UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Faculdade de Computação
Avenida João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1B - Bairro Santa Mônica, Uberlândia/MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4218 - www.facom.ufu.br - cocom@ufu.br

Bacharelado em Ciência da Computação
Bacharelado em Sistemas de Informação
Disciplina: Lógica para Computação - LC [GBC016/GSI005]
Prof. Me. Claudiney R. Tinoco
Aluna: Lousane de Avelar Rodrigues

Segunda Lista de Exercícios

1. Sejam A e B fórmulas. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

    a) Se A é satisfatível, então ¬A é satisfatível
    b) A é tautologia se ¬A é contraditória
    c) A é tautologia se A é satisfatível
    d) Se A é contraditória, então ¬A é satisfatível
    e) Se A |= B e A é tautologia implica que B é tautologia
    f) Se A |= B e B é tautologia implica que A é tautologia

2. Utilizando todos os métodos de validação vistos em sala, diga se cada sentença abaixo é contraditória, satisfatível ou tautologia.

    a) $P \rightarrow P$
    b) $P \rightarrow \neg P$
    c) $\neg P \rightarrow P$
    d) $P \leftrightarrow P$
    e) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
    f) $(P \rightarrow (Q \vee R)) \rightarrow (P \wedge (Q \rightarrow \neg R))$
    g) $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee R$
    h) $P \rightarrow Q \rightarrow (P \wedge Q)$

    $(\neg (A \leftrightarrow B))$

    $(A \wedge (B \leftrightarrow C))$

    $((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C))$

    $(((\neg A) \vee B) \rightarrow C)$

    $((A \leftrightarrow B) \rightarrow ((\neg A) \wedge B))$

3. Construa a árvore semântica associada à fórmula abaixo e diga se ela é tautologia, satisfatível ou contraditória.

    $$H = (P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$$

    Se for possível, forneça uma interpretação I tal que I[H] = F.

4. Considere as fórmulas a seguir:
   a) $\neg P \vee Q$
   b) $\neg Q \rightarrow P$
   c) $P \leftrightarrow Q$
   d) $P \rightarrow Q$
   e) $\neg P \rightarrow \neg Q$
   f) $P \wedge \neg Q$

   Determine, utilizando o método da negação, os casos em que:
   a) $(P \wedge Q) \rightarrow G$ é tautologia
   b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é tautologia
   c) $(P \vee Q) \models G$
   d) $(P \leftrightarrow Q) \models G$

5. Levando em conta o que aprendeu sobre equivalências e em particular sobre as Leis de De Morgan, escreva a negação das seguintes proposições compostas:
   a) Se a comida é boa, então o serviço é excelente.
   b) Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.
   c) Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.
   d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.
   e) Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

6. Para as seguintes fórmulas, responda: Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas como sendo verdadeiras. Além disso, J[P] = T. O que se pode concluir a respeito de J[Q] e J[R], em cada um dos casos?

   a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
   b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
   c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$
   d) $(Q \rightarrow \neg P)$
   e) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
   f) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$

7. Faça a simplificação lógica das fórmulas abaixo utilizando as equivalências clássicas. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

   a) $(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$
   b) $((\neg (P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg (Q \wedge \neg P)))$

8. Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

   a) $(R \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow Q)$ e $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg R$
   b) $(\neg(P \rightarrow Q) \vee S) \wedge \neg P$ e $(P \vee S) \wedge ((Q \rightarrow S) \wedge \neg P)$

Identificação	*Fórmula H*	*Fórmula G*
Dupla Negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de Identidade	$E \vee False$	E
	$E \wedge True$	E
Propriedades Complementares	$E \vee \neg E$	True
	$E \wedge \neg E$	False
Leis de Morgan	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$

Identificação	*Fórmula H*	*Fórmula G*
Propriedades de Substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades Comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades Associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades Distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova Condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$

1) a) Se A é satisfatível, então $\neg A$ é satisfatível. Falsa.

A é satisfatível $\Leftrightarrow$ existe uma interpretação I, onde $I[A]=T$

$\Leftrightarrow I[\neg A] = F$

$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, a $I[\neg A] = F$

$\Leftrightarrow$

b) A é tautologia se $\neg A$ é contraditória.

