

## TP1 : Convolution : Lissage et détection de contours

Un système d'enregistrement d'image ne restitue pas l'image de manière parfaite : des informations parasites apparaissent et viennent s'ajouter de manière aléatoire aux éléments de la scène d'origine. Cet effet est désigné sous le terme général de "bruit". La chaîne d'acquisition classique comporte donc le phénomène physique (faisceau lumineux, les rayons X au autres), le capteur transformant le phénomène physique en signal électrique, l'amplification du signal et la conversion analogique/numérique. Les principales sources de bruit sont les suivantes :

- le bruit lié au phénomène physique mesuré** : Les images sont obtenues à partir d'un phénomène physique comme la lumière, les rayons X, les ultrasons, le signal issu de la résonance magnétique : dans le cadre des capteurs basés sur la lumière, ce sont les photons qui sont recueillis au niveau du capteur. Le bruit photonique est du à l'arrivée aléatoire des photons sur le capteur. Comme pour les rayons X, ce bruit suit une loi de poisson, pour laquelle la variance est égale à la moyenne. Le bruit est donc plus important pour les valeurs élevées (haute lumière) qu'en basse lumière.
- le bruit lié au capteur** : En terme de bruit, le courant d'obscurité correspond au courant existant même en dehors de toute stimulation, essentiellement du à l'agitation thermique des électrons dans les photosites. Il est modélisé par un bruit blanc. Notons qu'il peut être différent sur chaque photosite. D'autres phénomènes sont à l'origine de défauts comme des photosites morts ou masqués par des poussières (induisant un bruit de type poivre et sel) ou l'éblouissement (blooming) concernant les pixels saturés dont les charges basculent sur les pixels voisins. En photo, le courant d'obscurité est corrigé grâce à une estimation faite sur les pixels masqués sur les bords du capteur.
- le bruit lié à l'électronique d'acquisition** : l'objectif de la chaîne de lecture est de récupérer les charges  $Q$  de chaque photo-site et de convertir les charges stockées ( $Q$ ) en signal analogique (tension), puis d'amplifier le signal avant conversion. Le bruit de lecture lié à l'électronique est modélisé par un bruit blanc ou un bruit en  $1/f$ . Ce dernier provient des défauts/impuretés dans le réseau cristallin du matériau et décroît avec les fréquences. Il n'est majoritaire vis à vis bruit thermique qu'à des très basses fréquences.
- le bruit lié à la quantification** : le signal électrique continu est convertit en un entier sur 8, 10, 12 voire 16 bits par un convertisseur CAD. Lors de la conversion, les valeurs réelles sont arrondies au 1/2 bit de poids faible. C'est le bruit de quantification, en général négligeable.

Le lissage a pour but de réduire l'influence du bruit, afin d'obtenir une meilleure restitution de l'image pour son analyse. La détection de contours cherche à déterminer quels sont les pixels qui forment les bords des objets d'une scène.

Ce premier tp introduit les filtres linéaires. Un filtre  $F(x)$  est linéaire lorsqu'il répond à la condition suivante :  $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ . Il est implémenté par une convolution.

L'objectif du tp est d'implanter et étudier 2 techniques de convolution (spatiale dans l'espace image et fréquentielle dans l'espace de Fourier) soit pour lisser une image (première partie), soit pour effectuer une détection de contours (deuxième partie). La première partie sur le lissage gaussien teste et établit les règles d'utilisation de ces 2 méthodes d'implémentation de la convolution tandis que la deuxième partie compare la détection de contours par gradient et par laplacien.

# 1 Lissage linéaire

Cette catégorie de filtres correspond à des filtres passe-bas, éliminant les hautes fréquences qui représentent généralement le bruit. Le problème est de déterminer la fréquence de coupure exacte du filtre car les contours des objets sont eux aussi représentés par des fréquences relativement élevées, qu'il faut conserver. Le rôle d'un filtre de lissage peut être résumé en quatre actions :

- Tous les pixels d'une zone relativement homogène doivent être à une même valeur : cela revient à réduire la variance de cette zone homogène.
- Tous les pixels proches d'un contour doivent appartenir à une zone homogène s'ils n'appartiennent pas à ce contour. Cela revient à ne pas créer de nouvelles zones ou valeurs à proximité des points de contours.
- Aucun point de contour ne doit disparaître : le filtre ne doit pas entraîner de perte de résolution sur l'image, en particulier sur les zones où les contours ont de 1 ou 2 pixels d'épaisseurs (Images de caractères ou d'empreintes digitales).
- Le filtre ne doit pas entraîner de déformations de ces contours (en particulier pour les coins et les intersections de contours) et ne doit pas déplacer ces contours (en particulier lorsque des mesures métriques sont envisagées).

Les filtres linéaires permettent une réduction du bruit dans les images, mais ont l'inconvénient de traiter de manière identique le bruit et les signaux utiles (contour), et donc de dégrader l'information pertinente dans le cas d'une détection de contours. Par contre, les filtres linéaires prennent en compte de la hauteur des bruits qu'ils ont à traiter. Généralement, leur action est proportionnelle à la valeur du bruit à éliminer.

## 1.1 FFT, filtrage fréquentiel et convolution

La transformée de Fourier discrète d'une image de taille  $N \times M$  s'écrit :

$$TF(I)(u, v) = R(u, v) = \frac{1}{\sqrt{N.M}} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} I(x, y) e^{-2.i.\pi\left(\frac{u.x}{N} + \frac{v.y}{M}\right)}$$

Un des intérêt de la transformée de Fourier pour le filtrage est que celle ci transforme la convolution d'une image  $I$  par un filtre  $G$  en produit dans l'espace fréquentiel, ce qui donne une complexité en  $o(N \times M)$  :

$$TF(I * G) = TF(I) \times TF(G)$$

où  $\times$  est le produit de 2 nombres complexes

On peut donc appliquer un filtre linéaire  $G$  en multipliant la transformée de Fourier d'une image  $I$  par la transformée de Fourier du filtre  $G$ , puis en effectuant la transformée de Fourier inverse du résultat.

$$I * G = TF^{-1}(TF(I) \times TF(G)) \tag{1}$$

où  $\times$  est le produit de 2 nombres complexes  
et  $*$  est la convolution

### 1.1.1 Remarque préliminaire

Lors du passage du domaine continu au discret, si le signal continu est discrétisé à la fréquence  $1/T_e$  pour un signal de  $N$  échantillons, la FFT périodise le signal ainsi que le résultat, qui est échantillonné à la fréquence  $1/(N.T_e)$ . L'algorithme calcule la FFT pour des valeurs positives  $0 \leq u \leq N$ , correspondant aux fréquences  $u/(N.T_e)$ , alors que les représentations continues classiques visualisent le résultat entre

les indices  $-N/2$  et  $N/2$ . On revient à cette représentation grâce à l'aspect périodique de la TF avec la relation  $R(u) = R(u + N)$  pour retrouver les valeurs aux indices  $-N/2 \leq u \leq 0$ .

