UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Faculdade de Computação
Avenida João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1B - Bairro Santa Mônica, Uberlândia/MG, CEP 38400-902
Telefone: +55 (34) 3239-4218 - www.facom.ufu.br - cocom@ufu.br

Bacharelado em Ciência da Computação
Bacharelado em Sistemas de Informação
Disciplina: Lógica para Computação - LC [GBC016/GSI005]
Prof. Me. Claudiney R. Tinoco

Terceira Lista de Exercícios

- Prove que os alfabetos {¬, ∧}, {¬, ∨}, {nand} e {nor} são completos.

- Dada uma fórmula E, obter uma fórmula G, equivalente a E, contendo apenas os conectivos {¬,∨}
  - E = (P ↔ Q) ∨ (R → S)

- Dada uma fórmula H, obter uma fórmula G, equivalente a H, contendo apenas o conectivo *nand* e os símbolos de H
  - H = P ∧ (R → S)

- Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras, justificando
  - (¬P) pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo ∨ e P
  - (P ∨ Q) pode ser expressa equivalentemente usando apenas o conectivo →, P e Q

- Obtenha a FND e FNC de
  - $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

P	Q	R	$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
F	F	F	F

Dada a fórmula

$H = ((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \wedge \neg P)$

- Construa a fórmula equivalente utilizando apenas os conectivos do conjunto $\{\neg, \vee\}$
- Gere as fórmulas equivalentes na FND e FNC

- Considere as fórmulas

$$H = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (R \wedge P)$$
$$G = (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

Determine as FND's e FNC's associadas a H e G.

---

1. Refaça as provas por indução vistas em sala de aula.
2. Demonstre por indução matemática que
   $\forall$ n, $(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n+1)/2$.
3. Demonstre por indução matemática que o número de parênteses contidos em uma fórmula H é um número par (para cada "abre" parênteses há um "fecha" parênteses). **Obs.:** Assuma a parentetização completa, isto é, o correto não é $\neg G$, mas sim $(\neg G)$. Além disso, assuma o número zero como par.

- Utilizando um sistema axiomático sem hipóteses e apenas com o Modus Ponens, prove $\vdash (P \vee \neg P)$.

- A partir das hipóteses abaixo e utilizando apenas o Modus Ponens (MP) como regra de inferência, prove P (faça uma prova por absurdo).

  $\beta = \{ \neg S \rightarrow P, \quad R \vee \neg P, \quad \neg S\}$

- Prove que $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$

- Prove o teorema abaixo:

Hipóteses:	*hoje não é domingo ou Manuel está feliz.* *Se Manuel está feliz, ele é amoroso.* *Maria está feliz ou Manuel não é amoroso.* *Hoje é domingo.*
Regra de Inferência:	*Modus Ponens*
Teorema:	*Maria está feliz.*

- Verifique a validade do argumento abaixo:

"Se chover hoje, então hoje nós não teremos churrasco. Se não tivermos churrasco hoje, então teremos churrasco amanhã. Portanto, se chover hoje, então nós teremos churrasco amanhã."

- Mostre que as hipóteses "Se você me enviar um e-mail, eu termino de escrever o programa", "Se você não me enviar um e-mail, então eu vou dormir cedo", e "Se eu for dormir cedo, então eu vou acordar revigorado.", levam à conclusão: "Se eu não terminar de escrever o programa, então eu vou acordar revigorado."

Prove que os alfabetos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{nand\}$ e $\{nor\}$ são completos.

alfabeto $\{\neg, \wedge\}$ "é completo!"

* $\neg P \equiv \neg P$
* $(P \wedge Q) \equiv (P \wedge Q)$
* $(P \vee Q) \equiv \neg\neg(P \vee Q)$ → Dupla Negação
  $\equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ → Lei de Morgan
* $(P \to Q) \equiv \neg P \vee Q$ → Prop. de Substituição
  $\equiv \neg\neg(\neg P \vee Q)$ → Dupla Negação
  $\equiv \neg(P \wedge \neg Q)$ → Lei de Morgan
* $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ → Prop. de Substituição
  $\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ → Prop. de Substituição
  $\equiv \neg\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg(\neg Q \vee P)$ → Lei de Morgan
  $\equiv \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$ → Lei de Morgan

alfabeto $\{\neg, \vee\}$ "é completo!"

* $\neg P \equiv \neg P$
* $(P \wedge Q) \equiv \neg\neg(P \wedge Q)$ → Dupla Negação
  $\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$ → Lei de Morgan
* $(P \vee Q) \equiv (P \vee Q)$
* $(P \to Q) \equiv \neg P \vee Q$ → Prop. de substituição
* $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ → Prop. de substituição
  $\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$ → Prop. de substituição
  $\equiv \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$ → Lei de Morgan
  $\equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$ → Lei de Morgan

alfabeto $\{nand\}$ "é completo!"

