Intégrales elliptiques

Lou Schetter et Florian Michel

Année 2022/2023

Table des matières

Chapitre 1

Présentation des intégrales elliptiques

1.1 Présentation historique

Les intégrales elliptiques sont nées de la volonté de calculer la longueur d'un arc de l'ellipse. Ces recherches ont commencé avec Jakob Bernoulli avec la Lemniscate de Bernoulli.

En 1750, l'aristocrate italien Fagnano réalise des travaux mathématiques sur lalemniscate de Bernoulli, il parvient à partager un arc de cette courbe en n arcs à l'aide d'une règle. Il parvient également à calculer l'aire définie par cette courbe. Mais le calcul de la longueur pose problème : malgré plusieurs résultats remarquables, Fagnano butte sur le calcul de ces intégrales.

En 1784, Lagrange, qui à l'époque est le plus grand mathématicien d'Europe définit les intégrales elliptiques : on appelle intégrale elliptique une intégrale de la forme : $\int R(x,y)dx$ (où R est une fraction rationnelle en x et y et où y = P(x) où P est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple).

En 1793, Legendre parvient à montrer que les intégrales elliptiques peuvent se ramener à l'une des 3 formes canoniques suivantes :

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

$$\int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}du$$

$$\int_0^u \frac{du}{(1+n\sin^2 u)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

En 1816, Gauss démontre la formule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

avec $M(a,b)$ la moyenne arithmético-géometrique.

En 1827, Jacobi défini des fonctions qui feront désormais partie du corpus mathématique universel. Il travaillera alors avec les intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, ce qui le conduira à définir les fonctions thêta de Jacobi.

En 1833, Liouville parvient à montrer que les intégrales elliptiques ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

1.2 Définition d'une intégrale elliptique

Les intégrales elliptiques interviennent dans de nombreux problèmes de physique mathématique : comme par exemple, le calcul de la période d'une pendule aux grandes amplitudes et plus généralement les formes d'équilibre ellipsoïdales des corps en rotation autour d'un axe.

Il y a plusieurs sortes d'intégrales elliptiques, il y a les intégrales elliptiques de première espèce, de seconde espèce et de troisième espèce.

— Les intégrales elliptiques de première espèce sont celles qui interviennent dans le calcul de la longueur d'un arc de la lemniscate de Bernoulli, et sont de la forme :

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

— Les intégrales elliptiques de la deuxième espèce sont celles qui interviennent dans le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse sont celles de la forme :

$$\int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}du$$

— Les intégrales elliptiques de la troisième espèce sont de la forme :

$$\int_0^u \frac{du}{(1+n\sin^2 u)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

Dans la suite nous nous intéresserons seulement aux intégrales elliptiques de la première espèce.

Chapitre 2

Théorème

2.1 Explication de la moyenne arithmético-géométrique

On s'intéresse à la moyenne arithmético-géométrique qui est essentielle pour comprendre et montrer le théorème suivant :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2cos^2t + b^2sin^2t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

La moyenne arithmético-géométrique de deux réels positifs correspond à la limite de deux suites adjacentes qui satisfait une relation de récurrence qui reprend les formules de moyenne arithmétique et géométrique.

On peut expliquer cela plus simplement : soit deux suites adjacentes a_n, b_n, l'une croissante et l'autre décroissante telles que leur différence converge vers 0 :

$$lim(a_n - b_n) = 0$$

La moyenne arithmético-géométrique est définie comme :

$$M(a_n, b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Ces deux suites sont définies par :

—

$$a_0 = a, b_0 = b$$

—

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

—

$$a_n \geq b_n \geq 0$$

De ces propriétés, on peut ensuite trouver deux expressions qui nous seront utiles pour la démonstration du théorème ci-dessous :

$$\begin{cases} a_n b_n = b_{n+1}^2 \\ a_n^2 + b_n^2 = (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n = 4a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 \\ (a_n - b_n)^2 = (a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n = 4a_{n+1}^2 - 4b_{n+1}^2 \end{cases}$$

2.2 Explication du théorème

Le théorème que nous allons essayer d'expliquer simplement est celui demontré par Gauss en 1816 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2cos^2x + b^2sin^2x}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

On note l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2cos^2t + b^2sin^2t}}$$

On cherche dans un premier temps à montrer par récurrence $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ pour tout n entier naturel, avec a_n et b_n deux suites positives adjacentes qui vérifient les propriétés énoncées ci-dessus, puis dans un second temps on va donc montrer que cette intégrale peut être calculée avec la moyenne arithmético-géométrique telle que :

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

2.2.1 Changement de variable :

Avant de commencer notre récurrence nous allons effectuer un changement de variable pour simplifier la démonstration :

Soient a_n, b_n deux paramètres positifs, et soit f la fonction :

$$f(x) = \frac{2a_nx}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)x^2}$$

— On a donc sa dérivée :

$$f'(x) = 2a_n\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)x^2}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)x^2)^2}$$

— Calculons $f(0)$ et $f(1)$:

$$f(0) = \frac{2a_n.0}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)0^2} = 0$$

$$f(1) = \frac{2a_n.1}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)1^2} = \frac{2a_n}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)} = 1$$

— Étudions les variations de f sur l'intervalle [0, 1] :
On sait que a_n, b_n sont des paramètres positifs et que $a_n \geq b_n$, on a donc : $f'(x)$ positive, d'où $f(x)$ croissante.

