MP*
2019 - 20

# Banque CCP 2019
# Exercices sur le programme de MPSI

## A - Analyse

**1** a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

**2** a) On considère les fonctions $g : x \mapsto e^{2x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définition respectifs.

b) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n$-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

**3** a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

b) On considère une application $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ et un réel $x_0 \in ]a,b[$.
On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

c) Prouver que l'implication : ( $f$ est dérivable en $x_0$ ) $\Longrightarrow$ ( $f'$ admet une limite finie en $x_0$ ) est fausse.
[ *Indication : on pourra considérer la fonction* $g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \textit{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$ .]

**4** a) On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs.
On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que : $(u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n) \Longrightarrow \big($les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature$\big)$.

b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n + i)\,\ln(n)\,\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$ (où $i$ désigne le nombre complexe de partie imaginaire positive et de carré égal à $-1$).

**5** a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4(x)$.

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3(x)$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

**6** On considère les deux équations différentielles $(H) : 2\,x\,y' - 3\,y = 0$ et $(E) : 2\,x\,y' - 3\,y = \sqrt{x}$.

a) Résoudre l'équation $(H)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) Résoudre l'équation $(E)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

c) L'équation $(E)$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$ ?

$\boxed{7}$ On considère un réel $x_0$ et on définit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = x_0$ et :
$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
a) $\alpha$. Démontrer que la suite $(u_n)$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de $x_0$, le sens de variations de $(u_n)$.
$\beta$. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
b) Déterminer l'ensemble des fonctions $h$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = h\big(\operatorname{Arctan}(x)\big)$.

$\boxed{8}$ On considère un nombre complexe $a$ et on note $E$ l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\, a\, u_{n+1} + 4\,(i\, a - 1)\, u_n$, avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.
a) $\alpha$. Prouver que $E$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
$\beta$. Déterminer, en le justifiant, la dimension de $E$.
b) Dans cette question, on considère la suite de $E$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel $n$, le nombre complexe $u_n$ en fonction de $n$.
[ *Indication : discuter suivant les valeurs de $a$.* ]

$\boxed{9}$ On considère la fonction $H$ définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.
a) Montrer que $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
b) Montrer que la fonction $u$ définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
c) En utilisant la fonction $u$ de la question b), calculer la limite en $1^+$ de la fonction $H$.

## B - Algèbre

$\boxed{10}$ On considère un entier naturel $n$ tel que $n \geq 2$.
On note $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à $n$.
On considère l'application $f : E \to E$ définie par : $\forall\, P \in E, f(P) = P - P'$.
a) Démontrer que $f$ est bijective de deux manières :
$\alpha$. sans utiliser de matrice de $f$ ;
$\beta$. en utilisant une matrice de $f$.
b) On considère un polynôme $Q \in E$.
Déterminer un polynôme $P$ tel que $f(P) = Q$.
[ *Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$ ?* ]

$\boxed{11}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme $f$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = A\, M$.
a) Démontrer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
b) $f$ est-il surjectif ?
c) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$ ?

**12** On considère un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_E = 0$.
a) Prouver que $f$ est bijectif et exprimer $f^{-1}$ en fonction de $f$.
b) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.
c) Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie.
Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

**13** Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels

$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et on désigne par $D_n$ le déterminant de $A_n$.

a) Démontrer que : $\forall\, n \geq 1, D_{n+2} = 2\,D_{n+1} - D_n$.
b) Pour $n \geq 1$, calculer $D_n$ en fonction de $n$.

**14** On considère un endomorphisme $f$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.
b) $\alpha$. Démontrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
$\beta$. Démontrer que : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

**15** On considère la projection vectorielle $p$ de $\mathbb{R}^3$, sur le plan $P$ d'équation $x + y + z = 0$ et parallèlement à la droite $D$ d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
b) On considère un vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de $p$ est diagonale.

**16** On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ muni d'un produit scalaire noté $\langle , \rangle$.
Pour $x \in E$, on pose $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.
a) $\alpha$. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$\beta$. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
b) On considère l'ensemble $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \,/\, \forall\, x \in [a,b], f(x) > 0\}$.
Prouver que l'ensemble $\left\{ \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt \,/\, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure $m$ et déterminer la valeur de $m$.

**17** On considère un espace euclidien $E$.
a) On considère un sous-espace vectoriel $A$ de $E$.
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
b) On considère deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$.
$\alpha$. Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
$\beta$. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

**18** On considère un espace euclidien $E$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de $x$ et de $y$ et $||\cdot||$ la norme euclidienne associée.
a) On considère un endomorphisme $u$ de $E$ tel que : $\forall\ x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
$\alpha$. Démontrer que : $\forall\ (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
$\beta$. Démontrer que $u$ est bijectif.
b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de $E$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
c) On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$.
Prouver que : $\big(u \in \mathcal{O}(E)\big) \Longleftrightarrow \big((u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de $E\big)$.

