inconnues de position  $(x_i, y_i, z_i)$  sont:

$$\frac{\partial G_{sm0}^{[k]}}{\partial x_i} = 2(x_m^{[k]} - x_0) \cdot \delta_{im} \quad (6)$$

où  $\delta_{im}$  est le symbole de Kronecker. Des équations similaires peuvent être obtenues pour les composantes  $y$  et  $z$ .

- **contrainte de type « cylindre »** définie par un vecteur unitaire  $n_0$  caractérisant son axe et un point  $P_0$ :

$$G_{cm0}(x_m, y_m, z_m) = [(P_m - P_0) \wedge n_0]^2 - R^2 = 0 \quad (7)$$

Comme pour la contrainte sphérique, la contrainte cylindrique peut être linéarisée par rapport aux inconnues de positions  $x_i$  ainsi que  $y_i$  et  $z_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{cm0}^{[k]}}{\partial x_i} = & 2 \cdot \delta_{im} \cdot (x_m^{[k]} - x_0) \cdot (n_{z0}^2 + n_{y0}^2) \\ & + 2 \cdot \delta_{im} \cdot (z_0 - z_m^{[k]}) \cdot n_{z0} \cdot n_{x0} \\ & + 2 \cdot \delta_{im} \cdot (y_0 - y_m^{[k]}) \cdot n_{x0} \cdot n_{y0} \end{aligned} \quad (8)$$

- **contrainte de type « free-form »** lorsque la forme à définir ne correspond à aucune des contraintes introduites précédemment. Cela se fait en contraignant à l'itération  $k$  le nœud  $P_m$  à bouger en fonction du plan défini par la position de  $P_m$  à l'itération  $(k-1)$  et la normale  $n_m$  de maillage sur ce point:

$$G_{fm}^{[k]}(x_m, y_m, z_m) = (P_m^{[k]} - P_m^{[k-1]}) \cdot n_m^{[k-1]} = 0 \quad (9)$$

En linéarisant, une équation similaire à (6) peut facilement être obtenue.

Enfin, si la linéarisation est effectuée selon les composantes inconnues  $f_{ix}$ ,  $f_{iy}$  and  $f_{iz}$  des forces extérieures, les densités  $q_j$  à l'intérieur des barres apparaîtront dans les équations linéarisées en utilisant les équations (2).

### 3.4 Groupes et concepts associés

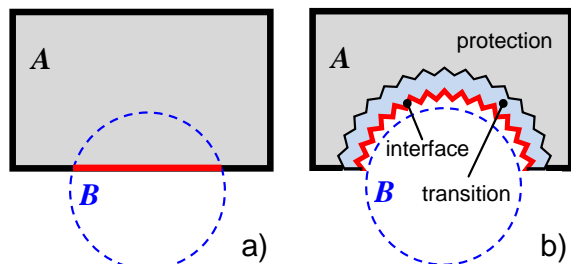
Les groupes EF permettent d'établir un lien entre les informations sémantiques de nature physique (modélisation mécanique, conditions aux limites, propriétés des matériaux, etc.) et le modèle géométrique sous-jacent (maillage). Les groupes peuvent être de dimensions différentes, et peuvent être associés à une ou plusieurs sémantiques physiques. Par contre, les informations sémantiques associées à un groupe s'appliquent à tous les éléments du groupe. Les groupes EF utiles pour le calcul EF (pour simplifier la modélisation mécanique, par exemple) peuvent se superposer. Cela signifie qu'une entité de maillage peut appartenir à plusieurs groupes qui se superposent. Pour obtenir des configurations sans superposition, nous introduisons la notion de Groupe Élémentaire (EG) [LOU09]. Un groupe élémentaire  $EG_{k..h}$  est l'ensemble de toutes les entités  $e$  de maillage telles que  $e$  appartient aux groupes  $G_{k..h}$ . Ainsi, un groupe  $G_k$  est formé par un ou plusieurs groupes élémentaires  $EG_{ki}$ . Dans [LOU09], nous présentons également la notion de Frontière de Groupe

Virtuelle (**VGB**) et on donne sa description en fonction de différentes dimensions des entités de groupe dans le cas des maillages 2D et 3D. En fait, la **VGB** d'un groupe  $G$  est l'ensemble des éléments  $e_b$  connectés du maillage, appartenant au groupe ou non, qui entoure une aire (resp. volume) compacte dans le maillage 2D (resp. 3D) dont les éléments  $e_i$  appartiennent tous au groupe  $G$ . Tous les autres éléments de  $G$  qui ne sont ni dans l'ensemble  $e_i$  ni dans l'ensemble  $e_b$  sont appelés « isolés ». Cette notion de **VGB** est directement appliquée et utilisée pour les **EGs**.

