统计学与 R 语言

第 14 讲　描述性统计

张敬信

2022 年 4 月 9 日

哈尔滨商业大学

一. （样本）统计量

1. **数据位置的统计量**

(1) **均值** (Mean)

均值，度量数据分布的中心位置：

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(2) **中位数** (Median)

中位数，是位于最中间的那个数据，比中位数大和小的数据各占观测值的一半。先将数据从小到大排序为：$x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$，然后计算：

$$x_{0.5} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

中位数的优点是具有稳健性，即不受个别极端数据的影响。一般来说，正态分布的数据用均值描述，偏态分布的数据最好是用中位数描述。比如，人均工资有被平均了的感觉，中位数工资才是更合适的中间收入。

(3) **分位数** (Quantile)

中位数是 0.5 分位数，位于 0.5 位置的数。

0.25 分位数，称为下四分位数 (Q1), 是位于 0.25 那个位置的数，即比它小的数占比是 0.25, 比它大的数占比是 0.75.

0.75 分位数，称为上四分位数 (Q3).

更一般地，p **分位数**，是位于 p 位置的数，即比它小的数占比是 p, 比它大的数占比是 $1-p$. 或者说 np 的数比它小，$n(1-p)$ 的数比它大。

(4) **众数** (Mode)

众数，是观测值中出现次数最多的数，对应分布的最高峰。众数常用于分类数据，即出现频数最高的值。

R 实现：

- `mean(x)`: 计算数值向量 `x` 的均值
- `median(x)`: 计算数值向量 `x` 的中位数
- `quantile(x, p)`: 计算数值向量 `x` 的 `p` 分位数
- `rstatix::get_mode(x)`: 计算向量 `x` 的众数

2. 数据分散程度的统计量

(1) **极差** (Range)

极差，就是数据中的最大值和最小值之差。

(2) **四分位距** (Interquartile Range)

四分位距，是上下四分位数之差，即

$$IQR = Q3 - Q1$$

(3) **样本方差** (Variance)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|^2$$

注意，分母除的是 $n-1$, 这是为了保证用样本方差估计总体方差时，得到的是无偏估计。

这个 $n-1$ 也是自由度，在统计学中，几乎所有方法、所有统计量都会涉及自由度。**自由度**，是计算样本统计量时能够自由取值的数值的个数。

总体方差公式（除以 n）时，是 n 个样本自由地从总体里抽取。但是样本方差公式时多了一个约束条件，它们的和除以 n 必须等于样本均值 $\bar{x}$，所以自由度 n 减去 1 个约束条件对自由度的损失，等于 $n-1$.

不同统计方法的自由度都不一样，但基本原则是每估计 1 个参数，就需要消耗 1 个自由度。

以回归分析为例，若有 m 个自变量，则需要估计 $m+1$ 个参数（包含截距项），所以模型的 F 检验用到的自由度是 $n-(m+1)$. 这意味着只剩下 $n-(m+1)$ 个可以自由取值的数值用来估计模型误差。

(4) **样本标准差** (Standard Deviation)

样本方差的平方根即为标准差 s. 标准差的量纲与原数据一致。

(5) **变异系数** (Coefficient of Variation)

变异系数，是将标准差占均值的百分比，可用于比较不同量纲数据的分散性：

$$c_v = \frac{s}{\bar{x}} \quad (\%)$$

R 实现：

- `max(x)-min(x)`: 计算数值向量 `x` 的极差
- `IQR(x)`: 计算数值向量 `x` 的四分位距
- `var(x)`: 计算数值向量 `x` 的样本方差
- `sd(x)`: 计算数值向量 `x` 的样本标准差
- `100*sd(x)/mean(x)`: 计算数值向量 `x` 的变异系数

3. 数据分布形状的统计量

(1) **偏度** (Skewness)

偏度，刻画数据是否对称的指标：

$$SK = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^3$$

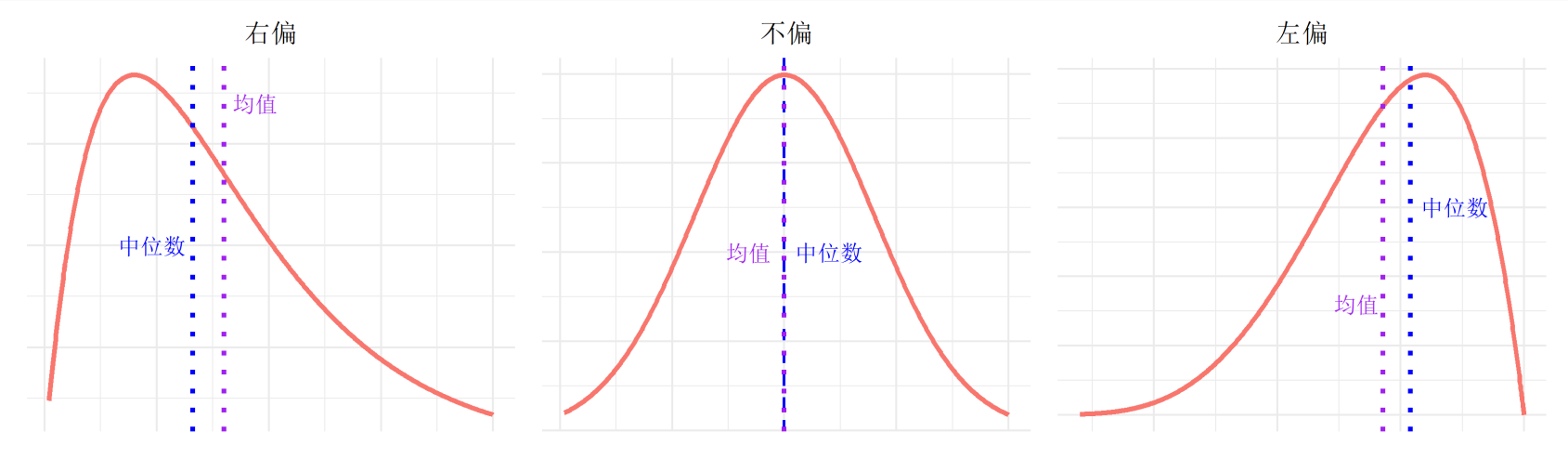


图 1: 数据的三种偏态

关于均值对称的数据不偏，其偏度为 0；右拖尾的数据是右偏，其偏度为正；左拖尾的数据是左偏，其偏度为负。

(2) **峰度** (Kurtosis)