En 2D, la disposition des fréquences obtenue par les algorithmes de FFT est celle de la figure 1a, avec les hautes fréquences centrées en  $N/2, M/2$  et les basses fréquences situées dans les angles. En replaçant les basses fréquences au centre de l'image, on obtient une représentation fréquentielle plus conforme (figure 1b), avec l'origine des coordonnées fréquentielles en  $(N/2, M/2)$  obtenue en utilisant la fonction `fftshift`, en utilisant la périodicité des 2 axes de l'image.

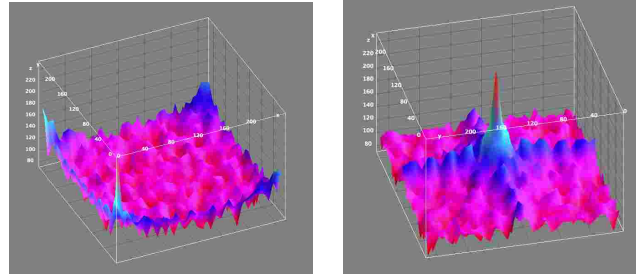


FIGURE 1 – à gauche, représentation directe : les fréquences hautes sont au centre ; à droite, représentation shiftée habituelle : les fréquences basses sont au centre

### 1.1.2 Filtrage gaussien par FFT

Le filtrage gaussien est un filtrage linéaire assez efficace en terme de débruitage et trouve un écho dans le système visuel humain : c'est en effet le type de filtrage réalisé par les premières cellules du processus visuel humain situées après les cellules photo-réceptrices de l'œil, avec plusieurs tailles de filtres sur des canaux différents. La gaussienne bidimensionnelle s'écrit :

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad \text{si } \sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

La FFT de cette gaussienne :

$$TF(G(x, y)) = \tilde{G}(u, v) = e^{-2\pi^2 \sigma^2 (u^2 + v^2)} \quad (2)$$

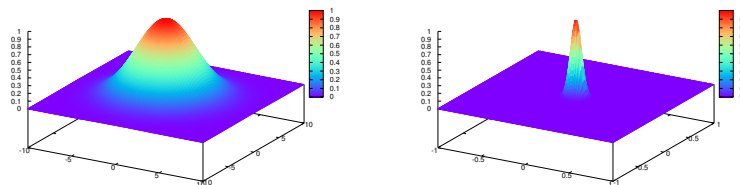


FIGURE 2 – Gaussienne à gauche et sa FFT à droite (supports différents)

On peut donc facilement réaliser un filtrage gaussien en définissant directement le filtre dans l'espace de Fourier (sans faire de *FFT*). Il suffit ensuite de faire le produit de la TF de l'image avec ce filtre puis de prendre la  $TF^{-1}$  pour réaliser un filtrage gaussien. Le paramètre  $\sigma$  est lié à la taille des objets présents dans l'image. Les avantages sont :

- Le filtrage est presque exact, car les coefficients sont rapidement presque nuls
- La taille de la gaussienne n'intervient pas dans le design du filtre
- La complexité et le temps de calcul sont constants pour des  $\sigma$  différents
- Il existe des bibliothèques particulièrement optimisées pour le calcul de la fft (voir FFTW).

### 1.1.3 Remarques importantes pour la mise en œuvre :

- Le filtre est centré sur le milieu de l'image. Il faut donc penser à "shifter" la  $TF$  de l'image avant de faire le produit, puis penser à "shifter" le produit avant de faire la  $TF^{-1}$ .
- Les fréquences sont normalisées. Dans le domaine discret, la transformée de Fourier de la gaussienne s'exprime par :

$$TF(G(u, v)) = e^{-2\pi^2\sigma^2\left(\left(\frac{u-N/2}{N}\right)^2 + \left(\frac{v-M/2}{M}\right)^2\right)} \quad (3)$$

avec  $0 \leq u < N$   
et  $0 \leq v < M$

- Attention à la mise en oeuvre en C/C++ des divisions entières pour le calcul de  $\left(\frac{u-N/2}{N}\right)$  et  $\left(\frac{v-M/2}{M}\right)$

### 1.1.4 Comparaison

Si l'image non bruitée est connue, une mesure de comparaison est le Peak Signal Noise Ratio (PSNR) basé sur l'erreur quadratique entre l'image non bruitée connue que l'on cherche et l'image lissée qui approxime cette image. Plus l'image lissée ressemble à l'image recherchée, plus le PSNR est grand. Le PSNR est donné par :

$$PSNR(im_1, im_2) = 10 \cdot \log \left( \frac{255^2 \cdot N \cdot M}{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M (im_1(i, j) - im_2(i, j))^2} \right)$$

Une fonction calculant le PSNR entre 2 images est incluse dans les fonctions données sur le site des TP.

### 1.1.5 Données images

On peut réaliser 2 types de comparaison :

- quantitatives à partir d'images synthétiques pour lesquels on connaît l'image sans bruit, la nature et les paramètres du bruit. On a ainsi une évaluation objective du filtre.
- qualitatives par observation personnelles sur n'importe quelle image, synthétique ou réelle.

Les images synthétiques sont construites à partir d'une image parfaite (formes2.pgm), qui subit un filtrage passe bas (formes2g.pgm) à laquelle on ajoute ensuite un bruit de type :

- gaussien de moyenne nulle et de variance  $i$  pour les images formes2bbi.pgm (1 seule réalisation par variance)
- poissonien pour les images formes2pi.pgm (plusieurs réalisations différentes)
- poivre et sel pour les images formes2spi.pgm, avec des densités de pixels défectueux différentes
- speckle, pour les images formes2pi.pgm (bruit multiplicatif dont le coefficient est de distribution gaussienne nulle et de variance  $i$ )

Pour effectuer les comparaisons quantitatives, on utilisera le PSNR entre le résultat de votre filtre et l'image initiale.