$\neg A$ é contraditório $\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a A, temos que $I[A] = T$; tautologia.

$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a A, temos que $I[\neg A] = F$

$\Leftrightarrow \neg A$ é contraditório

Notação Matematica

$\neg A$ é contraditorio $\Leftrightarrow \forall I, I[A] = T$

$\Leftrightarrow \forall I, I[\neg A] = F$

$\Leftrightarrow \neg A$ é contraditório

logo, $\neg A$ é contraditorio, então essa afirmação é verdadeira!

c) A é tautologia se A é satisfatório.

A é tautologia

$\Leftrightarrow$ para toda linha da tabela-verdade associada a A, temos A é verdadeira,

$\Rightarrow$ existe linha da tabela-verdade associada a A, tal que A é verdadeira

$\Leftrightarrow A$ é satisfatível.

Notação Matematica:

A é tautologia $\Leftrightarrow \forall I, I[A] = T,$

$\Rightarrow \exists I; I[A] = T,$

$\Leftrightarrow A$ é satisfatível.

logo A é satisfatível, então essa afirmação é verdadeira!

d) Se A é contraditório, então $\neg A$ é satisfatível.

A é contraditório $\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[A] = F$

$\Leftrightarrow$ para toda interpretação I, $I[\neg A] = T$

$\Rightarrow$ existe uma interpretação I, $I[\neg A] = T$

$\Leftrightarrow$ $\neg A$ é satisfatível.

Notacão Matemática

A é contraditório $\Leftrightarrow \forall I \mid I[A] = F$

$\Leftrightarrow \forall I \mid I[\neg A] = T$

$\Rightarrow \exists I \mid I[\neg A] = T$

$\Leftrightarrow \neg A$ é satisfatível

logo $\neg A$ é satisfatível, então essa afirmacão é <u>verdadeira.</u>

e) Se $A \models B$ e A é tautologia implica que B é tautologia. V

A implica semanticamente em B

$\Rightarrow$ Para toda interpretação I, se $I[A] = T$, então $I[G] = T$

$\Rightarrow$ Para toda interpretação I, $I[A \to G] = T$

$\Rightarrow$ $(A \to B)$ é uma tautologia.

logo,

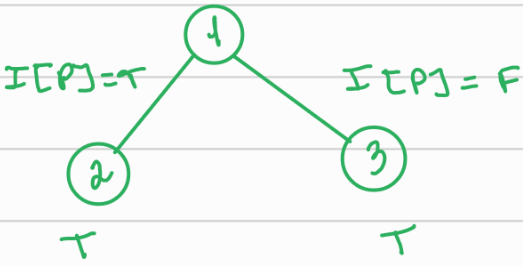
f) Se $A \models B$ e B é tautologia implica que A é tautologia.

Falso!

Para toda interpretação I, se I interpreta $I[B] = T$, nada podemos concluir de $I[A]$, então podemos ter $I[A] = T$ ou $I[A] = F$.