峰度，刻画数据是否尖峰的指标：

$$K = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

峰度是以标准正态分布为基准，标准正态分布的峰度为 0; 尖峰薄尾的分布峰度为正；平峰厚尾的分布峰度为负。

`datawizard` 包提供了 `skewness()` 和 `kurtosis()` 函数分别计算偏度和峰度。

- 很多包提供了同时对多个变量进行（分组）描述汇总所有常见统计量的函数，其中 tidy 风格的是 rstatix::get_summary_stats() 和 dlookr::describe().

```
library(rstatix)
iris %>%
  group_by(Species) %>%
  get_summary_stats(type = "full")
#> # A tibble: 12 x 14
#>   Species variable      n   min   max median    q1    q3
#>   <fct>   <chr>     <dbl> <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl> <dbl> <
#> 1 setosa  Petal.Le~    50   1     1.9    1.5   1.4  1.58 0
#> 2 setosa  Petal.Wi~    50   0.1   0.6    0.2   0.2  0.3  0
#> 3 setosa  Sepal.Le~    50   4.3   5.8    5     4.8  5.2  0
#> # ... with 9 more rows, and 2 more variables: se <dbl>, ci
```

二. 统计图

描述统计是从不同方面对数据做了概要，想要进一步了解和探索数据，离不开绘制统计图。不同类型的数据，适用不同类型的统计图。

1. **分类数据的统计图**

(1) **条形图** (Histogram)

条形图是最常用的类别比较图，是用竖直（或水平）的条形展示分类变量的分布（频数），条形的高度代表频数。

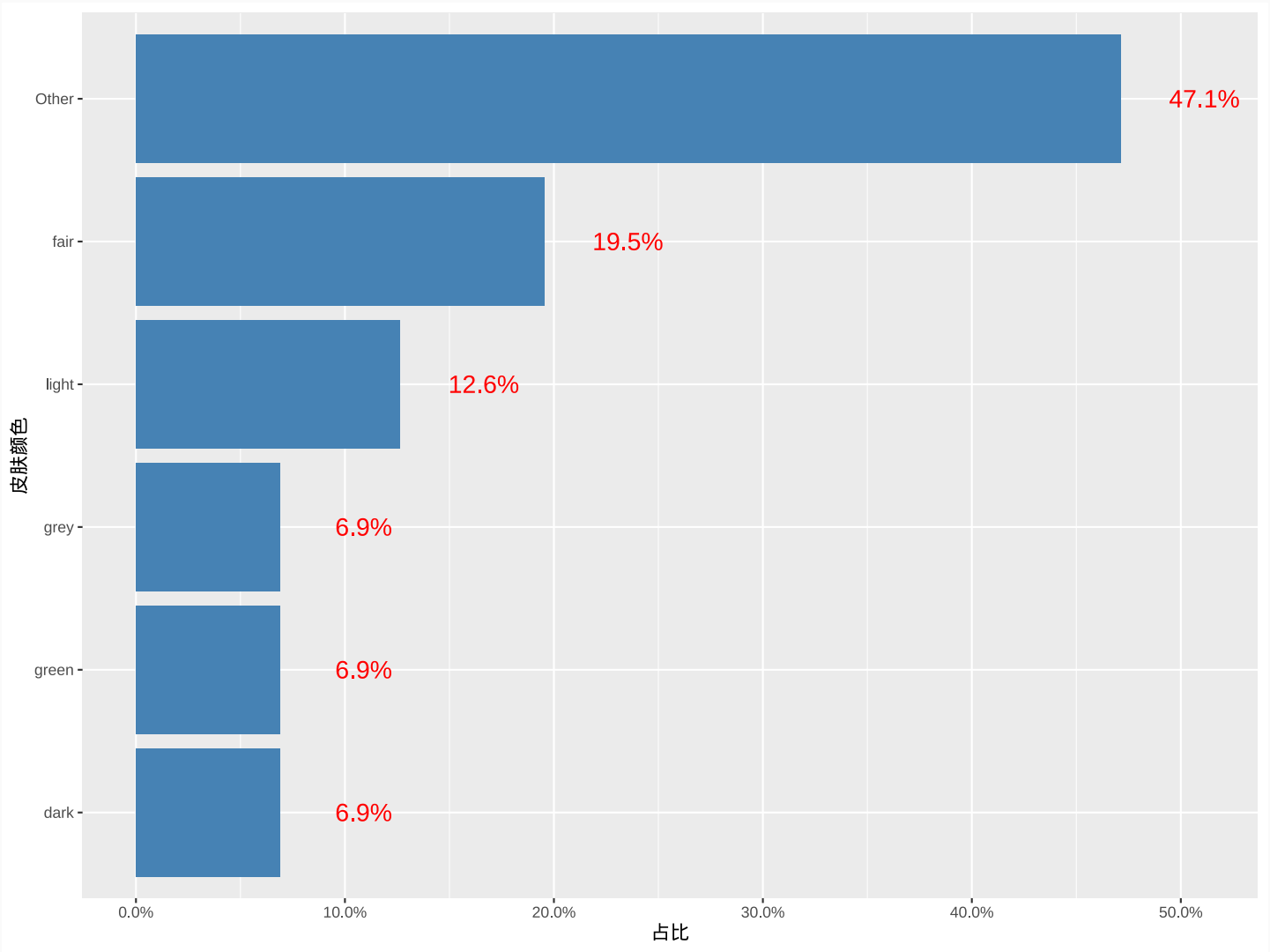
- `geom_bar()`: 对原始数据绘制条形图
- `geom_col()`: 对汇总频数/频率的数据用绘制条形图