Cette décomposition est utile pour définir les contraintes lors de la modification de forme afin de maintenir l'association avec les données sémantiques de nature différente. La frontière entre le groupe élémentaire et les éléments isolés doit être préservée tandis que les éléments internes peuvent être libres de se déplacer à l'intérieur du **VGB** ou être supprimés. Dans le cas de l'insertion de nouvelles entités de maillage à l'intérieur de la **VGB**, la réaffectation de la définition du groupe sur ces nouvelles entités de maillage peut être automatiquement faite pour les groupes, y compris les **EGs** concernés.

### 3.5 Notion d'interface

La notion d'interface se rapporte à un ensemble d'entités de maillage appartenant au maillage de référence  $A$ . L'interface sera déformée pour respecter la forme décrite par le modèle d'outil  $B$ . En fonction de l'opérateur de modification de maillage présenté dans la sous-section 3.1, l'interface est calculée de différentes façons.



**Figure 4:** Interface de perçage d'un maillage 2D

D'une manière générale, pour les opérations d'enlèvement de matière, l'interface d'un maillage  $A$  de dimension  $n$  est l'ensemble des éléments de dimension  $(n - 1)$  adjacents aux éléments à retirer depuis le maillage  $A$  en fonction de l'outil  $B$ . Dans notre approche, nous décidons de supprimer tous les éléments de dimension  $n$  de  $A$  qui sont totalement ou partiellement entourés dans  $B$ . La Figure 4.b montre l'interface identifiée lors du perçage d'un rectangle initial (Figure 4.a). Ici, l'interface identifiée est complètement à l'extérieur de l'outil  $B$  pour éviter la génération d'éléments de mauvaise qualité lors de sa déformation pour épouser la forme de  $B$ . La description de ce point sera plus approfondie à la section 4.2 pour l'opérateur de perçage.

### 3.6 Contraintes de forme

Lorsque l'on effectue une modification de maillage, plusieurs contraintes de forme doivent être considérées. Le respect de toutes les contraintes de forme conduit à une modi-

fication de maillage de haute qualité qui conserve toutes les caractéristiques (géométrique et mécanique) du maillage original. Les contraintes de forme reflètent:

- i. **les informations relatives à la peau de maillage**, par exemple, cylindre, plan, droite, cercle, ou même forme libre délimitant un maillage 2D/3D. Dans ce but, nous avons conçu un outil [BAR09] partiellement basé sur le travail de [ATT06] pour la détection des surfaces de formes primitives dans des maillages 2D pouvant correspondre à la peau de l'extérieur du maillage 3D.
- ii. **les caractéristiques de l'outil** en termes de formes. Par exemple, l'ajout d'arrondis et de trous se fait à l'aide d'un outil de forme cylindrique, alors que l'insertion de fissures se fera à l'aide d'un outil plan. L'application de contraintes de forme liées à l'outil garantit une forme précise souhaitée au niveau de l'intersection sur le maillage de résultat.
- iii. **les caractéristiques de groupe** en termes de formes. En cas de groupes de sémantique définis sur le maillage, les formes des groupes et de leurs frontières virtuelles doivent être prises en considération. La préservation de la forme des groupes lors de la modification de maillage est obligatoire afin d'éviter de réinsérer les informations sémantiques déjà présentes dans le maillage mécaniquement calé et validé. Dans le cas des maillage 2D/3D, si le groupe d'entités de maillage (les nœuds et/ou les arêtes et/ou les faces et/ou les tétraèdres) occupe une surface/un volume, la forme de la(les) frontières virtuelles de ce groupe (courbe/surface) est(sont) considérée(s). En plus, dans le cas du maillage 2D, si la zone de groupe se base sur une surface de type spécifique, la forme de la surface de groupe est directement prise en compte en même temps que la forme linéaire de frontière.

