

Deep Eikonal Solver

Rapport de stage

Yohan FRAISSINET-TACHET

Juin/Août 2020

Sommaire

1	Introduction	3
2	A propos de l'équation Eikonale	3
2.1	Qu'est-ce que l'équation Eikonale?	3
2.2	Domaines d'applications	3
2.3	Algorithmes	4
2.4	Fast marching	4
2.5	Fast sweeping	4
2.6	Autres algorithmes	5
3	Premier prototype avec paramétrisation régulière	6
4	Intégration de bibliothèques	6
5	Cas d'une surface triangulaire	6
6	Conclusion	6

1 Introduction

2 A propos de l'équation Eikonale

2.1 Qu'est-ce que l'équation Eikonale ?

L'équation Eikonale (du grec $\epsilon\iota\kappa\omega\nu$ qui signifie image) est une équation aux dérivées partielles non linéaires définie telle que pour Ω un ensemble ouvert inclus dans \mathbb{R}^n , on a :

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &= \frac{1}{f(x)} \\ u(x) &= g(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Avec ∇ l'opérateur gradient, f une fonction à valeurs positives et g la fonction qui définit les conditions aux frontières. Cette équation possède diverses interprétations et applications. A l'origine, cette équation apparaît dans le domaine de la physique notamment en optique géométrique. En effet l'équation eikonale définit l'équation fondamentale de l'optique géométrique et permet de calculer la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu homogène ou inhomogène. Elle permet de démontrer toutes les autres lois, telles que les lois de Snell-Descartes, le principe de Fermat et donc de déterminer les trajectoires des rayons lumineux.

2.2 Domaines d'applications

En dehors de l'optique géométrique, l'équation eikonale est utilisée dans bien d'autres domaines :

En l'occurrence le problème dans lequel nous utilisons cette équation est un problème de calcul de distance. Ainsi ici f correspond à la fonction qui à tout $x \in \Omega$ lui associe sa vitesse $f(x)$. Et $u(x)$ est la distance minimale nécessaire à parcourir pour aller de la frontière $\partial\Omega$ à x dans l'espace Ω . Dans notre cas, $u(x)$ est également le temps minimal car la distance et la vitesse sont égales à un facteur près. Cela permet entre autres d'obtenir le plus court chemin entre deux objets de l'espace à l'aide d'algorithme de plus court chemin.

L'équation eikonale est également utilisée pour modéliser la propagation d'un front d'onde. Ainsi elle apparaît dans des domaines tels que l'électromagnétisme, la sismologie ou encore le son. Dans chacun de ces domaines interviennent des ondes et des fronts d'ondes qui se propagent dans différents milieux. Par exemple, l'approximation généralement utilisée en imagerie sismique pour prédire les temps de parcours dans des milieux latéralement hétérogènes est l'équation eikonale.

L'équation eikonale a plusieurs applications en analyse d'images, la reconstruction de surface à partir de nuages de points et la segmentation d'images en sont

quelques-unes. Elle peut apparaître lors de la modélisation d'un squelette (axe médian), par exemple lors du calcul de la carte de distances qui associe à chaque pixel de l'image la distance au point obstacle le plus proche. Ces points obstacles peuvent être les points du contour de formes dans une image binaire. Elle est donc souvent utilisée en vision par ordinateur car sa résolution permet de calculer des distances entre objets.

2.3 Algorithmes

2.4 Fast marching

Les méthodes de marche rapide (fast marching) sont les principaux schémas numériques pour résoudre l'équation Eikonale avec conditions aux limites sur des espaces euclidiens discrétisés ainsi que sur des surfaces courbes triangulées. Ces méthodes sont connues pour avoir une complexité de calcul en $O(N \log N)$ pour des espaces euclidiens discrétisés, avec N le nombre de points du maillage. La méthode de marche rapide comprend un solveur numérique local et une étape de mise à jour du front et des points parcourus. Dans notre cas, on choisit d'utiliser un réseau de neurones pour résoudre et approximer au mieux l'équation localement. On se sert ainsi de la capacité d'apprentissage du réseau pour pouvoir réaliser ces calculs suivants le plus de conditions différentes. L'algorithme quant à lui est similaire à l'algorithme de Dijkstra et utilise le fait que l'information circule uniquement vers l'extérieur.