以 `starwars` 数据集 `skin_color` 绘制条形图为例：

- 用 `fct_lump()` 将频数 ≤ 5 的类别做了合并
- 分组汇总，计算各组频数和频率
- 绘制条形图，将分类变量 `skin_color` 按频率做了因子重排序，实现了对”条形”排序
- 在条形旁边增加文字注释，标记该条形所占百分比
- 翻转坐标轴，变成水平条形图

```r
df = starwars %>%
  mutate(skin_color = fct_lump(skin_color, n = 5)) %>%
  count(skin_color, sort = TRUE) %>%
  mutate(p = n / sum(n))
df
#> # A tibble: 6 x 3
#>   skin_color     n     p
#>   <fct>      <int> <dbl>
#> 1 Other         41 0.471
#> 2 fair          17 0.195
#> 3 light         11 0.126
#> # ... with 3 more rows
```

```r
ggplot(df, aes(fct_reorder(skin_color, p), p)) +
  geom_col(fill = "steelblue") +
  # 同 geom_bar(stat = "identity")
  scale_y_continuous(labels = scales::percent) +
  labs(x = " 皮肤颜色", y = " 占比") +
  geom_text(aes(y = p + 0.04,
                label = str_c(round(p*100,1), "%")),
            size = 5, color = "red") +
  coord_flip()
```


Other
fair
light
grey
green
dark
皮肤颜色
47.1%
19.5%
12.6%
6.9%
6.9%
6.9%
0.0%
10.0%
20.0%
30.0%
40.0%
50.0%
占比

(2) **饼图**

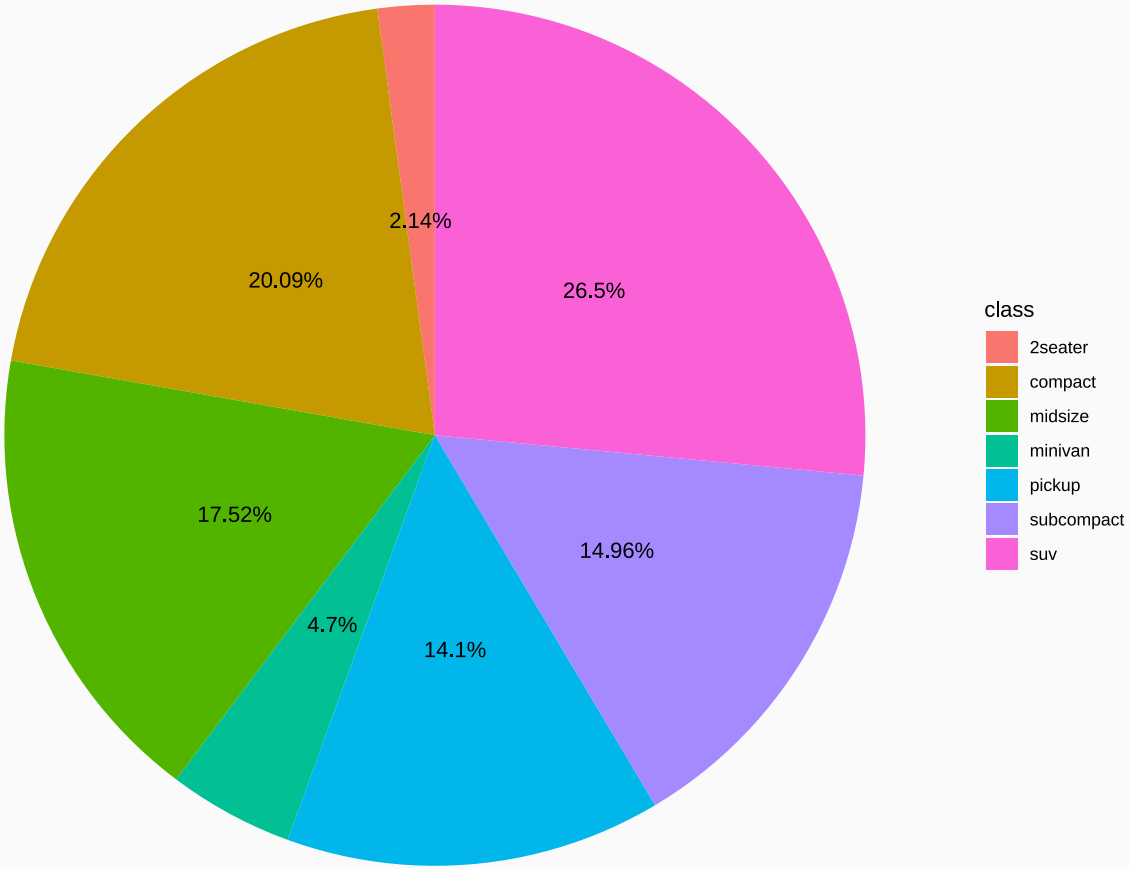
饼图，是用每个扇形的圆心角大小表示每部分所量所占的比例，注意饼图很难去精确比较不同部分的大小。

Hadley 认为饼图可以通过极坐标变换得到，没有提供绘制饼图的几何对象，另外从展示分类数据角度来说，饼图也不是一个好的选择。

- 提供一个绘制饼图的模板：

```
piedat = mpg %>%                    # 先准备绘制饼图的数据
  group_by(class) %>%
  summarize(n = n(),
            labels = str_c(round(100*n/nrow(.), 2), "%"))
piedat
#> # A tibble: 7 x 3
#>   class       n labels
#>   <chr>   <int> <chr>
#> 1 2seater     5 2.14%
#> 2 compact    47 20.09%
#> 3 midsize    41 17.52%
#> # ... with 4 more rows
```

```r
ggplot(piedat, aes(x = "", y = n, fill = class)) +
  geom_bar(width = 1, stat = "identity") +
  coord_polar("y", start = 0) +
  geom_text(aes(label = labels),
            position = position_stack(vjust = 0.5)) +
  theme_void()
```