② a) $p \rightarrow p$

p	$p \rightarrow p$
T	T
F	T

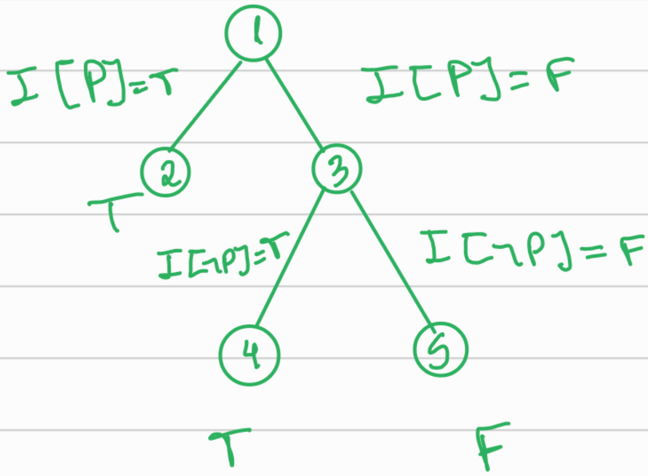


tautologia e Satisfatível

b) $p \rightarrow \neg p$

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
T	F	F
F	T	T

Satisfatível

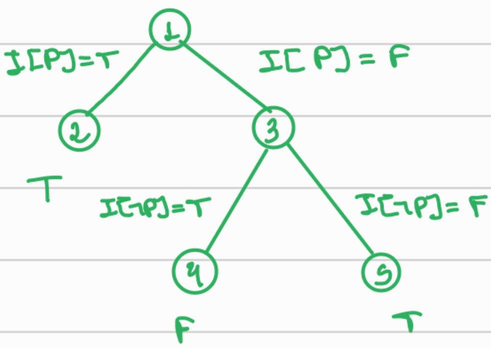


c) $\neg p \rightarrow p$

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$
T	F	T
F	T	F

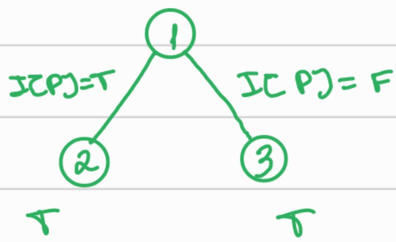
$\neg p \rightarrow p$
$F \rightarrow F$

Satisfatível



d) $p \leftrightarrow p$

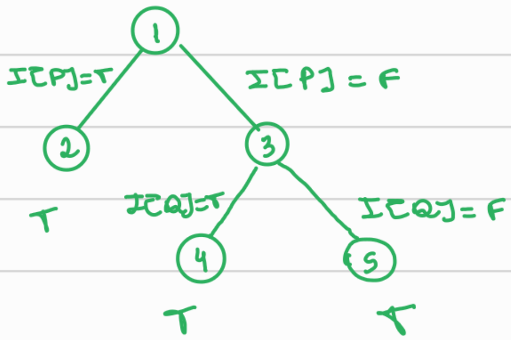
p	$p \leftrightarrow p$
T	T
F	T



tautologia e Satisfatível

e) $P \to (Q \to P)$

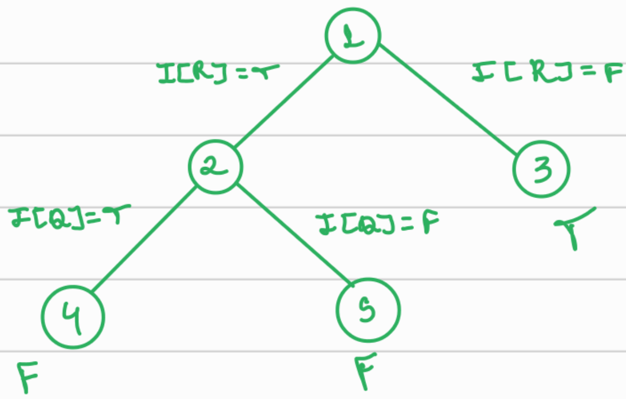
P	Q	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T



tautologia, Satisfatível

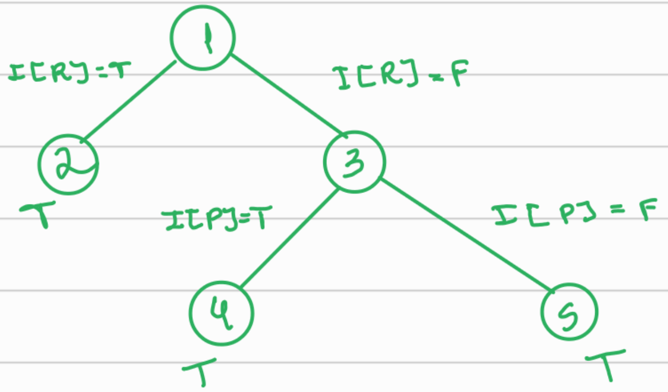
f) $(P \to (Q \vee R)) \to (P \wedge (Q \to \neg R))$