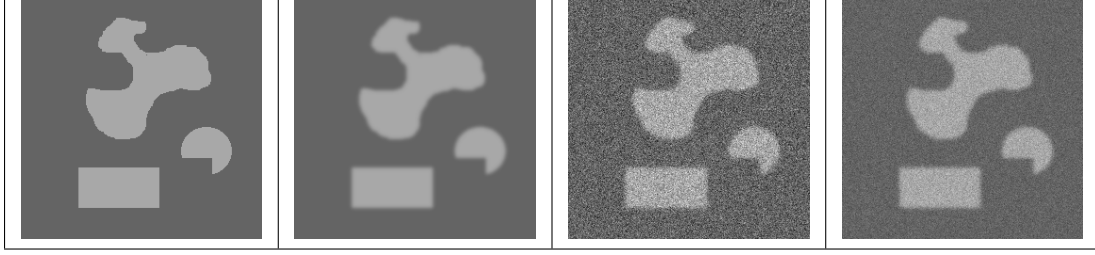


FIGURE 3 – Construction des images synthétiques : image initiale, filtrage passe bas, bruit gaussien, bruit poissonien

### 1.1.6 Travail à réaliser

L'objectif est de comparer l'effet du paramètre  $\sigma$  sur quelques images, de manière quantitative et qualitative.

1. Programmer le filtrage fréquentiel gaussien en utilisant les équations 1 et 3. Le code de la FFT et un exemple d'utilisation sont disponibles sur le site des TP. Attention lors de la multiplication des transformées de Fourier à bien considérer les mêmes coordonnées fréquentielles (cf remarques 1.1.1 et 1.1.3) : il est recommandé de remplacer les basses fréquences au centre en utilisant fftshift.
2. Tracer l'évolution du PSNR (plus le PSNR est élevé, plus la qualité du lissage est bonne) en fonction de la valeur de  $\sigma$  pour quelques images de type (gaussien, poisson, speckle, poivre et sel) et de niveau de bruit différents. Pour chaque type de bruit, choisir un niveau faible et un niveau fort. Quelles remarques pouvez vous faire ? Pour quel type de bruit le filtre gaussien est-il efficace ? Y a t il un lien (qualitatif) entre le niveau de bruit et la valeur de  $\sigma$
3. Comparer qualitativement les résultats obtenus pour les différents types de bruit (gaussien, poisson, speckle, poivre et sel). Pour quel type de bruit le filtre gaussien est-il efficace ?

## 1.2 Convolution spatiale

Dans le domaine continu, une convolution spatiale entre une image  $I$  et un filtre  $G$  est définie par :

$$R(x, y) = (I * G)(x, y) = (G * I)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x - x', y - y') \cdot G(x', y') dx' dy'$$

Dans le domaine discret, une convolution entre une image  $I$  et un filtre  $G$  est définie par :

$$R(x, y) = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{j=-m}^{+m} I(x + i, y + j) \cdot G(i, j)$$

### 1.2.1 Filtrage linéaire gaussien

Les coefficients du filtre discret  $G$  sont les valeurs d'une gaussienne à deux dimensions, normalisés de telle sorte que leur somme soit égale à 1. Dans le domaine discret, la convolution s'écrit :

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{j=-m}^{+m} e^{-\frac{i^2}{2\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{j^2}{2\sigma_y^2}} \cdot I(x + i, y + j) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{j=-m}^{+m} e^{-\frac{(i^2+j^2)}{2\sigma^2}} \cdot I(x + i, y + j) \quad \text{si } \sigma_x = \sigma_y = \sigma \end{aligned}$$

**Remarque sur la mise en oeuvre :** En pratique, les coefficients  $e^{-\frac{(i^2+j^2)}{2\sigma^2}}$  sont précalculés et stockés dans un tableau de taille  $2.n+1 \times 2.m+1$  réels. Pour un filtre numérique isotrope en x,y, les bornes  $n$  et  $m$  sont finies, identiques. En remarquant que les valeurs de la gaussienne sont symétriques,  $n+1$  est la taille du tableau contenant les coefficients précalculés, normés à 1. La valeur  $n = W(\sigma)$  dépend de  $\sigma$  et doit permettre d'approximer ce filtre dans le domaine discret : les plus petits coefficients du filtre doivent être pratiquement nuls :  $e^{-\frac{(W^2(\sigma)+W^2(\sigma))}{2\sigma^2}} \approx 0$ .

$$H(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \cdot \left( \sum_{i=-W(\sigma)}^{+W(\sigma)} \sum_{j=-W(\sigma)}^{+W(\sigma)} e^{-\frac{(i^2+j^2)}{2\sigma^2}} \right)^{-1}$$

avec  $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$   
et  $-W(\sigma) \leq x \leq W(\sigma)$   
et  $-W(\sigma) \leq y \leq W(\sigma)$

Un des objectifs de ce TP est d'obtenir la loi de  $W(\sigma)$ , c'est à dire la taille du tableau nécessaire à la convolution spatiale pour un résultat exact et identique à la convolution par FFT.

## 1.2.2 Filtrage linéaire séparable

Un filtre séparable est un filtre tel que  $H(x, y) = H_1(x).H_2(y)$ . Dans ce cas, la convolution 2D s'écrit comme une convolution 1D par  $H_1$ , suivi par une convolution 1D par  $H_2$ .

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (I * H)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x - x', y - y') \cdot H(x', y') \cdot dx' \cdot dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} I(x - x', y - y') \cdot H_1(x') \cdot dx' \right] \cdot H_2(y') \cdot dy' \\ &= ((I * H_1) * H_2)(x, y) \end{aligned}$$

La fonction gaussienne  $G(x, y)$  étant séparable, la convolution bidimensionnelle se transforme en 2 convolutions monodimensionnelles, une selon l'axe horizontal suivie d'une autre selon l'axe vertical.

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (I * G)(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x - x', y - y') \cdot e^{-\frac{x'^2+y'^2}{2\sigma^2}} \cdot dx' \cdot dy' \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} I(x - x', y - y') \cdot e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} \cdot dx' \right] e^{-\frac{y'^2}{2\sigma^2}} \cdot dy' \end{aligned}$$

Dans le domaine discret :

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (I * G)(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{i=-n}^{+n} \left[ \sum_{j=-m}^{+m} e^{-\frac{j^2}{2\sigma^2}} \cdot I(x + i, y + j) \right] \cdot e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}} \\ &= ((I * G_x) * G_y)(x, y) \\ \text{avec } G_x(i) &= G_y(i) = \frac{e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}}{\sum_{i=-n}^{+n} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}} \end{aligned}$$

Avec le lissage séparable, le nombre d'opération est considérablement réduit.

