Devoir de vacances n° 7

Le groupe de Weyl F_4

Définitions et notations :

- Dans tout le problème, on se place dans un espace euclidien E de dimension 4, muni d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4). Le produit scalaire est noté $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$.
- On considère les parties de E suivantes :
  - $R_1 = \{\varepsilon e_i \,/\, 1 \leq i \leq 4, \varepsilon = \pm 1\}$;
  - $R_2 = \{\varepsilon_i e_i + \varepsilon_j e_j \,/\, 1 \leq i < j \leq 4, \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_j = \pm 1\}$;
  - $R_3 = \left\{ \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i e_i \,/\, \forall\, i \in [[1, 4]], \varepsilon_i = \pm 1 \right\}$.
- On pose $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ et l'on note G l'ensemble des éléments f du groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$ tels que $f(R) \subset R$.
- Pour tout vecteur non nul u de E, on désigne par s_u la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $\left(\mathbb{R}u\right)^{\perp}$.
- Si X est une partie finie non vide de E, on note $W(X)$ l'ensemble des produits finis $s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_r}$, où $r \in \mathbb{N}^*$ et où les u_i sont des vecteurs non nuls de X.

Objectif :

Le but de ce problème est de montrer que G est un groupe engendré par un nombre fini de réflexions et de déterminer son cardinal. Ce groupe, traditionnellement noté F_4, est un des *groupes de Coxeter* exceptionnels. [1]

I. - Généralités

.

1. On considère un vecteur non nul u de E.
   Montrer que, pour tout $x \in E$, $s_u(x) = x - 2\dfrac{\langle u, x \rangle}{||u||^2} u$.
2. On considère un partie finie non vide X de E.
   Montrer que $W(X)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.
3. Quels sont les cardinaux des ensembles R_1, R_2, R_3 et R ?
   Préciser la norme d'un vecteur de R_1, R_2, R_3.
4. On considère un élément $f \in G$.
   Montrer que $f(R) = R$ et que f induit une bijection de R sur lui-même.
   En déduire que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.
5. En observant que R contient la base (e_1, e_2, e_3, e_4), montrer que G est de cardinal fini.

1. Les groupes de la forme $W(X)$, engendrés par un nombre fini de réflexions d'un espace euclidien, sont appelés *groupes de Coxeter*. L'ensemble R est un exemple de ce qu'on appelle un *système de racines* : il conduit, comme ses semblables, à un groupe $W(R)$ qui est fini et qui est désigné dans la littérature comme un *groupe de Weyl* (du système de racines R). On peut dresser un classification complète des systèmes de racines et en déduire une classification des groupes de Weyl. Cette classification comprend, outre trois « familles » infinies naturelles, cinq groupes exceptionnels dont F_4, qui fait l'objet du présent problème. Il existe cependant d'autres groupes de Coxeter que les groupes de Weyl qui soient finis.

6. On considère un élément $f \in \mathcal{O}(E)$.
   Montrer que $f \in G$ si et seulement si $f(R_2) = R_2$.
   [*Indication : on pourra vérifier que les éléments de $R_1 \cup R_2$ sont exactement les demi-sommes d'éléments de R_2 qui sont unitaires.*]

II. - Un sous-groupe de G

On note H le sous-groupe de G formé des éléments f tels que $f(R_1) = R_1$.

1. Décrire les éléments de H et déterminer le cardinal de H.
2. Établir que $H = W\big(\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cup \{e_i - e_j \,/\, 1 \leq i < j \leq 4\}\big) = W(R_1 \cup R_2)$.

III. - G est un groupe de Coxeter

1. On considère $f \in G$ et l'on suppose qu'il existe $i \in [[1, 4]]$ tel que $f(e_i) \in R_1$.
   Montrer que $f \in H$.
2. On considère un vecteur $u = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i e_i$ élément de R_3.
   Déterminer les composantes de $s_u(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4).
3. On considère un élément $f \in G \backslash H$.
   Montrer qu'il existe $u \in R_3$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $s_u(e_1) = \varepsilon f(e_1)$.
4. Montrer que $G = W(R)$.

IV. - Le cardinal de G

1. On considère deux éléments u et v de R_3.
   Montrer que $s_u \circ s_v \in H$ si et seulement s'il existe $i \in [[1, 4]]$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $s_v(e_1) = \varepsilon s_u(e_i)$.
2. On considère un élément $u = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i e_i$ de R_3.
   Déterminer les valeurs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ dans $\{-1, 1\}$ telles que $v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \delta_i e_i$ vérifie $s_u \circ s_v \in H$.
3. Quel est le cardinal de G ?