P	Q	R	$\neg R$	$Q \vee R$	$P \to (Q \vee R)$	$Q \to \neg R$	$P \wedge (Q \to \neg R)$	Saída
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	T	F	F



g) $(P \vee R) \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee R$

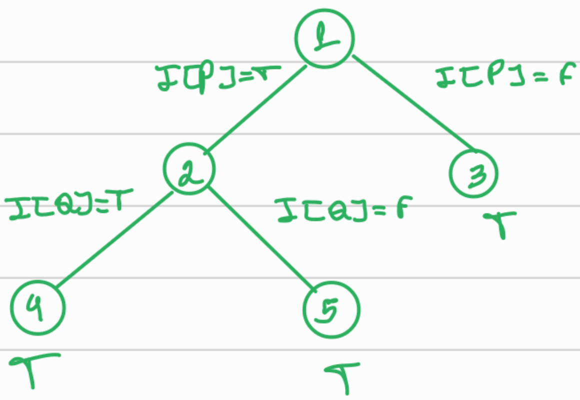
P	Q	R	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee R$	Saída
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T



tautologia, Satisfatível

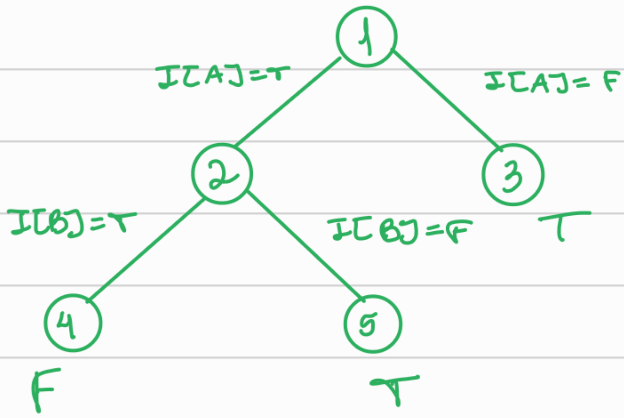
h) $P \to Q \to (P \wedge Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \to (P \wedge Q)$	$P \to Q \to (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T



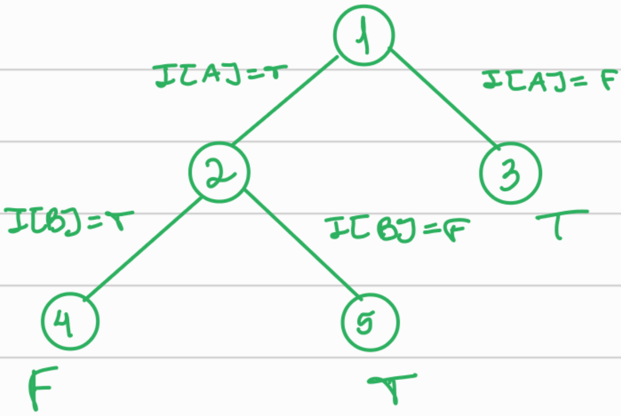
i) $(\neg(A \leftrightarrow B))$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg(A \leftrightarrow B)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F



j) $(A \wedge (B \leftrightarrow C))$

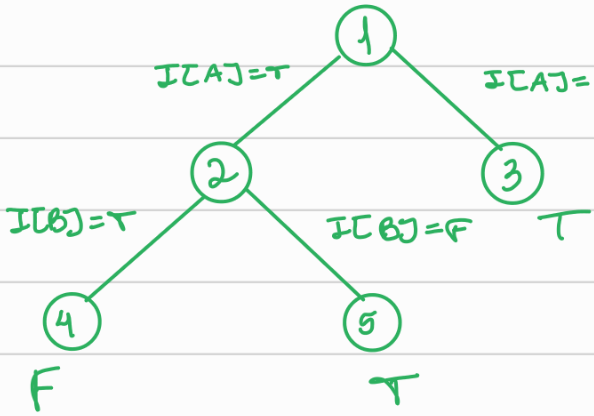
A	B	C	$B \leftrightarrow C$	$A \wedge (B \leftrightarrow C)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F



k) $((A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge C))$

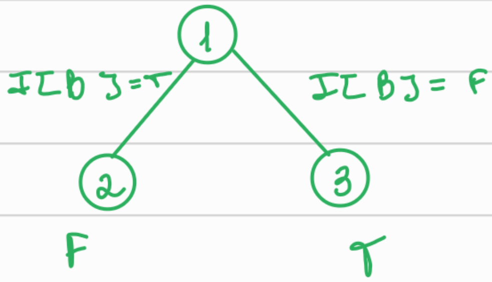
A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	Saída
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