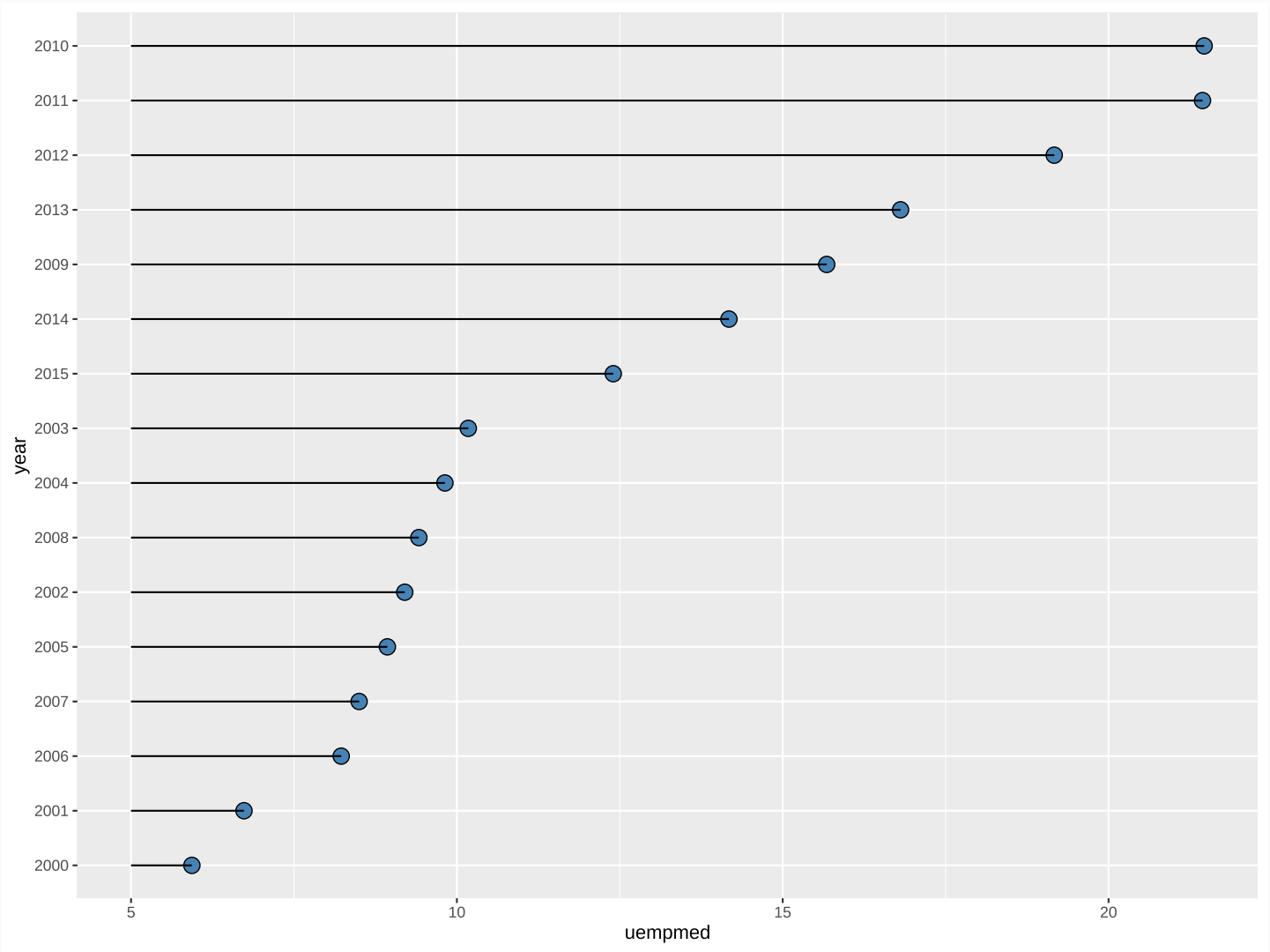

2.14%
20.09%
26.5%
17.52%
14.96%
4.7%
14.1%
class
2seater
compact
midsize
minivan
pickup
subcompact
suv

(3) Cleveland 点图

x 轴是分类变量，每一类对应一个类均值或频数（y 值），画一个原点；并根据 y 值大小对 x 轴类别排序。适合展示多类别之间的比较。

通常再做一次坐标翻转，横线可加可不加。

```
economics %>%
  group_by(year = lubridate::year(date)) %>%
  summarise(uempmed = mean(uempmed)) %>%
  filter(year >= 2000) %>%
  ggplot(aes(reorder(year, uempmed), uempmed)) +
  geom_point(size = 4, shape = 21,
             fill = "steelblue", color = "black") +
  geom_segment(aes(xend = ..x.., yend = 5)) +
  xlab("year") +
  coord_flip()
```


2010
2011
2012
2013
2009
2014
2015
2003
2004
2008
2002
2005
2007
2006
2001
2000
year
5
10
15
20
uempmed