### Remarques sur la mise en oeuvre

1. Ce type de filtre, surtout dans sa version séparable, impose des calculs en réels : en calcul entier, la troncature effectuée lors du 1er passage provoque des erreurs importantes lors du 2ième passage.

2. Problème des bords : dans le domaine numérique, l'image est de taille finie. La convolution des pixels aux bord de l'image ( $i < W/2$ ) fait appel à des pixels situés en dehors de l'image. Ces pixels peuvent prendre les valeurs suivantes :
  - Zéro
  - La valeur du pixels du bord : on prolonge l'image par continuité
  - La valeur des pixels du bord opposé de l'image : on périodise l'image. C'est cette version qui sera utilisée ici pour permettre une comparaison avec la lissage par FFT qui périodise l'image par définition. Cela s'écrit facilement par `im[(i + N)%N][(j + M)%M]` en C/C++.

### 1.2.3 Travail à réaliser

1. Implémenter la convolution gaussienne d'une image par un masque séparable, en périodisant l'image pour gérer les effets de bords. La taille du masque et la valeur du lissage doivent être 2 paramètres distincts.
2. Tracer l'écart quadratique moyen (EQM) entre la convolution par filtrage fréquentiel par FFT et celle obtenue par un masque spatial en fonction de la taille du masque, de 1 à  $6\sigma$  (pour des valeurs fixées de  $\sigma = 1, 5, 10, 20$  par exemple) pour les images formes2g.pgm et radio1024.pgm. Commenter les résultats. Déterminer la loi empirique  $W(\sigma)$  pour laquelle les résultats sont identiques entre le filtrage fréquentiel par FFT et le filtrage spatial par un masque ?

## 1.3 Complexité et comparaison des 2 méthodes

### 1.3.1 Complexité

Pour le filtrage fréquentiel d'une image de taille  $N \times M$  et un masque de taille  $n \times m$ , la multiplication nécessite  $N \times M$  opérations, et l'algorithme FFT a une complexité en  $O((N \times M). \ln(N \times M))$ , ce qui donne une complexité totale en  $O((N \times M). \ln(N \times M))$ .

Pour un filtrage spatial d'une image de taille  $N \times M$  et un masque de taille  $n \times m$  la complexité est en  $O((n + m).N.M)$  si le filtre est séparable et de taille  $m$ , et en  $O(n.m.N.M)$  si le filtre n'est pas séparable et de taille  $m$ .

### 1.3.2 Travail à réaliser

L'objectif est de comparer la convolution spatiale et la convolution par FFT du point de vue du temps de calcul pour une valeur de  $\sigma$  donnée. La largeur  $W$  du masque est la plus petite taille de filtre pour laquelle les résultats de filtrage sont identiques entre la version fréquentielle et la version spatiale.

En utilisant une taille de masque  $W$  convenable en fonction de  $\sigma$ , comparer les temps de calcul des deux implémentations pour des gaussiennes de variances croissantes pour les images formes2g.pgm, radio1024.pgm et radio.pgm. Pour quelles tailles faut il utiliser la version fréquentielle plutôt que la version spatiale ?

#### Remarque : pour mesurer le temps

```
#include <time.h>
main() { clock_t debut, fin ;
  debut=clock();
  fonction_dont_on_veut_mesurer_le_temps();
  fin=clock();
  printf("duree=%f\n",((double)fin-debut)/CLOCKS_PER_SEC);
}
```

## 2 Détection de contours

Les frontières qui séparent les régions homogènes occupent une part importante dans le système visuel humain. On peut définir un contour comme une variation brutale de niveau de gris, plus ou moins entachée de bruit. Les neuro-physiologistes pensent que le système visuel humain commence par effectuer une détection de contour, certaines zones neuronales se spécialisant dans la détection dans des directions précises à l'aide de plusieurs lissages de tailles différentes.

D'un point de vue formel, en 2D, un contour est une rupture entre 2 surfaces de valeurs à peu près constantes : frontière entre 2 objets réels, entre 2 couleurs par exemple. Les modèles de contours classiques sont représentés figure 4, tandis que des contours réels sont représentés figure 5

Les contours peuvent être détectés par un examen des grandeurs étudiées (niveau de gris, distance, couleur, ...) soit :

- par des opérateurs locaux de différentiation du premier ordre (figure 6)
- par des opérateurs locaux de différentiation du second ordre (figure 6)
- par des opérations ensemblistes (Morphologie mathématique).

L'objectif de cette partie est de comparer les 2 premières approches qualitativement.

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Gradient

Définition du gradient de la fonction intensité  $I(x, y)$  le long du vecteur  $\vec{u}$

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{u}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(\vec{x} + h \cdot \vec{u}) - I(\vec{x})}{h} = \|\vec{\nabla} I\| \cdot \vec{u}$$

Par définition, un contour présente un maxima local dans une direction de l'espace. La fonction :

$$g(\phi) = \vec{\nabla} I \cdot \vec{u} = \frac{\partial I}{\partial x} \cos(\phi) + \frac{\partial I}{\partial y} \sin(\phi)$$

possède donc un maxima local selon la direction  $\phi$  et sa dérivée selon  $\phi$  s'annule :

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{\partial \vec{u} \cdot \vec{\nabla} I}{\partial \phi} = \frac{\partial I}{\partial x} \cdot \sin \phi - \frac{\partial I}{\partial y} \cdot \cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \arctg \left( \frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}} \right)$$

Donc, un contour d'orientation  $\phi$  au point de coordonnées  $(x, y)$  est détecté par un maximum de la dérivée première de la fonction image  $I(x, y)$ , dans la direction  $\phi$  du gradient, normale à la tangente au contour en ce point. Cette direction est celle de la plus grande pente de la fonction continue  $I(x, y)$ . Le module de gradient est la variation locale d'intensité de l'image.