* Árvore Semântica



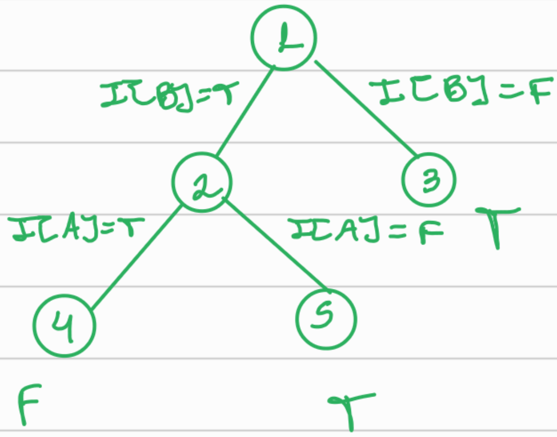
l) $(((\neg A) \vee B) \to C)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$((\neg A) \vee B) \to C$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	F

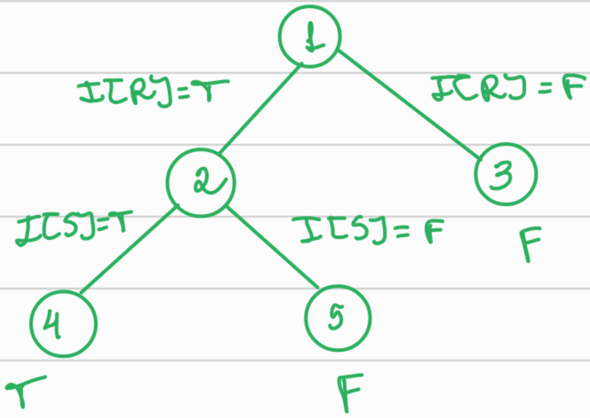


m) $((A \leftrightarrow B) \to ((\neg A) \wedge B))$

A	B	$\neg A$	$A \leftrightarrow B$	$(\neg A) \wedge B$	Saída
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F



3) $H = (P \wedge Q) \to (R \wedge S)$



4 a) $(P \land Q) \vDash G$ é tautologia

a.1) $(P \land Q) \vDash (\neg P \lor Q)$

Supondo que $(P \land Q) \to (\neg P \lor Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \land Q) \to (\neg P \lor Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \land Q)] = T$ e $I[(\neg P \lor Q) = F$.

Vejamos: $(P \land Q) \to (\neg P \lor Q)$

$T \; \boxed{T} \; F \quad F \qquad F \; F \; F$

↳ absurdo!

Temos um absurdo, pois por definição para que $(P \land Q) = T$ ambas proposições tem que ser verdadeiras. Como não obtivemo nesse caso podemos concluir que $I[(P \land Q) \to (\neg P \lor Q)]$ é tautologia

a.2) $(P \land Q) \vDash (\neg Q \to P)$

Supondo que $(P \land Q) \to (\neg Q \to P)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \land Q) \to (\neg Q \to P) = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \land Q)] = T$ e $I[(\neg Q \to P) = F$.

Vejamos: $(P \land Q) \to (\neg Q \to P)$

$F \; \boxed{T} \; F \quad F \qquad T \; F \; F$

↳ absurdo!

Temos um absurdo, pois por definição para que $(P \land Q) = T$ ambas proposições tem que ser verdadeiras. Como não obtivemos nesse caso podemos concluir que $I[(P \land Q) \to (\neg Q \to P)]$ é tautologia

a.3) $(P \land Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

Supondo que $(P \land Q) \to (P \leftrightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \land Q) \to (P \leftrightarrow Q)] = F$. Há assim duas possibilidade, $I[(P \land Q)] = T$ e $I[(P \leftrightarrow Q)] = F$, onde $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ ou vice-versa.

1º Caso: $(P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

$T\ \boxed{T}\ F\ F\quad T\ F\ F$

↳ absurdo!

2º Caso: $(P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

$F\ \boxed{T}\ T\ F\quad F\ F\ T$

↳ absurdo!

Encontramos um absurdo, pois por definição $I[(P \leftrightarrow Q)] = F$ sua saída teria ter valores diferentes. Como não obtivemos nesse caso, podemos concluir que $I[(P \wedge Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)]$ é tautologia.

a.4) $(P \wedge Q) \models (P \rightarrow Q)$

Supondo que $(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \wedge Q)] = T$ e $I[(P \rightarrow Q)] = F$.