2. 连续数据的统计图

(1) 直方图

连续数据常用直方图来展示变量取值的分布，利用直方图可以估计总体的概率密度。

将变量取值的范围分成若干区间。直方图是用面积而不是用高度来表示数，总面积是 100%. 每个区间矩形的面积恰是落在该区间内的百分数（频率），所以

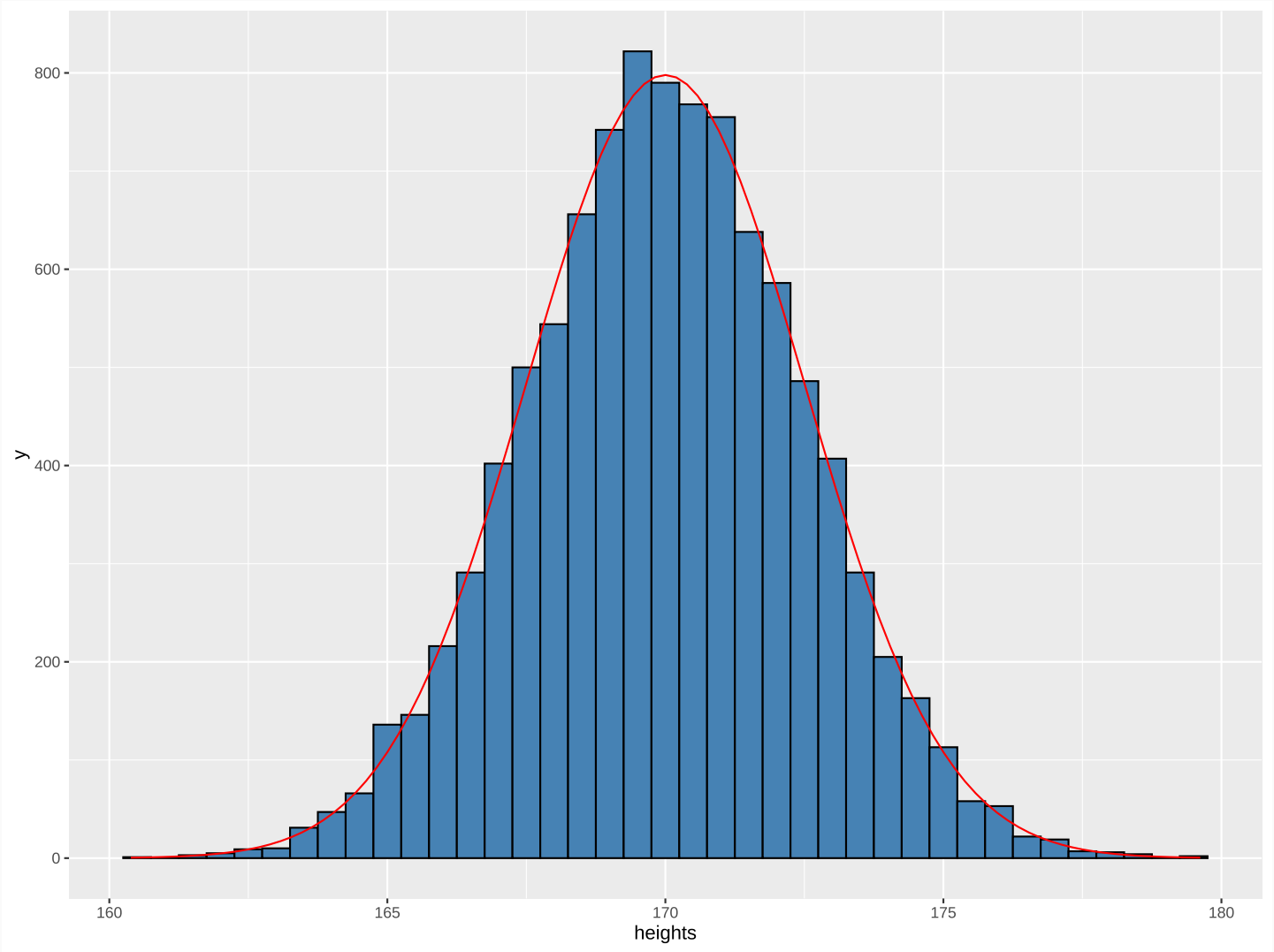
$$\text{矩形的高} = \text{频率}/\text{区间长度} = \text{密度}$$

特别地，若区间是等长的，则”矩形的高”就是频率。注意：直方图矩形之间是没有间隔的。

用 geom_histogram() 绘制直方图。频率直方图与概率密度曲线正好搭配，因为频率直方图的条形宽度趋于 0，就是概率密度曲线。

若想绘制频数直方图 + 概率密度曲线，就需要对密度做一个放大：条形宽度 * 样本数倍。

```
set.seed(123)
df = tibble(heights = rnorm(10000, 170, 2.5))
ggplot(df, aes(x = heights)) +
  geom_histogram(fill = "steelblue", color = "black",
                 binwidth = 0.5) +
  stat_function(
    fun = ~ dnorm(.x, mean=170, sd=2.5) * 0.5 * 10000,
    color = "red")
```



注：若想在同一张图上叠加多个直方图，以对比分类变量不同水平的概率分布，更适合用 `geom_freqpoly()` 绘制频率多边形图；函数 `geom_density()` 绘制核密度估计曲线。