FIGURE 4 – Contours idéalisés



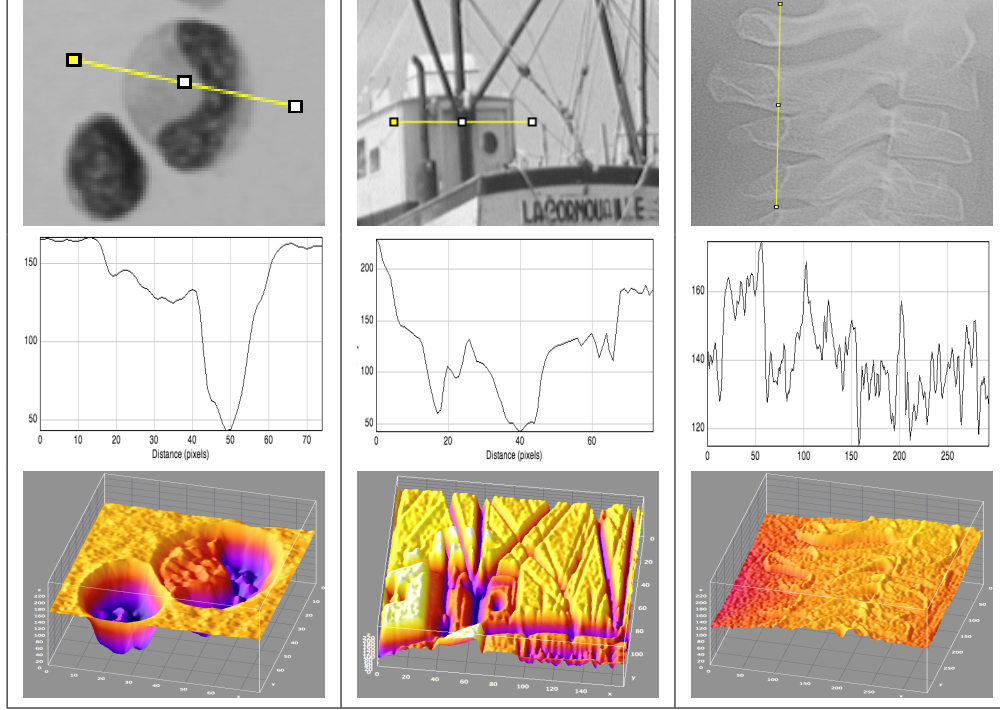


FIGURE 5 – Contours réels : image, profil d'intensité le long de la ligne jaune, vue 3D de la fonction Intensité  $I(x,y)$

### 2.1.2 Laplacien

Le laplacien est défini par :  $\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$  où  $\vec{t}, \vec{n}$  sont les vecteurs du repère de Frenet

Aux points de contour, le laplacien passe par 0 selon la direction  $\vec{n}$  :  $\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$

La composante tangentielle est généralement très faible aux points de contours, d'où

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \ll \frac{\partial^2 I}{\partial n^2} \Rightarrow \Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \approx \frac{\partial^2 I}{\partial n^2} = 0$$

Cependant, en première approximation, on utilise le laplacien en coordonnées cartésienne pour faciliter la détection, et on cherche donc les passages par zéro du laplacien.

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 0 \text{ avec}$$

### 2.1.3 Conclusion

Donc, pour détecter les contours, nous avons 2 solutions :

- Calculer le gradient et vérifier si le point est maxima dans la direction du vecteur gradient.
- Calculer le laplacien et vérifier s'il y a un passage par zéro dans son voisinage.

En traitement d'image, on utilise couramment les différences finies pour calculer les opérateurs différentiels. A la fois pour obtenir une fonction continue différentiable et pour réduire le bruit, l'image est habituellement lissée avant ou simultanément aux calculs de gradient ou laplacien.

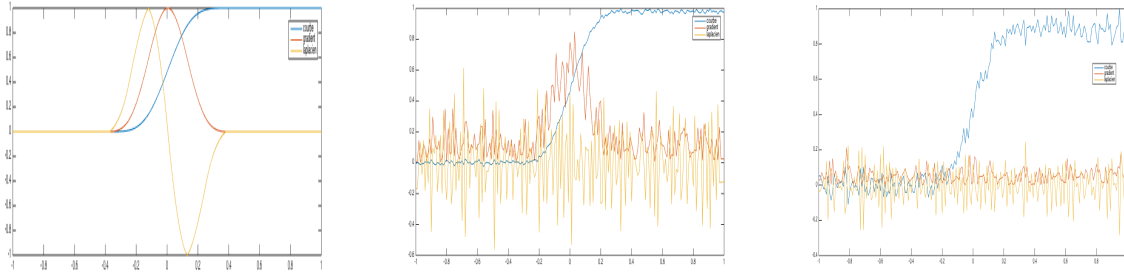


FIGURE 6 – Detections par opérateurs différentiels : en bleu, l'intensité, en rouge, le gradient, en jaune le laplacien. A gauche : sans bruit, au milieu : bruit faible, à droite : bruit fort

## 2.2 Opérateurs différentiels du premier ordre

### 2.2.1 Gradient discret

Plusieurs approximations discrètes permettent de calculer le gradient d'une image. Elles sont basées sur les développements limités :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) \quad \text{et} \quad f(x-h) = f(x) - hf'(x)$$

$$\text{d'ou } \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{(f(x+h)-f(x))}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \frac{(f(x+h)-f(x-h))}{2h}$$

Implantés sous forme de masques, ces approximations deviennent des convolutions avec des masques  $[-1 \ 1]$  ou  $[-1 \ 0 \ 1]$  pour la direction x et leurs transposées pour la direction y.

Notons que les opérations successives de lissage et de gradient par convolution peuvent être obtenues par une seule opération de convolution du fait de la propriété des convolutions :  $Lissage * (Gradient * I) = (Lissage * Gradient) * I = (Gradient * Lissage) * I = Gradient * (Lissage * I)$ .

Par exemple, les gradients de Sobel et de Prewitt peuvent être obtenus de la manière suivante :

	$lissage * gradient_x = masqueM1$	$gradient_y * lissage = masqueM2$
Prewitt	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Sobel	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En 2D, les deux masques  $M_1$  et  $M_2 = M_1^t$  permettant le calcul des deux composantes  $G_x$  et  $G_y$  :

$$G_x(i, j) = (M_1 * I)(i, j)$$

$$G_y(i, j) = (M_2 * I)(i, j)$$

où  $*$  est le produit de convolution

Le module et l'orientation de ce vecteur gradient  $\vec{G}$  sont alors obtenus par :

$$\|\vec{G}\| = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad \text{et} \quad \phi = \arctg\left(\frac{G_y}{G_x}\right)$$

### 2.2.2 Extraction des contours à partir du gradient

Pour extraire les contours, il faut ensuite prendre les pixels dont le module de gradient est maximum localement dans la direction du gradient. En pratique, il convient de mettre à ZERO les points qui ne sont pas des maxima locaux dans la direction du gradient donné par les valeurs du vecteur  $G_x(i, j)$  et  $G_y(i, j)$ .