Ces informations de forme sont ensuite utilisées pour définir des contraintes qui servent d'entrées au processus de déformation. Afin de maintenir autant que possible le modèle EF d'origine, la zone de la modification de maillage est limitée à la zone comprise entre l'outil de modification et celle adjacente. La zone autour de l'outil de modification est appelée la *zone de transition* et permet de relâcher les mailles. Dans l'exemple de la Figure 4.4.b, après la suppression brute, la partie retenue est divisée en une zone de protection (grise) et une zone de transition (bleue). L'interface brute est déformée pour s'adapter à la surface de l'outil  $B$ , et seuls les nœuds de la zone de transition sont utilisés pour relaxer les positions des nœuds et lisser la forme des mailles, de sorte que la variation de la densité du maillage entre la zone de protection et l'interface soit lissée.

Ainsi, les contraintes géométriques décrites ci-dessus sont associées aux nœuds sur l'interface et dans la zone de transition.

- les nœuds sur l'**interface** sont affectés de contraintes de maintien sur la surface de l'outil;
- les nœuds sur la **frontière de maillage** sont obligés de rester sur la forme de la peau du maillage;



- les nœuds sur la **frontière de groupe** seront aussi contraints de suivre la forme des frontières de groupes.

Bien entendu, certains nœuds peuvent être affectés de plusieurs contraintes. Par exemple, un nœud peut être contraint par rapport à la forme de l'outil et par la forme de la peau du maillage. Lorsque la partie de la peau du maillage à déformer ne correspond à aucune surface primitive, nous utilisons la contrainte de forme libre, telle que présentée dans la section 3.3. Les autres nœuds de maillage qui ne sont ni sur l'interface ni dans la zone de transition, sont bloqués.

Dans la section suivante, nous allons présenter en détail comment les concepts présentés dans cette section sont appliqués à une modification de maillage dans le cas de l'opération de perçage.

#### 4. Opérateur de perçage

L'opération de perçage de maillage consiste en l'insertion d'un trou cylindrique débouchant. Cette opération est réalisée en plusieurs étapes: (1) l'identification de la partie de maillage grossièrement enfermée dans le volume cylindrique, (2) la définition d'interface grossière et la suppression des éléments de la partie enfermée, (3) la définition des contraintes de déformation et la déformation d'interface pour correspondre à la surface cylindrique du trou, tout en relâchant les nœuds internes.

##### 4.1 Classification des éléments de maillage

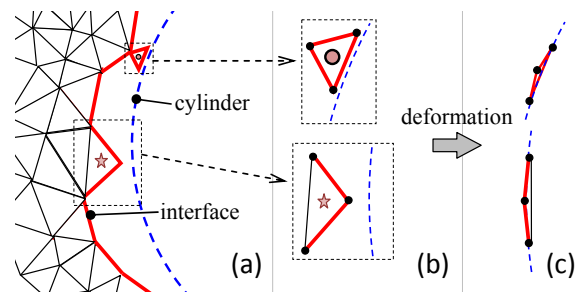
Comme présenté dans la section 3.1, le perçage correspond à un type particulier d'opération d'enlèvement de matière. Il peut être considéré comme une soustraction booléenne d'un cylindre à partir d'un maillage EF. Le volume du cylindre est implicitement défini par la surface extérieure de l'outil. Par conséquent, la première étape de cet opérateur nécessite l'identification des éléments du maillage destinés à être enlevés afin que l'interface calculée par la suite comme étant la surface cylindrique, entoure autant que possible le trou.

Dans ce but, nous divisons les nœuds du maillage en deux ensembles  $I$  et  $O$ , ce qui indique respectivement les nœuds à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Ensuite, nous rassemblons les entités de maillage à supprimer. Dans le cas de maillage 3D (resp. 2D), nous définissons l'ensemble  $RT$  qui contient toutes les tétraèdres (resp. triangles) qui sont associés à au moins un nœud dans l'ensemble  $I$ . Nous définissons également l'ensemble  $KT$  qui regroupe les tétraèdres (resp. triangles) qui ne sont pas dans  $RT$ . Notons que de cette manière, les éléments qui sont partiellement à l'intérieur du cylindre, doivent être enlevés. Avec ce choix, l'interface entoure complètement le cylindre, réduisant ainsi le nombre possible de tétraèdres (resp. triangles) de "mauvaise" qualité, c'est-à-dire plats. En outre, nous pouvons noter que, dans le cas de l'enlèvement de matière, la densité des nœuds de l'interface déformée sera toujours plus élevée que celle de l'interface initiale.

