Intégrales elliptiques

Mini projet mathématiques

Florian Michel et Lou Schetter

Année 2022/2023

Plan

Présentation des intégrales elliptiques

1 - Présentation historique

- 1750 : Fagnano parvient à partager un arc d'ellipse en n arcs.
- 1784 : Lagrange définit les intégrales elliptiques et montre qu'elles peuvent toutes se ramener à une des 3 formes canoniques.
- 1816 : Gauss démontre l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$
- 1827 : Jacobi définit les fonctions théta.
- 1833 : Louiville montre que ces intégrales ne peuvent pas s'écrire à l'aide de fonctions usuelles.

2 - Définition d'une intégrale elliptique

- Première espèce : $\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$
- Deuxième espèce : $\int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2 u}du$
- Troisième espèce :$\int_0^u \frac{du}{(1+n\sin^2 u)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$

Théorème

Le théorème que nous allons expliquer est : $I(a_n, b_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$

1 - Moyenne arithmético-géometrique

- La moyenne arithmético géometrique, notée $M(a_n, b_n)$, correspond à la limite de deux suites adjacentes : $M(a_n, b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$
- Les propriétés de ces suites sont :
  1. Deux suites positives a_n et b_n, l'une croissante, l'autre décroissante.
  2. $a_0 = a, b_0 = b$
  3. $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
  4. $a_n \geq b_n$

2 - Explication du théorème

On veut montrer que $I(a_n, b_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$

- Changement de variable
- Démonstration par récurrence : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 cos^2 t + b^2 sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_1^2 cos^2 t + b_1^2 sin^2 t}} = ... = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}}$, pour tour $n \in \mathbb{N}$
- Calcul de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$

2 - Explication du théorème - Changement de variable

On pose $f(x) = \frac{2a_n x}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)x^2}$ avec a_n, b_n deux paramètres positifs.
On fait le changement de variable : $t = \arcsin(f(\sin u)) \Rightarrow \sin t = f(\sin u)$

- $\sqrt{b_n^2 \sin^2 u + a_n^2 \cos^2 u} = a_n \frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)sin^2 u}{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)sin^2 u}$
- $dt = du \frac{\cos u}{\cos t} 2a_n \frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)sin^2 u}{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)sin^2 u)^2}$
- Les bornes de l'intégrales restent les mêmes

On obtient donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{((a_n+b_n)+(a_n-b_n)\sin^2 u)^2 - 4a_n^2 \sin^2 u}} \cos u du$

2 - Explication du théorème - Démonstration par récurrence

On veut montrer que $I(a, b) = I(a_n, b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Montrons que $I(a, b) = I(a_1, b_1)$

Hérédité : Supposons que $I(a, b) = I(a_1, b_1) = ... = I(a_n, b_n)$ est vrai jusqu'à un certain rang n, montrons que $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$

2 - Explication du théorème - Calcul de l'intégrale

On veut maintenant montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 cos^2 t + b_n^2 sin^2 t}} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$

3 - Application à la Lemniscate de Bernoulli

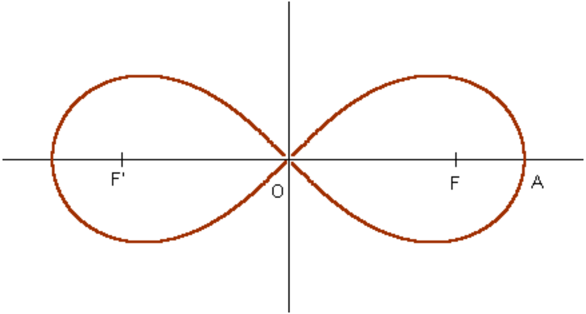

Figure: Lemniscate de Bernoulli

3 - Application à la Lemniscate de Bernoulli

Les coordonnées polaires sont : $r^2 = \cos 2\theta$
$\Rightarrow s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$
On fait le changement de variable : $\cos 2\theta = \cos^2 \phi$

- $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos \phi$
- $d\theta = \frac{d}{d\phi}(\frac{1}{2} \arccos\big(\cos^2 \phi\big))d\phi = \frac{\cos \phi \sin \phi}{\sin 2\theta} d\phi$
- La borne inferieur reste la même $\phi_{inf} = 0$, et la borne superieure devient $\phi_{sup} = \frac{\pi}{2}$

On obtient donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} d\phi = I(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}$