* $\neg P \equiv P \text{ nand } P$
* $(P \vee Q) \equiv \neg\neg(P \vee Q)$
  $\equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
  $\equiv ((P \text{ nand } P) \text{ nand } (Q \text{ nand } Q))$

* $P \wedge Q \equiv (P \text{ nand } P) \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)$
* $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$

  $\equiv \neg\neg(\neg P \vee Q)$

  $\equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

  $\equiv (P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q))$

$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

$\equiv \neg\neg(\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg(\neg Q \vee P)$

$\equiv \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$

$\equiv (P \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)) \text{ nand } (Q \text{ nand } (P \text{ nand } P))$

alfabeto $\{\text{nor}\}$ é completo!

* $\neg P \equiv P \text{ nor } P$
* $P \wedge Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q)$

  $\equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

  $\equiv \neg((P \text{ nor } P) \vee (Q \text{ nor } Q))$

  $\equiv (P \text{ nor } P) \text{ nor } (Q \text{ nor } Q)$
* $P \vee Q \equiv (P \text{ nor } P) \text{ nor } (Q \text{ nor } Q)$
* $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$

  $\equiv P \text{ nor } Q$
* $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

  $\equiv \neg\neg((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

  $\equiv \neg(\neg(P \to Q) \vee \neg(Q \to P))$

  $\equiv \neg(P \to Q) \text{ nor } \neg(Q \to P)$

  $\equiv \neg(\neg P \vee Q) \text{ nor } \neg(\neg Q \vee P)$

  $\equiv (\neg P \text{ nor } Q) \text{ nor } (\neg Q \text{ nor } P)$

  $\equiv ((P \text{ nor } P) \text{ nor } Q) \text{ nor } ((Q \text{ nor } Q) \text{ nor } P))$

Dada uma fórmula E, obter uma fórmula G, equivalente a E, contendo apenas os conectivos $\{\neg, \vee\}$

$E = (P \leftrightarrow Q) \vee (R \rightarrow S)$

$\equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \vee (\neg R \vee Q)$ → Prop. de Substituição

$\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee Q)$ → Prop. de Substituição

$\equiv \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee Q)$ → Lei de Morgan

$\equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)) \vee (\neg R \vee Q)$ → Lei de Morgan

Dada uma fórmula H, obter uma fórmula G, equivalente a H, contendo apenas o conectivo nand e os símbolos de H.

$H = P \wedge (R \rightarrow S) \equiv (P \wedge (\neg R \vee S))$

$\equiv \neg\neg(P \wedge \neg\neg(\neg R \vee S))$

$\equiv \neg\neg(P \wedge \neg(R \wedge \neg S))$

$\equiv \neg(P \text{ nand } (R \text{ nand } \neg S))$

$\equiv \neg(P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S))$

$\equiv (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S)) \text{ nand } (P \text{ nand } (R \text{ nand } (S \text{ nand } S))$

Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras, justificando.

* $(\neg P)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\vee$ e P.

  não é possível!

* $(P \vee Q)$ pode ser expressa equivalentemente utilizando apenas o conectivo $\rightarrow$, P e Q

  É possível! $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$

Obtenha a FND e FNC de $\neg(P \land Q) \to R$

	P	Q	R	$\neg(P \land Q) \to R$
1	T	T	T	T
2	T	T	F	T
3	T	F	T	T
4	F	T	T	T
5	F	F	T	T
6	F	T	F	F
7	T	F	F	F
8	F	F	F	F

$$\left.\begin{array}{l} \text{linha } 1 = (P \land Q \land R) \\ \text{linha } 2 = (P \land Q \land \neg R) \\ \text{linha } 3 = (P \land \neg Q \land R) \\ \text{linha } 4 = (\neg P \land Q \land R) \\ \text{linha } 5 = (\neg P \land \neg Q \land R) \end{array}\right\} \text{FND}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{linha } 6 = (P \lor \neg Q \lor R) \\ \text{linha } 7 = (\neg P \lor Q \lor R) \\ \text{linha } 8 = (P \lor Q \lor R) \end{array}\right\} \text{FNC}$$

$\text{FND} = (P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$

$\text{FNC} = (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (P \lor Q \lor R)$

Dada a fórmula:

$H = ((P \to Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \land \neg P)$

$= (P \to Q)$ equivale $\neg P \lor Q$

$= (\neg Q \leftrightarrow R)$ equivale $(\neg Q \to R) \land (R \to \neg Q)$

$= (\neg Q \to R) \land (R \to \neg Q)$ equivale $(Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q)$

$= (Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q)$ equivale $\neg\neg((Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q))$

$= \neg\neg((Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg Q))$ equivale $\neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))$

$= (\neg R \land \neg P)$ equivale $\neg\neg(\neg R \land \neg P)$

$= \neg\neg(\neg R \land \neg P)$ equivale $\neg(R \lor P)$

$= (P \to Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)$ equivale $(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))$

$= (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))$ equivale $\neg\neg(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))$

$= \neg\neg(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q))$ equivale $\neg(\neg(\neg P \lor Q) \lor \neg(\neg(\neg(Q \lor R) \lor \neg(\neg R \lor \neg Q)))$

$H = ((P \to Q) \land (\neg Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (\neg R \land \neg P)$

P	Q	R	¬P	¬Q	¬R	P→Q	¬Q↔R	∧	¬R∧¬P	↔ Saída
T	T	T	F	F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F	T	F

FND: $(P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R)$

FNC: $(P \lor Q \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor \neg R)$

Considere as fórmulas.