##### 4.2 Identification et prétraitement de l'interface

Une fois les éléments du maillage à supprimer définis, nous ne les retirons pas immédiatement, car les éléments du maillage d'origine sont utilisés pour récupérer des informations de forme nécessaire pour guider le processus de déformation. Néanmoins, on peut pré-calculer les éléments d'interface. L'interface de perçage est un ensemble  $ITF$  d'éléments partagée par les éléments enlevés et les éléments conservés du maillage. Pour un maillage 3D (ou 2D), un ensemble  $ITF$  est défini pour tous les triangles (ou arêtes) qui sont partagées par un tétraèdre (ou triangle) dans l'ensemble  $RT$  et un tétraèdre (triangle) dans  $KT$ .

Pour éviter les mauvais comportements au cours des déformations successives, nous nous assurons que dans le cas de maillage 3D (ou 2D), un tétraèdre (ou triangle) de  $KT$  est associé avec un seul triangle (ou arête) de l'ensemble  $ITF$ . Les tétraèdres (resp. triangles) d'un maillage 3D (resp. 2D) qui ne sont pas conformes à cette condition, sont problématiques, parce qu'ils seront aplatis en raison de la déformation de l'interface pour faire correspondre au cylindre.



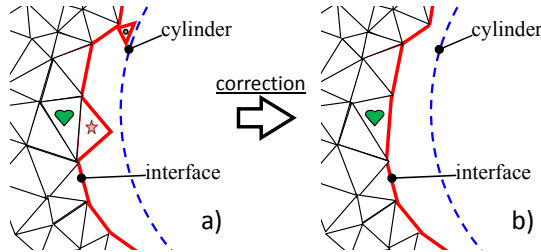
**Figure 5:** Un triangle conservé associé à 2 arêtes d'interface de perçage (a), (b) et la version correspondante déformée (c).

Pour une meilleure compréhension, le cas du maillage 2D est illustré sur la Figure 5. L'arc bleu en pointillés dans la Figure 5.a représente la section du cylindre de telle sorte que l'axe du cylindre est perpendiculaire à l'image. La Figure 5.a montre également les éléments de l'ensemble  $KT$  du maillage triangulaire opéré (les éléments de  $RT$  ne sont pas montrés). Les arêtes épaisses rouges constituent l'interface. Dans cet exemple, le triangle marqué par un pentagramme possède 2 arêtes d'interface, et le triangle marqué par un cercle à l'intérieur, avec 3 arêtes d'interface. Le triangle avec 3 arêtes d'interface est très rare, sauf pour dans le cas de retournement des triangles ou d'erreurs numériques. La Figure 5.b montre un zoom de ces deux triangles problématiques, et la Figure 5.c montre sa forme possible après la déformation de l'interface. Les trois sommets des deux triangles sont sur le cercle et les triangles sont aplatis et renversés. Il est donc nécessaire d'éviter de telles configurations problématiques. De même dans le cas de maillage 3D, lorsqu'un tétraèdre est associé à 2, 3 ou 4 triangles d'interface, ce tétraèdre va également être aplati après la déformation de l'interface de perçage.

Pour éviter de telles configurations problématiques en 2D, la solution est d'enlever les deux (ou trois) arêtes d'interface concernées depuis l'ensemble  $ITF$  et d'ajouter la troisième (ou aucune) arête du triangle problématique à l'ensemble  $ITF$ . Notez que nous ne retirons pas d'éléments du maillage

immédiatement, par conséquent, tout en changeant l'ensemble **ITF**, nous déplaçons effectivement ce triangle de **KT** en **RT**. La Figure 6 montre la façon d'appliquer la solution sur l'exemple illustré dans la Figure 5. Le triangle problématique de la Figure 6.a est retiré de l'ensemble **KT** (Figure 6.b) ; les cinq arêtes initialement définies comme étant l'interface pour les deux triangles sont aussi retirées de l'interface, et la sixième arête sur le triangle étiqueté par un pentagramme est ajoutée à l'interface **ITF**. Le triangle étiqueté par un symbole du cœur vert possède une arête associée à l'interface.

Dans le cas d'un maillage 3D, les tétraèdres problématiques associant deux, trois ou quatre triangles d'interface, sont considérés comme devant être soit supprimés, soit transférés de l'ensemble **KT** vers le **RT**. Puis les triangles d'interface sont retirés de l'ensemble d'interface et remplacés par l'(es) autre(s) triangle(s) du tétraèdre.