Ainsi, on peut faire le changement de variable : $t = \arcsin(f(\sin u))$ d'où $\sin t = f(\sin u)$, car avec les propriétés précédentes on sait que le t est défini pour tout u appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$.

On va maintenant réexprimer notre intégrale avec le changement de variable :

1. On exprime $\sqrt{b^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}$ en fonction de u :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n^2 \sin^2 t = b_n^2 (\frac{2a_n \sin u}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin u^2})^2 \\ a_n^2 \cos^2 t = a_n^2(1-sin^2 t) = a_n^2 - a_n^2 sin^2 t = a_n^2 - a_n^2(\frac{2a_n \sin u}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u})^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sqrt{b_n^2 \sin^2 t + a_n^2 \cos^2 t} = a_n \frac{((a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin^2 u)}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u)}$$

2. On exprime dt en fonction de du :

$$\begin{aligned} & \sin t = f(\sin u) \\ \Rightarrow & \frac{d(\sin t)}{du} = \frac{d(f(\sin u))}{du} \\ \Rightarrow & \frac{d(\sin t)}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{d(f(\sin u))}{d\sin u}\frac{d(\sin u)}{du} \\ \Rightarrow & \cos t \frac{dt}{du} = \cos u \frac{d(\sin u)}{du} = \cos u . 2a_n \frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin^2 u}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u)^2} \\ \Rightarrow & dt = du \frac{\cos u}{\cos t} 2a_n \frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin^2 u}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u)^2} \end{aligned}$$

3. On regarde les bornes de l'intégrale. On suppose que ces bornes restent inchangées au vu de ce qu'on veut prouver, montrons le avec notre changement de variable $\sin t = f(\sin u)$:
   — Borne inférieure :
   $$\sin t = \sin 0 = 0$$
   $$f(\sin u) = f(\sin 0) = f(0) = 0$$
   On a bien la borne inférieure que reste inchangée.
   — Borne supérieure :
   $$\sin t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$
   $$f(\sin u) = f(\sin \frac{\pi}{2}) = f(1) = 1$$
   On a bien la borne supérieure qui reste elle aussi inchangée.

4. On obtient donc :

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 cos^2 x + b^2 sin^2 x}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \frac{\cos u}{\cos t} 2a_n \frac{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u}{a_n((a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin^2 u)} \frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin^2 u}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u)^2} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u} \frac{\cos u}{\cos t} du \\ & avec \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\frac{((a_n+b_n)-(a_n-b_n)\sin u^2)^2 - 4a_n^2 \sin^2 u}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin u^2)^2}} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u} \frac{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin u^2}{\sqrt{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin u^2)^2 - 4a_n^2 \sin^2 u}} du \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin u^2)^2 - 4a_n^2 \sin^2 u}} \cos u du \end{aligned}$$

Après ce changement de variable, nous pouvons faire notre raisonnement par récurrence.

2.2.2 Démonstration par récurrence :

Hypothèse de récurrence $P(n)$: "$I(a,b) = I(a_n, b_n)$ pour tout n entier naturel."

Initialisation : Soit $n = 0$, montrons que $I(a,b) = I(a_0, b_0)$:
On sait d'après les propriétés des suites que : $a = a_0$ et $b = b_0$ on a donc bien $I(a,b) = I(a_0, b_0)$. Donc $P(0)$ est vrai.

Hérédité : On suppose de $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ jusqu'à un certain rang n, et on veut maintenant montrer que $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$.