$H = (P \to Q) \leftrightarrow (R \land P)$

	P	Q	R	$(P \to Q) \leftrightarrow (R \land P)$
1	T	T	T	T
2	T	T	F	F
3	T	F	T	F
4	T	F	F	T
5	F	T	T	F
6	F	T	F	F
7	F	F	T	F
8	F	F	F	F

FND

linha 1: $(P \land Q \land R)$

linha 4: $(P \land \neg Q \land \neg R)$

FNC

linha 2: $(\neg P \lor \neg Q \lor R)$

3: $(\neg P \lor Q \lor \neg R)$

5: $(P \lor \neg Q \lor \neg R)$

6: $(P \lor \neg Q \lor R)$

7: $(P \lor Q \lor \neg R)$

8: $(P \lor Q \lor R)$

FND: $((P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R))$

FNC: $((\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge$
$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R))$

$G = (P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \vee Q$	Saída
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

FND: $P \wedge Q$; $P \wedge \neg Q$; $\neg P \wedge Q$

FNC: $\neg P \vee \neg Q$

FND: $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

FNC: $\neg P \vee \neg Q$

Refaça as provas por indução vistas em sala de aula.

Prova 1:

Para todo número natural n, tal que $n \geq 5$, demonstre pelo P.I. que $2^n > n^2$.

Caso base:

para $n = 5$, como $2^5 > 5^2$ $(32 > 25)$
$A(5)$ é verdade.

Passo Indutivo:

Se $A(K) = T$, para $5 \leq K \leq n$, então $A(K+1) = T$?

Hipótese:

O antecedente da aplicação é verdade, i.e., para $n \geq 5$, $2^K > K^2$.

Devemos provar que $2^{K+1} > (K+1)^2$ é verdade

Manipulando o consequente:

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$
$$2^k \cdot 2 > (k+1)^2$$

Pela Hipótese, $2^k > k^2$. Então $2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$, logo $2 \cdot 2^k > k^2 + k^2$.
Como $k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1$. Portanto, por transitividade,
$2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1 \Longrightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$

Prova 2:

Suponha duas fórmulas, H e G.
Logo: $\left.\begin{array}{l} \beta(H) = 2 \cdot \mathcal{L}(H) \text{ e} \\ \beta(G) = 2 \cdot \mathcal{L}(G) \end{array}\right\}$ Hipótese

Um próximo passo para o crescimento da fórmula, seria conectar H e G, ou negar G.

1º Caso: $\beta((\neg G)) = 2 \cdot \mathcal{L}((\neg G))$?

$$\beta((\neg G)) = \beta(G) + 2$$
$$\mathcal{L}((\neg G)) = \mathcal{L}(G) + 1$$

$$\begin{aligned} \beta((\neg G)) &= \beta(G) + 2 \\ &= 2\mathcal{L}(G) + 2 \\ &= 2 \cdot (\mathcal{L}((\neg G)) + 1) \\ &= 2 \cdot \mathcal{L}((\neg G)) \end{aligned}$$

$$\beta((H \subset G)) = \beta(H) + \beta(G) + 2$$
$$\mathcal{L}((H \subset G)) = \mathcal{L}(H) + \mathcal{L}(G) + 1$$

$$\beta((H \subset G)) = \beta(H) + \beta(G) + 2$$
$$\beta((H \subset G)) = 2\mathcal{L}(H) + 2\mathcal{L}(G) + 2$$
$$\beta((H \subset G)) = 2(\mathcal{L}(H) + \mathcal{L}(G) + 1)$$
$$\beta((H \subset G)) = 2\mathcal{L}((H \subset G))$$

Demonstre por indução matemática que

$\forall n, (1+2+3+\dots+n) = n(n+1)/2.$

Caso base:

$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ é verdadeiro

Caso por indução:

Hipotese $(1+2+3+\dots+n) = n(n+1)/2$

O consequente da implicação pode ser escrito

como $(1+2+3+\dots+n+(n+1)) = (n+1)(n+2)/2$

Pela hipótese, $1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$

Então $1+2+3+\dots+n+n+1 = n(n+1)/2 + n(n+1)$

$= n(n+1)+2n+2/2 = n^2+n+2n+2/2$

$= (n+1)(n+2)/2,$

Logo: $A(n+1)$ é verdade e a hipotese é verdade.

Prove o teorema abaixo

P = Chove hoje

Q = hoje teremos chuva

R = churrasco amanha

$\beta = \{P \Rightarrow \neg Q, \neg Q \Rightarrow R\} \vdash P \rightarrow R$

(1) $P \rightarrow \neg Q$

(2) $\neg Q \rightarrow R$

aplicando o silogismo em (1) e (2) temos

(3) $P \rightarrow R$

logo $\beta \vdash (P \rightarrow R)$