Algorithm 1 Eikonal Estimation on Discretized Domain

```

1: Initialize:
2:  $u(p) = 0$ , Tag  $p$  as visited;  $\forall p \in \mathfrak{s}$ 
3:  $u(p) = \infty$ , Tag  $p$  as unvisited;  $\forall p \in \mathcal{S} \setminus \mathfrak{s}$ 
4: while there is a non-visited point do
    Denote the points adjacent to the newly visited points as  $\mathcal{A}$ 
5:   for all  $p \in \mathcal{A}$  do
6:     Estimate  $u(p)$  based on visited points.
7:     Tag  $p$  as wavefront
8:   Tag the least distant wavefront point as visited.
9: return  $u$ 

```

FIGURE 1 – Algorithme marche rapide

2.5 Fast sweeping

L'idée principale de la méthode de balayage rapide (fast sweeping) est d'utiliser un schéma itératif utilisant des différences non linéaires en amont (upwind) et des itérations de la méthode de Gauss-Seidel avec ordre de balayage alterné. Contrairement à la méthode de marche rapide, la méthode de balayage rapide suit les courbes caractéristiques de manière parallèle ; c'est-à-dire que toutes les courbes caractéristiques sont divisées en un nombre fini de groupes selon leurs directions. Chaque itération de Gauss-Seidel avec son ordre de balayage spécifique couvre si-

multanément un groupe de caractéristiques. La convergence est atteinte dès lors qu'aucune valeur n'est modifiée après un balayage. L'algorithme est optimal dans le sens où un nombre fini d'itérations est nécessaire. Donc la complexité de l'algorithme est en $O(N)$ pour un total de N points de grille. La précision est la même que toute autre méthode qui résout le même système d'équations discrétisées, à savoir en $O(h)$ avec h le pas de discrétisation.

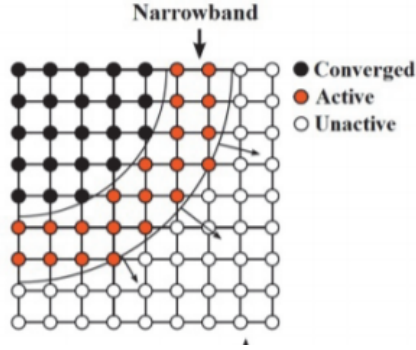


FIGURE 2 – Evolution du front d'onde avec Fast marching

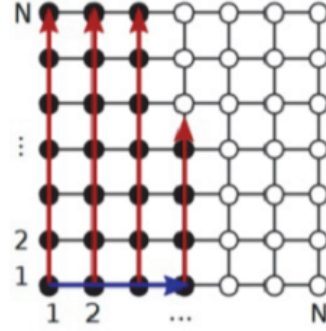


FIGURE 3 – Illustration du balayage avec Fast sweeping

La méthode de balayage rapide est plus précise et plus facile à mettre en œuvre que la méthode de marche rapide, mais le nombre réel de balayages requis pour la convergence dépend du problème à résoudre expérimentalement, il est observé que 2^D balayages sont requis pour un problème de dimension D . Par ailleurs, plus récemment de nouvelles implémentations de la méthode de marche rapide voient le jour et atteignent une complexité en $O(N)$ à l'aide de systèmes de tas et de files d'attentes en désordre ingénieux.

2.6 Autres algorithmes

Il existe également d'autres procédés pour résoudre l'équation eikonale. Certains se basent sur d'autres algorithmes de plus court chemin tel que l'algorithme de Bellman–Ford qui est plus lent que l'algorithme de Dijkstra mais qui permet de travailler sur des poids négatifs. D'autres procédés utilisent des méthodes hybrides mettant en place à la fois la méthode de marche rapide et la méthode de balayage rapide existent. Elles sont basées sur la division du domaine en une collection de cellules rectangulaires disjointes à l'aide du fast marching suivie de l'application séquentielle de la méthode de balayage rapide sur les cellules. L'intérêt de cette décomposition est de diviser le problème en sous-problèmes.

- 3 Premier prototype avec paramétrisation régulière
- 4 Intégration de librairies
- 5 Cas d'une surface triangulaire
- 6 Conclusion