(2) 箱线图

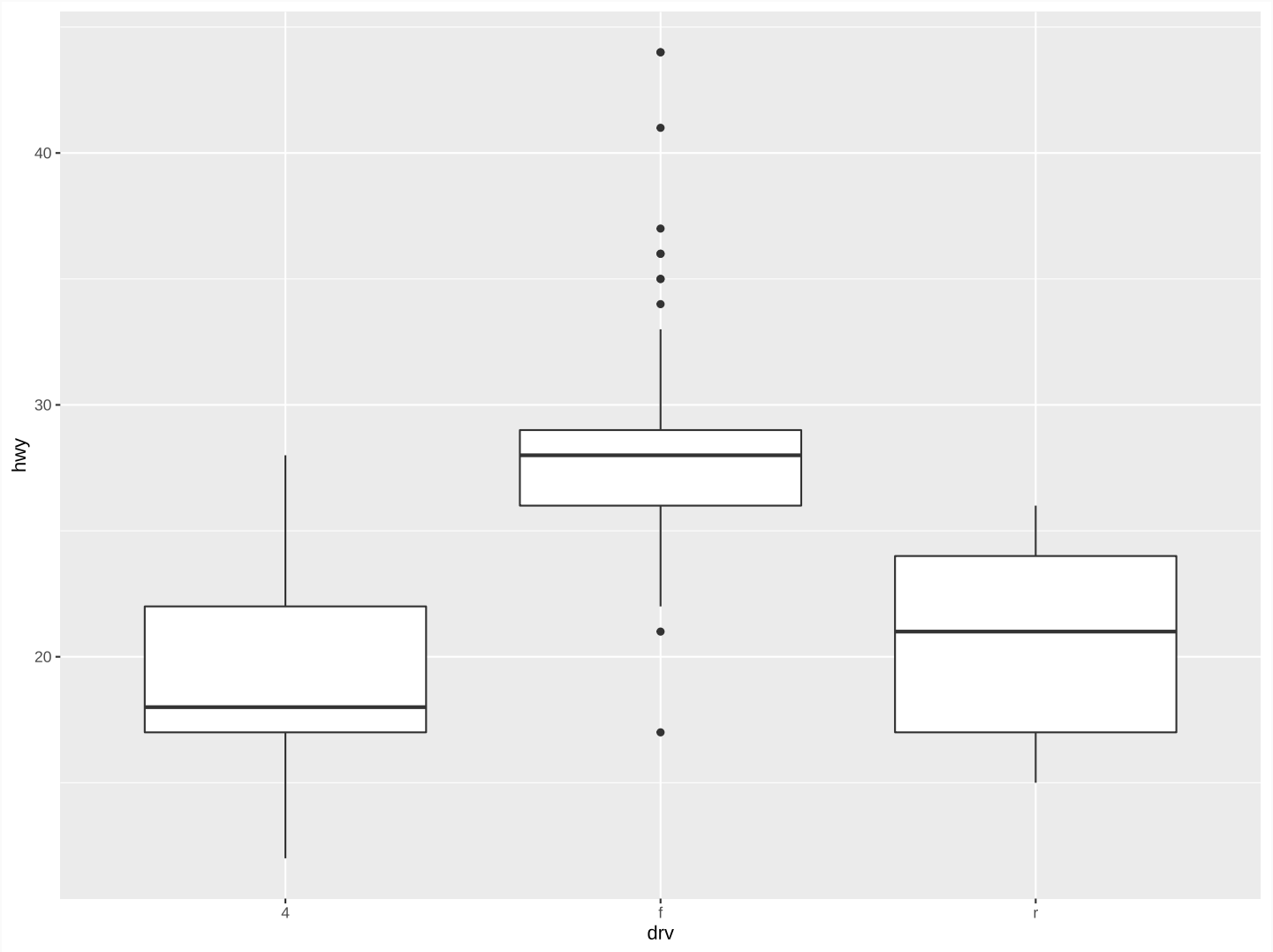
箱线图，是在一条数轴上：

- 以数据的上下四分位数（Q1-Q3）为界画一个矩形盒子（中间 50% 的数据落在盒内）；
- 在数据的中位数位置画一条线段为中位线；
- 默认延长线为盒长的 1.5 倍，之外的点认为是异常值。

箱线图的主要应用就是，剔除数据的异常值、判断数据的偏态和尾重、可视化组间差异。

用 geom_boxplot() 绘制箱线图，例如比较不同 drv 下，hwy 的组间差异：

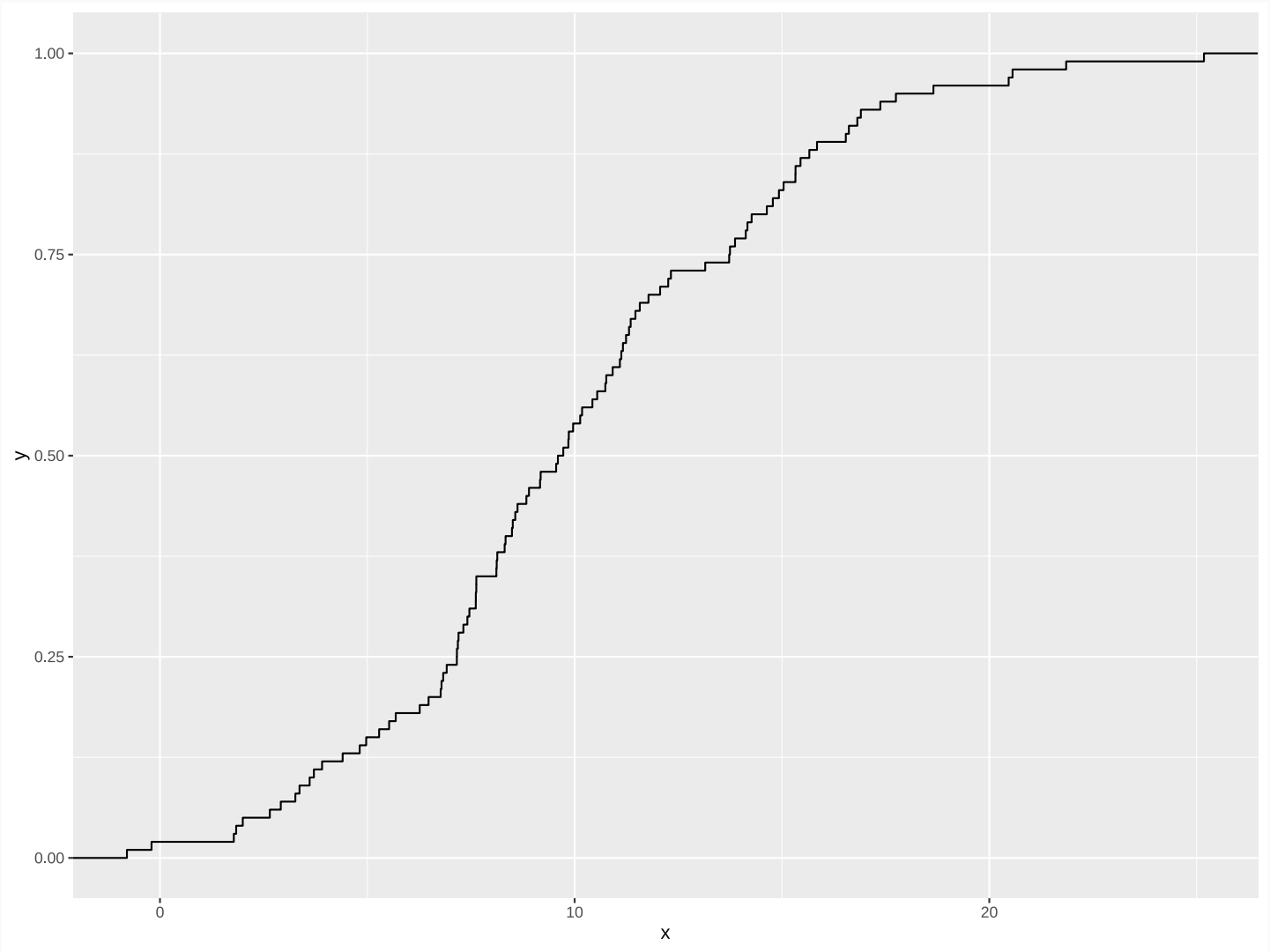
```r
ggplot(mpg, aes(x = drv, y = hwy)) +
  geom_boxplot()    # 水平翻转加图层 coord_flip()
```



(3) 经验累积分布图

经验累积分布函数，定义为小于等于 x 的数据点占总数据的比例。即若 x 是第 k 大的观测值，则小于等于 x 的数据比例为 k/n.