Vejamos: $(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

$T\ \boxed{T}\ F\ F\quad T\ F\ F$

↳ absurdo!

Temos um absurdo, pois por definição para que $(P \wedge Q) = T$ ambas proposições tem que ser verdadeiras. Como não obtivemos nesse coso podemos concluir que $I[(P \wedge Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)]$ é tautologia

a.5) $(P \wedge Q) \models (\neg P \rightarrow \neg Q)$

Supondo que $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \wedge Q)] = T$ e $I[(\neg P \rightarrow \neg Q)] = F$.

Vejamos: $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

$F\ \boxed{T}\ T\ F\quad T\ F\ F$

↳ absurdo!

Temos absurdo em ambos os casos, que podemos concluir que a $I[(P \wedge Q) \to (\neg P \to Q)]$ é uma tautologia.

a.6) $(P \wedge Q) \models (P \wedge \neg Q)$

Supondo que $(P \wedge Q) \to (P \wedge \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \wedge Q) \to (P \wedge \neg Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \wedge Q)] = T$ e $I[(P \wedge \neg Q)] = F$.

Vejamos:

Se $I[(P \wedge Q)] = T$, então $I[P] = T$ e $I[Q] = T$. Inserindo esses valores no posterior da implicação $I[P] = T$ e $I[\neg Q] = F$, temos $I[(P \wedge \neg Q)] = F$, como esperado.

Para a fórmula ser uma tautologia teriamos que obter absurdo. Como não obtivemos nesse caso, podemos concluir que $I[(P \wedge Q) \to (P \wedge \neg Q)]$ não é uma tautologia.

b) $(P \to Q) \models G$ é tautologia

b.1) $(P \to Q) \models (\neg P \vee Q)$

Supondo que $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(\neg P \vee Q) = F$.

Vejamos:
$$\begin{array}{ccccccc} (P & \to & Q) & \to & (\neg P & \vee & Q) \\ T & \boxed{T} & F & F & F & F & F \end{array}$$
↳ absurdo

Temos um absurdo, pois por definição para que $(P \to Q) = T$ a $I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$, ou $I[P] = T$ e $I[Q] = T$. Como não obtivemos nesse caso podemos concluir que $I[(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)]$ é tautologia.

b.2) $(P \to Q) \vDash (\neg Q \to P)$

Supondo que $(P \to Q) \to (\neg Q \to P)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (\neg Q \to P) = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(\neg Q \to P) = F$.

Vejamos: $(P \to Q) \to (\neg Q \to P)$

F T F F   T F F

Não existe absurdo, logo concluimos que a $I[(P \to Q) \to (\neg Q \to P)]$ não é tautologia.

b.3) $(P \to Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

Supondo que $(P \to Q) \to (P \leftrightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (P \leftrightarrow Q)] = F$. Há assim duas possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(P \leftrightarrow Q) = F$, onde $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ e vice-versa.

1° Caso: $(P \to Q) \to (P \leftrightarrow Q)$

T $\boxed{T}$ F   F   T F F

↳ absurdo!

2° Caso: $(P \to Q) \to (P \leftrightarrow Q)$

F T T   F   F F T

Nesse encontramos apenas um absurdo, podemos concluir que a $I[(P \to Q) \to (P \leftrightarrow Q)]$ é uma tautologia.

b.4) $(P \to Q) \vDash (P \to Q)$

Supondo que $(P \to Q) \to (P \to Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (P \to Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(P \to Q)] = F$.

Vejamos: $(P \to Q) \to (P \to Q)$

T $\boxed{T}$ F F   T F F

↳ absurdo!

Temos um absurdo, pois por definição para que $I[(P \to Q)] = T$ a $I[P] = F$ e/ou $I[Q] = T$ ou ambas proposições serem verdadeiras.

Nesse caso encontramos um absurdo, o que podemos concluir que a $I[(P \to Q) \to (P \to Q)]$ é uma tautologia.

b.5) $(P \to Q) \models (\neg P \to \neg Q)$

Supondo que $(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(\neg P \to \neg Q)] = F$

Vejamos: $(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$

F T T F   T F F

Não existe absurdo, logo podemos concluir que a $I[(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)] = F$, logo não é tautologia como havíamos esperado.

b.6) $(P \to Q) \models (P \land \neg Q)$

Suponha que $(P \to Q) \to (P \land \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \to Q) \to (P \land \neg Q)] = F$. Há assim uma possibilidade, $I[(P \to Q)] = T$ e $I[(P \land \neg Q)] = F$.