On compare donc le gradient au point  $x, y$  aux gradients des points P1 et P2 de coordonnées  $x + \vec{g}_x, y + \vec{g}_y$  et  $x - \vec{g}_x, y - \vec{g}_y$ , en supposant le vecteur gradient  $(g_x \ g_y)^T$  normé. Comme le support image est discret, les points P1 et P2 ne sont pas de coordonnées entières et n'existent donc pas dans notre tableau 2D. Deux solutions :

1. Pour plus de précision, il faut interpoler les valeurs du module du gradient aux points P1 et P2 qui sont :

$$\begin{aligned} \|\vec{\nabla} P1(i, j)\| &= \frac{G_y(i, j)}{G_x(i, j)} \cdot \|\vec{\nabla} I(i, j - 1)\| + \frac{G_x(i, j) - G_y(i, j)}{G_x(i, j)} \cdot \|\vec{\nabla} I(i + 1, j)\| \\ \|\vec{\nabla} P2(i, j)\| &= \frac{G_y(i, j)}{G_x(i, j)} \cdot \|\vec{\nabla} I(i, j + 1)\| + \frac{G_x(i, j) - G_y(i, j)}{G_x(i, j)} \cdot \|\vec{\nabla} I(i - 1, j)\| \end{aligned}$$

2. Sans interpolation, on teste les valeurs des pixels dans la direction (0,45,90,135 degrés) la plus proche de l'orientation du vecteur gradient  $G_x(i, j)$  et  $G_y(i, j)$ .

Si le gradient au point  $x, y$  est supérieur aux valeurs de gradient aux points P1 et P2, c'est un maxima local dans la direction du gradient et le point est conservé. Sinon, il n'est pas maxima local et il est supprimé.

L'étape suivante consiste à déterminer quels sont les points dont le gradient est suffisamment fort. La version simple utilise un seuillage qui sélectionne les valeurs fortes du gradient parmi les pixels dont le gradient n'est pas nul. Les valeurs faibles de gradient correspondent en effet au bruit de l'image. La version plus élaborée est un seuillage par hysteresis. Le seuil haut  $s_{haut}$  détermine les gradients dont on est sûr qu'ils correspondent à un contour. Le seuil bas  $s_{bas}$  correspond aux pixels dont le gradient est trop faible pour que l'on soit sûr d'être sur un contour, mais dont la valeur est cependant plus forte que le bruit. Ils seront considérés comme point de contours s'ils sont voisins d'un point de contours. L'algorithme est le suivant ;

pour chaque pixel (x,y) du gradient :

- si  $G(x, y) > s_{haut}$  alors (x,y) est un point de contour
- si  $s_{bas} < G(x, y) < s_{haut}$  alors (x,y) est un point de contour si et seulement s'il est voisin d'un autre point de contour
- si  $G(x, y) < s_{bas}$  (x,y) n'est pas un point de contour

## 2.3 Opérateurs différentiels du deuxième ordre

### 2.3.1 Laplacien discret

Le laplacien est l'opérateur de second ordre le plus fréquemment utilisé à cause de sa simplicité. Il peut être approximé de la même façon que le gradient par des convolutions discrètes entre l'image et un des masques suivant :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme il est très sensible au bruit, il est souvent précédé par un lissage gaussien et devient le laplacien

de gaussienne ou filtre LoG (Laplacian of Gaussian) :

$$\Delta G_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left( \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}$$

### 2.3.2 DOG : Différence Of Gaussian

Le lissage d'une image suivi par un opérateur laplacien (laplacien de gaussienne) peut être approximé par la différence entre deux lissages  $H_1(x, y)$  (lissage fort) et  $H_2(x, y)$  (lissage faible) de la même image (figure 7). Cet opérateur est connu sous le nom de Difference Of Gaussian. Le rapport entre les 2 écarts types des filtres de lissage est généralement pris à 1,6. On peut implanter efficacement ce filtre avec la FFT.

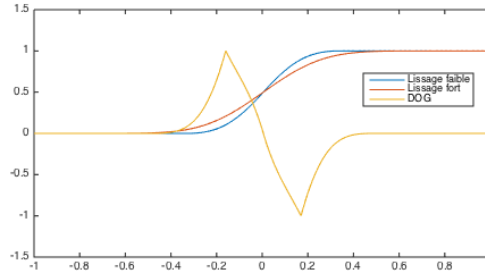


FIGURE 7 – Détections par DOG : en bleu, lissage faible, en rouge, en jaune le laplacien

### 2.3.3 Opérateurs laplacien, lissage et FFT

Le laplacien est un filtre passe haut, qui conserve donc les hautes fréquences en éliminant les composantes basses fréquences. En supposant que le bruit est une haute fréquence, les zones constantes des basses fréquences et les contours des fréquences moyennes, il est possible d'isoler les contours et de faire un filtrage simultanément dans le plan fréquentiel en utilisant un filtre passe bande.

En posant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et  $\Delta G_\sigma(r) = \frac{1}{\pi\sigma^4} \left( \frac{r^2}{2\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ , la FFT du LOG est :

$$\mathcal{F}(\Delta G_\sigma)(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)\mathcal{F}(G_\sigma) = -4\pi^2(u^2 + v^2)e^{-2\pi^2\sigma^2(u^2 + v^2)}$$

On constate effectivement que dans le domaine fréquentiel, la TF du LoG est non nulle sur une couronne (figure 8 à droite). Comme dans le cas du lissage, il suffit donc de multiplier la FFT de l'image par le filtre passe bande dont la TF est :  $\mathcal{F}(\Delta G_\sigma)(u, v)$ .

Ce filtre passe bande fait donc simultanément un lissage gaussien de paramètres  $\sigma$  et un calcul du laplacien. On peut aussi utiliser à la place de ce filtre passe-bande un filtre idéal dont la TF est une couronne de valeur 1 comprise entre les rayons R1 et R2 de valeur nulle ailleurs et qui ne conserve que les fréquences entre R1 et R2. La FFT inverse du produit de ce filtre passe-bande par la FFT de l'image nous donne ensuite l'image du laplacien.

$$\Delta I_\sigma(x, y) = TF^{-1}(TF(I(x, y)) \times TF(\Delta G_\sigma))$$

Remarque : Attention, ces images de laplacien contiennent des valeurs négatives.