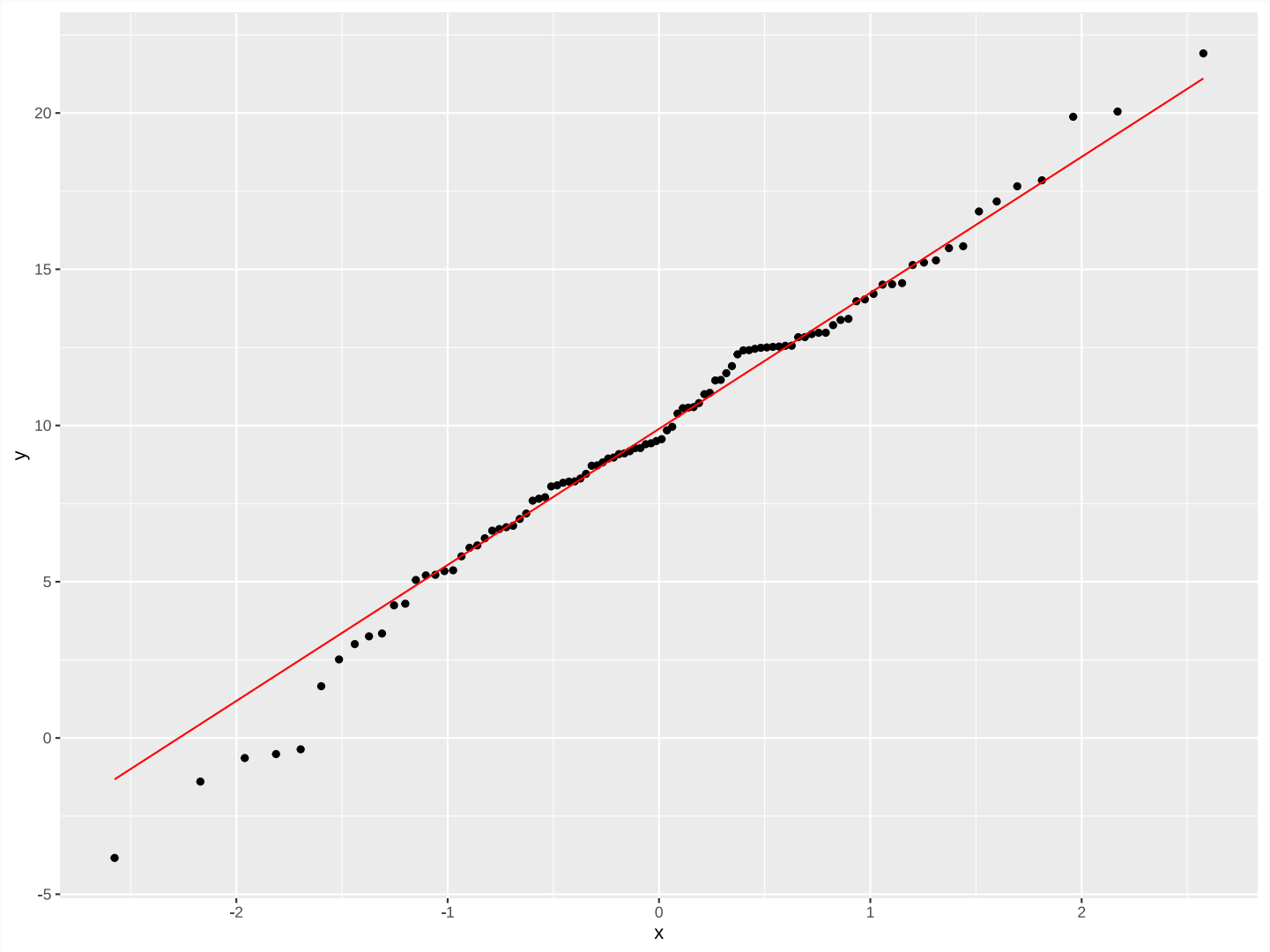
```
tibble(x = rnorm(100, 10, 5)) %>%
  ggplot(aes(x)) +
  stat_ecdf(geom = "step")
```