**Figure 6:** La mise à jour d'interface pour le cas où des triangles conservés sont associés avec des arêtes d'interface

#### 4.3 Définition des contraintes et déformation

Une fois que les éléments de l'interface **ITF** sont identifiés, la zone de transition peut être définie. Tous les nœuds sur l'interface et dans la zone de transition se déplaceront pour que l'interface épouse la surface du trou cylindrique en prenant en compte la qualité du maillage en termes d'aspect ratio. Comme dit précédemment, l'objectif de la zone de transition est d'améliorer la qualité de maillage pour rendre la variation de densité progressive à partir de l'interface vers le maillage non modifié. Les nœuds de la zone de transition sont au  $i^{\text{ème}}$  voisinage de ceux associés avec les éléments de l'**ITF**. La largeur  $i$  peut être spécifiée par l'utilisateur ou calculée automatiquement. Lorsqu'elle est calculée de façon automatique, sa valeur est obtenue en divisant la plus grande distance entre les nœuds d'interface et le cylindre par la longueur d'arête moyenne. Cela donne une idée de la distance de déplacement des nœuds pour obtenir la forme de cible par rapport à la densité du maillage. Plus grande est cette valeur, plus la transition sera douce si l'on considère un environnement plus grand, la qualité du maillage sera donc meilleure.

Pour définir les différentes contraintes aux nœuds de l'interface et aux nœuds de transition, différentes informations de forme indiquées à la section 3.6 doivent être dérivées, ainsi que la classification des nœuds concernés.

D'abord, les éléments de la "frontière" du maillage dans la zone de transition sont détectés. Pour un maillage 3D, la "frontière" est l'ensemble de triangles connectés qui s'associent uniquement avec un tétraèdre du maillage. De

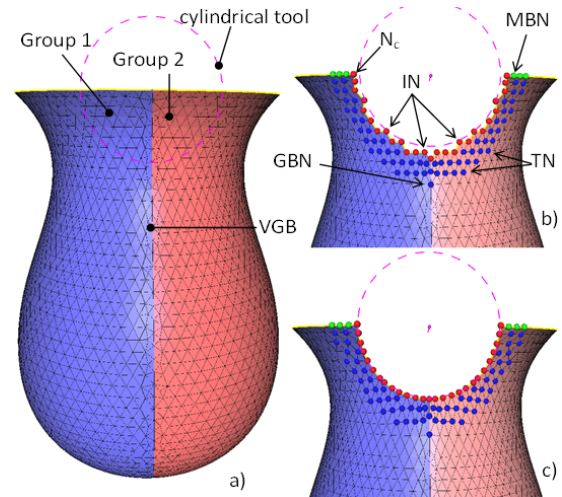
même, pour un maillage 2D, la "frontière" est l'ensemble connexe d'arêtes qui s'associent avec un seul triangle, et le "corps" est l'ensemble de tous les triangles dans le maillage. Comme mentionné dans la section 3.6, dans le cas du maillage 2D, non seulement la forme de la courbe de la frontière, mais aussi la forme de la surface du corps du maillage 2D, sont prises en compte lors de la déformation. Toutes ces informations de forme sont calculées avec toutes les entités du maillage d'origine avant la suppression des éléments de **RT**. Ensuite, la forme des groupes élémentaires est calculée pour tous ces éléments du maillage EF d'origine, présents dans l'interface et la zone de transition. Une fois que toutes les informations importantes de forme sont calculées, les éléments de l'ensemble **RT** sont retirés du maillage. Enfin, les nœuds, sur lesquels les contraintes sont spécifiées, sont identifiés et classés comme suit:

- **IN**: les nœuds s'associant aux éléments d'interface,
- **TN**: les nœuds de la zone de transition, libres de se déplacer pendant la déformation,
- **MBN**: les nœuds sur la frontière du maillage,
- **GBN**: les nœuds sur la frontière des groupes.

À ce stade, il est possible de définir les conditions aux limites et les contraintes de forme, comme dans la section 3.6. Enfin, le processus de déformation est appliqué. Puisque la contrainte de cylindre, appliquée aux nœuds de l'ensemble **IN** et probablement sur ceux de **MBN** et **GBN** en fonction de leurs formes respectives, n'est pas linéaire, l'étape de minimisation peut être appliquée plusieurs fois à des contraintes linéarisées.

## 5. Résultats

Cette section donne quelques résultats relatifs à l'application de l'opérateur de trou cylindrique sur les maillages de 2D et 3D.