D'après les propriétés des deux suites a_n et b_n, on a :

$$a_n^2 + b_n^2 = 4a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2$$

et

$$(a_n - b_n)^2 = 4a_{n+1}^2 - 4b_{n+1}^2$$

On simplifie le dénominateur de $I(a_n, b_n)$:

$$\begin{aligned}((a_n + b_n) + (a_n - b_n)\sin u^2)^2 - 4a_n^2 \sin^2 u &= 4a_{n+1}^2(1 - 2\sin^2 u + \sin^4 u) + 4b_1^2 \sin^2 u(1 - sin^2 u) \\ &= 4(a_{n+1}^2 \cos^2 u + b_{n+1}^2 \sin^2 u)\cos^2 u)\end{aligned}$$

On remplace dans l'expression de $I(a_n, b_n)$ trouvée après le changement de variable :

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4(a_{n+1}^2 \cos^2 u + b_{n+1}^2 \sin^2 u)\cos^2 u}} \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{a_{n+1}^2 cos^2 u + b_{n+1}^2 sin^2 u}} = I(a_{n+1}, b_{n+1})$$

On a bien montré que $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$, donc $P(n+1)$ est vrai.

Conclusion : $P(n)$ est vrai pour tout n entier naturel, donc $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ pour tout n entier naturel.

2.2.3 Calcul de l'intégrale :

On va maintenant montrer que :

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

On passe à la limite de l'intégrale $I(a,b)$:

— Comme $I(a,b) = I(a_n, b_n)$ pour tout n entier naturel, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} I(a_n, b_n) = I(a,b)$$

— D'après la théorème de la convergence monotone on a la limite de l'intégrale qui est égale à l'intégrale de la limite, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2cos^2x+b^2sin^2x}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} \frac{dt}{\sqrt{a^2cos^2x+b^2sin^2x}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(M(a,b))^2\cos^2 t+(M(a,b))^2\sin^2 t}}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{M(a,b)}\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{M(a,b)}dt
\end{aligned}$$

On résout ensuite l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{M(a,b)}dt &= [\frac{t}{M(a,b)}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}}{M(a,b)} - \frac{0}{M(a,b)} \\
&= \frac{\pi}{2M(a,b)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien :

$$I(a,b) = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

2.3 Application à la Lemniscate de Bernoulli

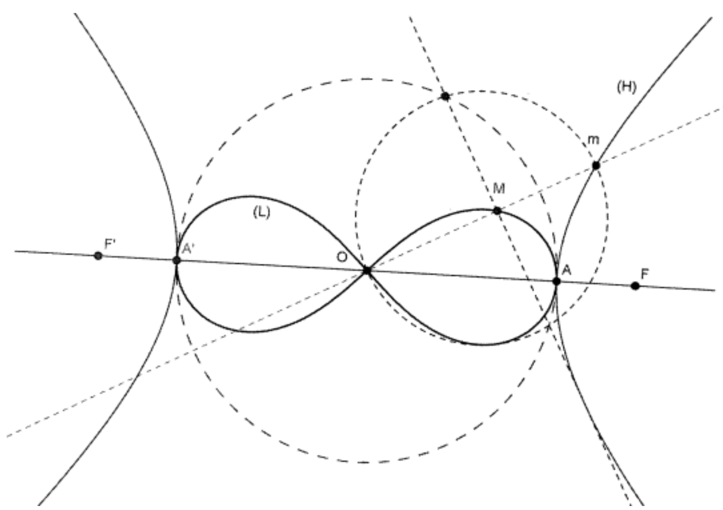

FIGURE 2.1 – Lemniscate de Bernoulli

L'équation de la lemniscate de Bernoulli est, en coordonées carthésiennes :

$$(x^2+y^2)+y^2-x^2=0$$

Cependant, ce qui va plutôt nous intéresser ici est l'équation en coordonnées polaires qui est :

$$r^2 = \cos 2\theta$$

On note la longueur d'arc s et sa differentielle ds. On a admet que :

$$ds^2 = dr^2 + d\theta^2 r^2$$

Ici, on va calculer :

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds$$

On exprime ds en fonction de $d\theta$:

$$ds^2 = dr^2 + d\theta^2 r^2$$
$$\Rightarrow ds = \sqrt{(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2} d\theta$$

On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{dr}{d\theta}^2 + r^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

On fait le changement de variable $\cos 2\theta = \cos^2 \phi$:

—
$$\sqrt{\cos 2\theta} = \cos \phi$$

—
$$d\theta = \frac{d}{d\phi}(\frac{1}{2} \arccos(\cos^2 \phi)) d\phi = \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sin 2\theta} d\phi$$

— Borne inférieure :
$$\phi_{inf} = \arccos(\sqrt{\cos 2\theta_{inf}}) = \arccos(\sqrt{\cos 0}) = 0$$

— Borne supérieure :
$$\phi_{sup} = \arccos(\sqrt{\cos 2\theta_{sup}}) = \arccos(\sqrt{\cos 2\frac{\pi}{4}}) = \frac{\pi}{2}$$

On obtient par conséquent :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} d\phi$$

Ici, on peut facilement voir que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} d\phi$$

est de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 cos^2 t + b^2 sin^2 t}}$$

avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.

Ainsi, on a :

$$s = I(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2}, 1)}$$