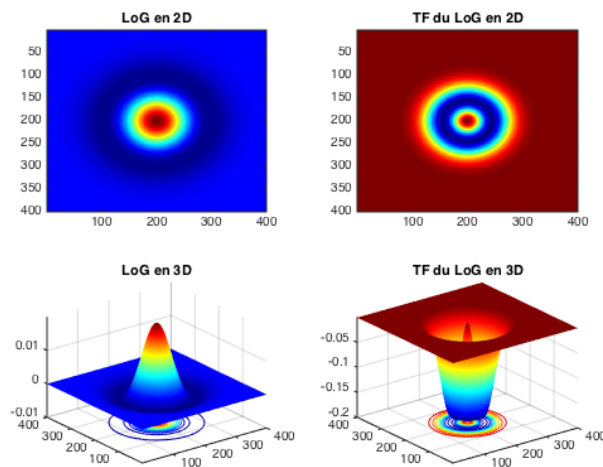


FIGURE 8 – Filtre LOG et sa FFT

### 2.3.4 Extraction des contours

Pour extraire les contours après avoir calculé le laplacien, il faut ensuite détecter les passages par zéro du laplacien. Du fait de la discrétisation, la valeur nulle n'est presque jamais présente et il faut donc détecter les passages du positif au négatif (et réciproquement) entre 2 points d'un voisinage  $2 \times 2$  : on teste le passage par zéro entre les pixels de coordonnées  $i, j$  et  $i + 1, j$  et le passage par zéro entre les pixels de coordonnées  $i, j$  et  $i, j + 1$ .

### 2.3.5 Travail à réaliser

Implanter une détection de contour par :

- un opérateur du premier ordre = le calcul du gradient par une convolution spatiale (Sobel ou Prewitt) ainsi que la détection par seuillage du module du gradient des points de contours.
- un opérateur du deuxième ordre = le calcul du laplacien (par une convolution spatiale ou par DOG ou par FFT) ainsi que l'extraction de contours par passage par zéro.
- Comparaison = Comparer les détections/Extraction de contours par gradient et par laplacien d'un point de vue qualitatif. Quelles sont les propriétés de chacune des méthodes.

## 2.4 Principales fonctions d'entrées sorties, de création et conversion

- Lecture d'image 8bits dans un fichier pgm : `unsigned char ** lectureimagepgm(char *name, int* prows, int* pcols)`  
Lecture dans le fichier "filename" de format pgm d'une image en niveau de gris de \*prows lignes et \*pcols colonnes. Le nombre de ligne et de colonnes est lu dans le fichier "filename". L'image est créée dynamiquement, les pixels remplis puis l'image est retournée. Retourne NULL en cas d'echec
- Sauvegarde d'image 8 bits dans un fichier pgm : `void ecritureimagepgm(char *name, unsigned char **im, int rows, int cols)`  
Sauvegarde dans le fichier "filename" de format pgm d'une image en niveau de gris de rows lignes et cols colonnes. Les nombres de lignes et colonnes doivent être connus. L'image est créée dynamiquement, les pixels remplis puis l'image retournée.
- Lecture d'image 8bits dans un fichier pgm : `double** lectureimagedoubleraw( char *filename, int`

- rows, int cols)  
Lecture dans le fichier "filename" de format raw d'une image de réels de rows lignes et cols colonnes. Le nombre de ligne et de colonnes est lu dans le fichier "filename". L'image est créée dynamiquement, les pixels remplis puis l'image est retournée. Retourne NULL en cas d'échec
- Sauvegarde d'image de réels dans un fichier raw : void `ecritureimagedoubleraw(char *filename, double **im, int rows, int cols)`  
Sauvegarde dans le fichier "filename" de format raw (ie seulement les données images, pas d'entete) d'une image de réels double de rows lignes et cols colonnes.
- Creation dynamique d'image d'octets : unsigned char \*\*`alloue_image(int nl, int nc)`  
Allocation dynamique d'un tableau 2D d'octets de nl lignes et nc colonnes. Retourne l'image ainsi créée. La zone de données image est allouée en une seule allocation ce qui permet d'utiliser indifféremment les notations `im[i][j]` avec  $0 \leq i < n$  et  $0 \leq j < nc$  ou `(*im)[k]` avec  $0 \leq k < nl * nc$  pour parcourir l'image.
- libération d'image : void `libere_image(unsigned char** im)`  
libere la mémoire allouée pour l'image im.
- Creation dynamique d'image de réels double précision : double \*\* `alloue_image_double(int nl, int nc)`  
idem précédemment mais pour une image contenant des réels double précision
- Conversion d'image d'octets en image de réels double précision : double\*\* `imuchar2double(unsigned char **im, int nl, int nc)`  
Crée une image de double et recopie l'image d'octets
- Conversion d'image de réels double précision en image d'octets : unsigned char\*\* `imdoubl2uchar(double** im, int nl, int nc)`  
Crée une image d'octets et recopie l'image de réels SANS mise à l'échelle. Attention aux dépassements de capacité des octets.
- Recopie d'une partie d'image : unsigned char\*\* `crop(unsigned char **im, int oi, int oj, int fi, int fj)`  
Recopie la partie comprise entre les indices (oi,oj) et (fi,fj) dans une nouvelle image allouée dynamiquement. Retourne cette nouvelle image.