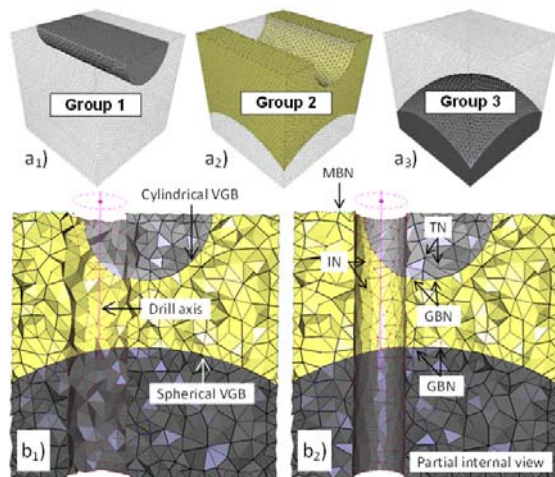
**Figure 7:** Percage d'un trou cylindrique dans un maillage 2D triangulaire segmenté en deux groupes.



Premièrement, l'opérateur de trou cylindrique est appliqué sur le maillage triangulaire d'un demi-vase segmenté en deux groupes de triangles (Figure 7.a). La **VGB** définie est issue de l'intersection entre le demi-vase et un plan traversant l'axe du vase. La première étape vise à supprimer tous les triangles qui sont complètement à l'intérieur du volume cylindrique défini par l'axe de l'outil et son rayon (Figure 7.b). Les contraintes sont affectées aux différents nœuds entourant l'interface identifiée. Puisqu'il s'agit d'un maillage 2D triangulaire, tous les nœuds libres sont contraints à rester sur la peau du demi-vase en utilisant des contraintes de forme libre comme décrit dans la section 3.3. En outre, les nœuds de l'ensemble **IN** doivent rester sur l'outil cylindrique, les nœuds **GBN** doivent rester sur la **VGB** identifiée et les nœuds de **MBN** sur la frontière du maillage. Ainsi, le nœud  $N_C$  (Figure 7.b) est contraint de rester sur la peau du maillage, sur la frontière du maillage et sur l'outil cylindrique. La déformation basée sur la minimisation des forces extérieures appliquées sur le réseau de barre couplé au maillage donne le résultat de la Figure 7.c.

Dans le deuxième exemple, l'opérateur de perçage cylindrique est appliqué sur le maillage tétraédrique d'un cube, segmenté en trois groupes (Figure 8.a). Ici, la segmentation du volume a été effectuée afin que la frontière résultant entre les groupes 1 et 2 soit cylindrique et que la frontière entre les groupes 2 et 3 soit sphérique. En conséquence, certains nœuds sont contraints à rester sur l'outil cylindrique, d'autres, sur la **VGB** sphériques, certains sur les deux, et ainsi de suite. Pour un maillage 3D, les nœuds de **TN** sont totalement libres de se déplacer à l'intérieur du volume. Ici, les nœuds **MBN** doivent rester sur les faces du cube. La Figure 8.b<sub>1</sub> montre la suppression des tétraèdres, la déformation locale autour du trou est montrée dans la Figure 8.b<sub>2</sub>.

Enfin, l'opérateur de perçage a été appliqué plusieurs fois sur un modèle mécanique. (Figure 9).



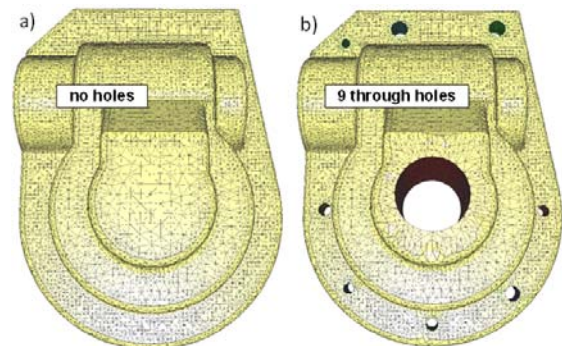
**Figure 8:** Perçage d'un trou cylindrique dans un maillage 3D tétraédrique segmenté en trois groupes

## 6. Conclusion

Dans cet article, nous proposons des opérateurs de modification de maillage basés sur de la déformation sous contraintes et ceci afin de manipuler directement les maillages tout en préservant la qualité du maillage et les informations sémantiques associées. Le cadre a été formalisé, les types d'opérations prévues, les concepts sous-jacents et les paramètres ont été spécifiés. Toutes les caractéristiques importantes de forme sont converties en un ensemble de contraintes sur les nœuds de maillage, utilisées comme des entrées pour notre moteur de déformation, basé sur un modèle mécanique linéaire de réseau de barres couplé à des nœuds et des arêtes de maillage. L'approche développée peut être appliquée aux maillages 2D et 3D.