Vejamos: $(P \to Q) \to (P \land \neg Q)$

T T T F T F F

F   F   F   T

F   T   F   F

Não existe absurdo, logo podemos concluir que $I[(P \to Q) \to (P \land \neg Q)] = F$, como havíamos esperado, logo não é tautologia.

c) $(P \lor Q)$ é tautologia.

c.1) $(P \lor Q) \models (\neg P \lor Q)$

Supondo que $(P \lor Q) \to (\neg P \lor Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \lor Q) \to (\neg P \lor Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \lor Q)] = T$ e $I[(\neg P \lor Q)] = F$.

Vejamos: $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

T T F F F F F

Não existe absurdo, logo podemos concluir que $I[(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)] = F$ como havíamos previsto, ou seja, não é tautologia.

c.2) $(P \vee Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P)$

Suponha que $(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \vee Q)] = T$ e $I[(\neg Q \rightarrow P)] = F$.

Vejamos: $(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

F $\boxed{T}$ F F T F F

↳ absurdo!

Temos um absurdo, pois por definição para que $I[(P \vee Q)] = T$ precisa de pelo menos uma das proposicoes ter valor logico T. O que não encontramos nesse caso, o que podemos concluir que a $I[(P \vee Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)]$ é uma tautologia.

c.3) $(P \vee Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

Suponha que $(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)] = F$. Há duas possibilidade, onde $I[P \vee Q] = T$ e $I[P \leftrightarrow Q] = F$, sendo que $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ ou $I[P] = F$ e $I[Q] = T$.

1° Caso: $(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

T T F F T F F

2° Caso: $(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

F T T F F F T

Note que não encontramos absurdo, logo podemos concluir que $I[(P \vee Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)] = F$ como havíamos sugerido, ou seja, não é tautologia.

c.4) $(P \vee Q) \models (P \to Q)$

Suponha que $(P \vee Q) \to (P \to Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \vee Q) \to (P \to Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \vee Q)] = T$ e $I[(P \to Q)] = F$.

Vejamos: $(P \vee Q) \to (P \to Q)$

T T F F T F F

Note que não encontramos absurdo, logo podemos concluir que $I[(P \vee Q) \to (P \to Q) = F$ como havíamos sugerido, ou seja, não é tautologia.

c.5) $(P \vee Q) \models (\neg P \to \neg Q)$

Suponha que $(P \vee Q) \to (\neg P \to \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \vee Q) \to (\neg P \to \neg Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \vee Q)] = T$ e $I[(\neg P \to \neg Q)] = F$

Vejamos: $(P \vee Q) \to (\neg P \to \neg Q)$

F T T F T F F

Note que não encontramos absurdo, logo podemos concluir que $I[(P \vee Q) \to (\neg P \to \neg Q) = F$ como havíamos sugerido, ou seja, não é tautologia.

c.6) $(P \vee Q) \models (P \wedge \neg Q)$

Suponha que $(P \vee Q) \to (P \wedge \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \vee Q) \to (P \wedge \neg Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \vee Q)] = T$ e $I[(P \wedge \neg Q)] = F$

Vejamos: $(P \vee Q) \to (P \wedge \neg Q)$

T T T F T F F

absurdo! F $\boxed{T}$ F F F T

F T T F F F

Temos um absurdo, pois $\exists I \mid I[P \vee Q] = F$ como esperavamos, logo podemos concluir que não é tautologia.

d) $(P \leftrightarrow Q)$ é tautologia.

d.1) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \vee Q)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(\neg P \vee Q)] = F$.

1º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

T T F F F F F

2º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

F T T F T $\boxed{F}$ T

absurdo!

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, logo não é tautologia.

d.2) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg Q \rightarrow P)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(\neg Q \rightarrow P)] = F$.

1· Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

T T F F T $\boxed{F}$ T

absurdo!

2· Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

F T T F F F F

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, logo não é tautologia.

d.3) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \leftrightarrow Q)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(\neg Q \rightarrow P)] = F$, sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa.

1· Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

T T F F T $\boxed{F}$ T

absurdo!

2· Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow P)$

F T T F F F F

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, Logo não é tautologia.

d.4) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \rightarrow Q)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(P \rightarrow Q)] = F$.

1º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

T T F F T F F

2º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

F T T F F $\boxed{F}$ T

absurdo!

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, Logo não é tautologia.

d.5) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (\neg P \rightarrow \neg Q)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(\neg P \rightarrow \neg Q)] = F$.

1º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

T T F F F F T

2º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

F T T F T $\boxed{F}$ F

absurdo!

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, Logo não é tautologia.

d.6) $(P \leftrightarrow Q) \vDash (P \wedge \neg Q)$

Supondo que $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$ não é tautologia, ou seja, $\exists I \mid I[(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)] = F$. Há uma possibilidade, $I[(P \leftrightarrow Q)] = T$ sendo que $I[P]=T$ e $I[Q]=F$ e vice-versa, $I[(P \wedge \neg Q)] = F$.

1º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \land \neg Q)$

T T F F T $\boxed{F}$ T

↳ absurdo

2º Caso: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \land \neg Q)$

F T T F F F F

Existe um absurdo, logo podemos concluir que existe uma interpretação em que a saída é falso, como havíamos esperado, logo não é tautologia.

(5) a) $\neg(P \rightarrow Q)$

b) $\neg(P \oplus Q)$

c) $\neg((P \land Q) \oplus R)$

d) $\neg(\neg P \oplus \neg Q)$

e) $\neg P \rightarrow \neg Q \land \neg R$

(6) $J[P] = T$.

a) $(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

Como sabemos a $I[(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$ e $I[P] = T$, então a $I[P \rightarrow Q] = T$ independentemente da $I[Q]$.

Não é possível precisar o valor verdade de $J[Q]$.

b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

T T T T T

Como sabemos a $I[P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))] = T$. Sendo $I[P] = T$, então a $I[((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))] = T$. Neste caso não é possível precisar o valor verdade de $J[Q]$.

7) a) $(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$ De Morgan sobre $\neg(\neg p \vee q)$

$(p \wedge (p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q)$ Prop. Associativa sobre $p \wedge (p \wedge \neg q)$

$((p \wedge p) \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ Idempontência sobre $p \wedge p$

$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ Distributiva

$p \wedge (\neg q \vee q)$ Prop. Complementar sobre $\neg q \vee q$

$p \wedge true$ Prop. Identidade

p

b) $((\neg(p \wedge \neg q)) \wedge (\neg(q \wedge \neg p)))$

$((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$ De Morgan sobre $\neg(p \wedge \neg q)$ e $\neg(q \wedge \neg p)$

$((p \to q) \wedge (q \to p))$ Prop. Substituição sobre $(\neg p \vee q)$ e $(\neg q \vee p)$

$(p \leftrightarrow q)$ Prop. Substituição sobre $(p \to q) \wedge (q \to p)$

8) a) $(R \to P) \wedge (R \to Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \to \neg R$

$(\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q) \equiv$ Prop. Substituição sobre $(R \to P)$ e $(R \to Q)$

$\neg R \vee (P \wedge Q) \equiv$ Distributiva sobre $(\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q)$

$(P \wedge Q) \vee \neg R \equiv$ Prop. Associativa sobre $\neg R \vee (P \wedge Q)$

$(\neg P \vee \neg Q) \to \neg R \equiv$ Prop. substituição sobre $(P \wedge Q) \vee \neg R$

b) $(\neg(P \to Q) \vee S) \wedge \neg P \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$

$(\neg(\neg P \vee Q) \vee S) \wedge \neg P \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$ Prop. Subst. $P \to Q$

$((P \wedge \neg Q) \vee S) \wedge \neg P \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$ De Morgan $\neg(\neg P \vee Q)$

$((P \vee S) \wedge (\neg Q \vee S)) \wedge \neg P \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$ Dist. $(P \wedge Q) \vee S$

$((P \vee S) \wedge (Q \to S)) \wedge \neg P \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$ Prop. subst. $\neg Q \vee S$

$(P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P) \equiv (P \vee S) \wedge ((Q \to S) \wedge \neg P)$ Prop. Comuta.