## 2.5 Principales fonctions liées à la FFT

- Puissance de 2 : int `nextpow2( double num )`  
Détermine la puissance de 2 juste supérieure ou égale à num
- Puissance de 2 : int `ispowerof2(double num)`  
vrai si num est une puissance de 2
- Transformée de fourrier rapide et inverse : int `fft( double** ims_reel, double** ims_imag, double** imd_reel, double** imd_imag , int dimx, int dimy)`  
Calcul la FFT de l'image complexe (partie réelle `ims_reel` et imaginaire `ims_imag`). Le résultat complexe est donné par les images partie réelle `imd_reel` et imaginaire `imd_imag` Les dimensions `dimx` et `dimy` doivent être des puissances de 2.
- Transformée de fourrier rapide et inverse : int `ifft( double** ims_reel, double** ims_imag, double** imd_reel, double** imd_imag , int dimx, int dimy)`  
idem, mais transformée inverse
- Echange des quadrants de la fft : void `fftshift( double** imsr, double** imsi, double** imdr, double** imdi, int nl, int nc )`  
Centre la transformée de fourrier au milieu de l'image
- Cree une image de reels dont les dimensions sont des puissances de 2 : double\*\* `padimdforfft(double** im, int* pnl, int* pnc)`  
Si les dimensions \*pnl, \*pnc ne sont pas des puissances de 2, crée une image dynamique de taille 2k, copie l'image initiale de réels double précision et complète par des zéros. Change les valeurs \*pnl, \*pnc. Retourne la nouvelle image créée.
- Cree une image d'entiers dont les dimensions sont des puissances de 2 : double\*\* `padimucforfft(unsigned char** im, int* pnl, int* pnc)`  
Idem, mais pour une image d'octets.

## 2.6 Fonctions utilitaires

- PSNR :double psnr(unsigned char \*\*im1, unsigned char \*\*im2, int nl, int nc);  
Détermine le PSNR de deux images de type unsigned char
- PSNR :double psnr\_double(double \*\*im1, double \*\*im2, int nl, int nc);  
Détermine le PSNR de deux images de type double
- EQM : double eqm(unsigned char \*\*im1, unsigned char \*\*im2, int nl, int nc);  
Détermine l'écart quadratique moyen entre deux images de type unsigned char
- EQM : double eqm\_double(double \*\*im1, double \*\*im2, int nl, int nc);  
Détermine l'écart quadratique moyen entre deux images de type double
- Norme :double\*\* norme(double\*\* real, double\*\* imag, int nl, int nc)  
Détermine le module d'une image de complexes
- Phase :double\*\* phase(double\*\* real, double\*\* imag, int nl, int nc)  
Détermine la phase d'une image de complexes
- Hamming :double\*\* hamming\_double(double\*\* im, double\*\* res,int nl, int nc)  
Détermine le produit de l'image de double avec une fenêtre de Hamming. Si le paramètre res est NULL, crée une nouvelle image.
- Hamming :double\*\* hamming\_uc(unsigned char \*\* im, double\*\* res,int nl, int nc)  
Détermine le produit de l'image de double avec une fenêtre de Hamming.

## 2.7 Exemple de code d'ES

```

1  #include "pgm.h"
2      /*
3          Calcul de l'inverse video d'une image.
4          Si le parametre sortie est NULL, on cree une nouvelle image.
5          On parcourt toute l'image ligen par ligne ,
6          colonne par colonne, on calcule son inverse video
7          et on retourne l'image ainsi modifiee
8      */
9  unsigned char** inverse( unsigned char** sortie , unsigned char** entree , int nl ,
10      int nc) { int i,j;
11      if (sortie==NULL) sortie=alloue_image(nl,nc);
12      for(i=0; i<nl; i++)
13          for(j=0; j<nc; j++)
14              sortie[i][j]=255-entree[i][j];
15      return sortie;
16  }
17      /*
18          Exemple de code avec Entrees Sortie et transformations d'images
19          S'utilise sous la forme "exemple tangram.pgm res.pgm"
20      */
21  main (int ac, char **av) {
22      /* av[1] contient le nom de l'image, av[2] le nom du resultat . */
23      int nb,nl,nc, oldnl,oldnc;
24      unsigned char **im2=NULL,** im1=NULL;
25
26      if (ac < 2) {printf("Usage : %s entree sortie \n",av[0]); exit(1); }
27      // Lecture d'une image pgm dont le nom est passe sur la ligne de commande
28      im1=lectureimagepgm(av[1],&nl,&nc);
29      if (im1==NULL) { puts("Lecture image impossible"); exit(1); }
30      /* Calcul de son inverse video */
31      im2=inverse(NULL,im1,nl,nc);
32      /* Sauvegarde dans un fichier dont le nom est passe sur la ligne de
          commande */

```

```

33     ecritureimagepgm(av[2], im2, nl, nc);
34 }

```

## 2.8 Exemple de code avec FFT

```

1  #include "pgm.h"
2      /*
3          Exemple de code avec FFT
4          S'utilise sous la forme "exemple tangram.pgm res.pgm"
5      */
6  main (int ac, char **av) {
7      /* av[1] contient le nom de l'image, av[2] le nom du resultat . */
8      int nb,nl,nc, oldnl,oldnc;
9      unsigned char **im2=NULL,** im1=NULL;
10     double** im4,** im5, ** im6, ** im7, **im8, **im9,**im10;
11
12     if (ac < 3) {printf("Usage : %s entree sortie \n",av[0]); exit(1); }
13     /* Lecture d'une image pgm dont le nom est passe sur la ligne de commande
14         */
15     im1=lectureimagepgm(av[1],&nl,&nc);
16     if (im1==NULL) { puts("Lecture image impossible"); exit(1); }
17     /* Passage en reels */
18     double**im3=imuchar2double(im1,nl,nc);
19     oldnl=nl; oldnc=nc;
20     /* la fft demande des puissances de 2. On padde avec des 0, mais les
21         dimensions nl et nc changent */
22     im7=padimdforfft(im3,&nl,&nc);
23     /* On peut aussi directement utiliser
24         im7=padimucforfft(im1,&nl,&nc);
25         sans convertir im1 en image de reels
26     */
27     // Creation des images pour les parties reelles et imagianires des fft
28     im4=alloue_image_double(nl,nc);
29     im5=alloue_image_double(nl,nc); i
30     im6=alloue_image_double(nl,nc);
31     /* Clacul de la fft de im7,im4 */
32     fft(im7,im4,im5,im6,nl,nc);
33     /* Creation des parties reelles et imagianires des fft inverses */
34     im9=alloue_image_double(nl,nc);
35     im10=alloue_image_double(nl,nc);
36     /* Clacul de la fft inverse de im5,im6 */
37     ifft(im5,im6,im9,im10,nl,nc);
38     /* Conversion en entier8bits de la partie reelle de la fftinverse,
39         Suppresion des 0 qui ont servi a completer avec la fonction crop
40         Sauvegarde au format pgm de cette image identique a 'linverse video
41         car on a realise la suite fftinv(fft(image))*/
42     ecritureimagepgm(av[2], crop(imdouble2uchar(im9,nl,nc),0,0,oldnl,oldnc),oldnl,
43         oldnc);
44 }

```