Notre approche diffère de celles existantes en ce sens qu'elle permet l'application d'opérations booléennes sur des maillages 3D, en prenant non seulement en compte la géométrie (la forme et la taille des mailles), mais aussi la préservation de l'information sémantique au cours de la modification de forme. L'opérateur de perçage cylindrique a été présenté et testé sur des exemples multiples.

Les travaux à venir concernent l'extension de la boîte à outils à d'autres opérateurs, qui agissent sur des maillages 3D enrichis: l'intersection, l'union, l'arrondi de maillages 3D tétraédriques. La définition d'outils de formes complexes spécifiées par les utilisateurs est également envisagée, ainsi que la possibilité de laisser l'utilisateur déplacer son outil sur le maillage 3D pour le mettre en oeuvre de manière interactive.



**Figure 9:** Perçage de plusieurs trous cylindriques dans un modèle volumique

## Remerciements

Ce travail est partiellement soutenu par la direction de Recherche et Développement du groupe EDF, et il est partiellement effectué dans le cadre du projet FOCUS K3D soutenu par la Commission Européenne [13].

## Références

- [AIM04] Aim@Shape 2004-08. European Network of Excellence, Key Action: 2.3.1.7, Semantic-based knowledge systems, FP6, [www.aimatshape.net](http://www.aimatshape.net).
- [ATT06] M. Attene, B. Falcidieno, M. Spagnuolo, Hierarchical mesh segmentation based on fitting primitives. *Visual Computer*, 22 (3): 181 - 193. Springer-Verlag, 2006
- [BAR09] A. Bargier, F. Giannini, R. Lou, J-P. Pernot Surface primitive recognition, Technical Report CNR-IMATI 08/09.
- [BRE08] D. Bremberg, G. Dhondt, Automatic crack insertion for arbitrary crack growth. *Int. J. of Engineering Fracture Mechanics*, 75:404–416, 2008.
- [FOCUS] Foster the Comprehension and Use of Knowledge intensive 3D media, FP7 Coordination Action, [www.focusk3d.eu](http://www.focusk3d.eu)
- [KUN07] K. Kundu, M. Olano, Tissue Resection using Delayed Updates in a Tetrahedral Mesh, *Proc. of Medicine Meets Virtual Reality 15*, Eds. J.D.Westwood and al., IOS Press, Netherlands, 2007.
- [LOU09] R. Lou, F. Giannini, J-P. Pernot, A. Mikchevitch, B. Falcidieno, P. Véron, R. Marc, Towards CAD-less finite element analysis using group boundaries for enriched meshes manipulation, *Proc. of the ASME Int. Design Eng. Tech. Conf. & Computers and Information in Eng. Tech. Conf.*, DETC09-CIE86575, San Diego, USA, 2009.
- [MOE99] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131-150, 1999.
- [Nie01] H-W. Nienhuys, A. F. van der Stappen, Supporting cuts and finite element deformation in interactive surgery simulation, Technical Report, Univer-siteit Utrecht, 2001.
- [PER05] J-P. Pernot, B Falcidieno, F Giannini, J-C. Léon, Shape tuning in Fully Free-Form Deformation Features, *J. of Computing and Information Science in Engineering*, 5(2):95-103, 2005.
- [PER06] J-P. Pernot, G. Moraru, P. Véron, Filling holes in meshes using a mechanical model to simulate the curvature variation minimization, *J. Computers & Graphics*, 30 (6): 892-902, 2006.
- [SCH03] M. Schoellmann, M. Fulland, H.A. Richard, Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3D structures, *Int. J. of Engineering Fracture Mechanics*, 70(2):249-268, 2003.
- [TUR06] G. Turini, F. Ganovelli, C. Montani, Simulating drilling on tetrahedral meshes, *Proceedings of Eurographics Conference*, pp. 127-131, 2006.
- [YAN09] P. Yang, and X. Qian, Direct Boolean intersection between acquired and designed geometry, *Computer-Aided Design*, 41(2):81-94, 2009