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
y
0
10
20
x

(4) Q-Q 图

判断数据是否近似服从正态分布，散点大体落在直线上，说明服从正态分布。

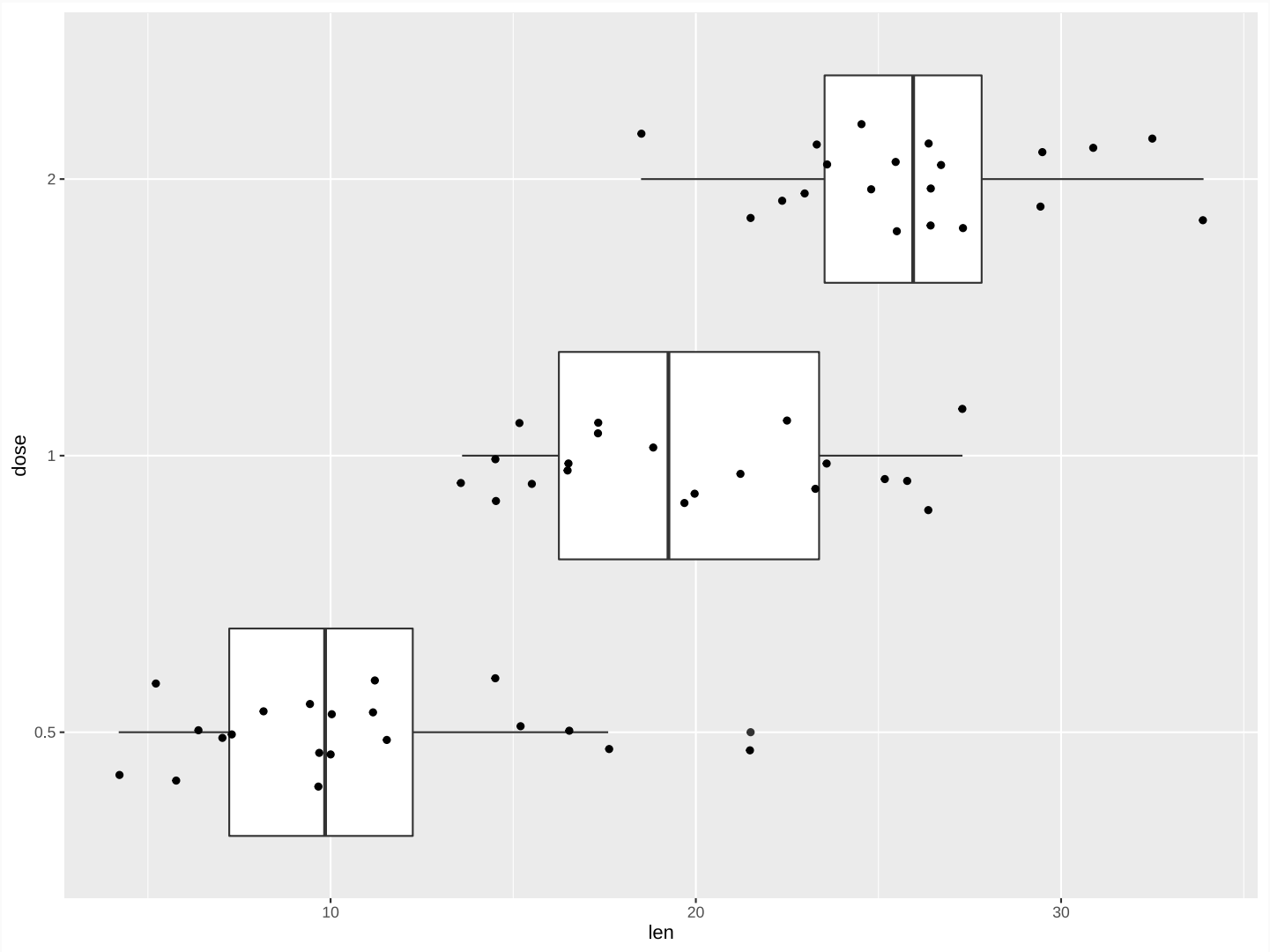
```
tibble(x = rnorm(100, 10, 5)) %>%
  ggplot(aes(sample = x)) +
  stat_qq() +
  stat_qq_line(color = "red")
```


20
15
10
5
0
-5
y
-2
-1
0
1
2
x

(5) 带状图

自变量是分类变量，对每一类下的连续变量绘制散点图（在一条线上），再对散点加一个**抖散**（jitter）：

```
ToothGrowth %>%
  mutate(dose = factor(dose)) %>%
  ggplot(aes(dose, len)) +
  geom_boxplot() +
  geom_jitter(position = position_jitter(0.2)) +
  coord_flip()
```


dose
2
1
0.5
10
20
30
len

三. 列联表

对分类变量做描述统计，通常是计算各水平值出现的频数和占比，得到**列联表**(交叉表)。用 `table()` 可以实现，但功能很弱还不够 `tidy`.

`janitor` 包提供了更强大的 `tabyl()` 函数，可以生成一个、两个、三个变量的列联表，再结合 `adorn_*()` 函数，可以很方便地按想要的格式添加行列合计、占比等。

- 一维列联表，添加合计行：

```
library(janitor)
mpg %>%
  tabyl(drv) %>%
  adorn_totals("row") %>%          # 添加合计行
  adorn_pct_formatting()           # 设置百分比格式
#>    drv   n percent
#>      4 103   44.0%
#>      f 106   45.3%
#>      r  25   10.7%
#>  Total 234  100.0%
```

- 二维列联表，添加列占比和频数

```
mpg %>%
  tabyl(drv, cyl) %>%
  adorn_percentages("col") %>%              # 添加列占比
  adorn_pct_formatting(digits = 2) %>%      # 设置百分比格式
  adorn_ns()                                # 添加频数
#>  drv             4             5             6             8
#>    4 28.40% (23)   0.00% (0) 40.51% (32) 68.57% (48)
#>    f 71.60% (58) 100.00% (4) 54.43% (43)  1.43%  (1)
#>    r  0.00%  (0)   0.00% (0)  5.06%  (4) 30.00% (21)
```

注：三维列联表是针对 3 个分类变量，结果就像多维数组的”分页”。

另外，还有很多包能将描述性统计、回归模型的结果变成规范的表格样式，代表性的是 `gtsummary` 包；实验设计（表）在科研、生产中应用广泛，各种常用的实验设计，可以用 `DoE.base` 包实现。

本篇主要参阅 (张敬信, 2022), (冯国双, 2018), (贾俊平, 2018), (Chang, 2018), (Chang, 2018), 以及包文档，模板感谢 (黄湘云, 2021), (谢益辉, 2021).

参考文献

Chang, W. (2018). *R Graphics Cookbook*. O'Reilly, 2 edition.

冯国双 (2018). 白话统计. 电子工业出版社, 北京, 1 edition.

张敬信 (2022). *R* 语言编程：基于 *tidyverse*. 人民邮电出版社, 北京.

谢益辉 (2021). *rmarkdown: Dynamic Documents for R*.

贾俊平 (2018). 统计学. 中国人民大学出版社, 北京, 7 edition.

黄湘云 (2021). *Github: R-Markdown-Template*.