**19** On considère deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$.
a) On considère une fonction $h$ continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx = 0 \Longrightarrow h = 0$.
b) On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout couple $(f, g) \in E^2$ : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.
c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**20** On considère l'espace vectoriel $E$ des applications continues et $2\pi$ - périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Démontrer que $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $E$.
b) On considère le sous-espace vectoriel $F$ de $E$ engendré par les fonctions $f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \cos(2\,x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

**21** On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A, A') & \mapsto & \mathrm{tr}(A^T A') \end{array}$, où $A^T$ désigne la matrice transposée de $A$ et tr l'application trace.
On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
a) Démontrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.
b) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
d) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
e) Calculer la distance de $J$ à $\mathcal{F}$.

**22** On considère un espace préhilbertien $E$ et un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Démontrer que, pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $y_0$ de $F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à $F$ et que la distance de $x$ à $F$ soit égale à $||x - y_0||$.
b) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose : $\langle A, A'\rangle = a\,a' + b\,b' + c\,c' + d\,d'$.
$\alpha$. Démontrer que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
$\beta$. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $F$ des matrices triangulaires supérieures.

**23** a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner, en justifiant la réponse, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$, et préciser leur nombre.

c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

**24** a) On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et un réel $a$.

$\alpha$. Donner, sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\big(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\big)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\beta$. On considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.
Déduire de la question précédente que $a$ est une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $r$ si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et : $\forall\, k \in [[0, r-1]], P^{(k)}(a) = 0$.

b) Déterminer deux réels $a$ et $b$ pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + a\,X^2 + b\,X$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

**25** a) On considère un triplet d'entiers $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$.
Prouver que, si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (a\,b) = 1$.

b) On considère un nombre premier $p$.

$\alpha$. On considère un entier $k \in [[1, p-1]]$.
Prouver que $p$ divise $\displaystyle\binom{p}{k}\, k!$, puis en déduire que $p$ divise $\displaystyle\binom{p}{k}$.

$\beta$. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \bmod p$.
[*Indication : on pourra procéder par récurrence.*]

$\gamma$. En déduire, pour tout entier naturel $n$, que : $\big(p$ ne divise pas $n\big) \Longrightarrow \big(n^{p-1} \equiv 1 \bmod p\big)$.

**26** On considère $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts.

a) Montrer que, si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P$ vérifiant $\deg(P) \leq n$ et : $\forall\, i \in [[0, n]], P(a_i) = b_i$.

b) On considère un entier $k \in [[0, n]]$.
Expliciter ce polynôme $P$, que l'on notera $L_k$, lorsque : $\forall\, i \in [[0, n]], b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$.

c) Prouver que : $\forall\, p \in [[0, n]], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p\, L_k = X^p$.

**27** On considère un entier $n \geq 2$ et on pose $z = e^{i\,\frac{2\pi}{n}}$.

a) On considère un entier $k \in [[1, n-1]]$.
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z^k - 1$.

b) On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$.
Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\left(\frac{\pi}{2\,n}\right)}$.

$\boxed{28}$ On considère trois scalaires distincts $a_1, a_2, a_3$ d'un corps $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphime d'espaces vectoriels.

b) On note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose : $\forall\, k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

$\alpha$. Justifier que $(L_1, L_2, L_3)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

$\beta$. Exprimer les polynômes $L_1$, $L_2$ et $L_3$ en fonction de $a_1$, $a_2$ et $a_3$.

c) On considère un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$.
Déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $(L_1, L_2, L3)$.

d) Application : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$ et $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points $A$, $B$ et $C$.

$\boxed{29}$ On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $E = \mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$.
On pose, pour tout $(A, B) \in E^2$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$, où tr désigne la trace et $A^T$ désigne la transposée de la matrice $A$.

a) Prouver que l'application $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $E$.

b) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $E$.
Une matrice $A$ de $E$ est dite *antisymétrique* lorsque $A^T = -A$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $E$.

$\alpha$. Justifier que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$.

$\beta$. Prouver que $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$\gamma$. Prouver que $\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^{\perp} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) On considère l'ensemble $F$ des matrices diagonales de $E$.
Déterminer $F^{\perp}$.

$\boxed{30}$ a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

b) On considère deux entiers naturels $a$ et $b$ premiers entre eux et un entier naturel $c$.
Prouver que : $\big(a \,|\, c \text{ et } b \,|\, c\big) \Longleftrightarrow \big(a\, b \,|\, c\big)$.

c) On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 \bmod 17 \\ x \equiv 4 \bmod 15 \end{cases}$ dans lequel l'inconnue $x$ appartient à $\mathbb{Z}$.

$\alpha$. Déterminer une solution particulière $x_0$ de $(S)$ dans $\mathbb{Z}$.

$\beta$. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système $(S)$.

## C - Probabilités

31 Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et, pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
$\alpha$. Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.
$\beta$. Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.

b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
$\alpha$. Déterminer la loi de $X$.
$\beta$. Déterminer la loi de $Y$.

32 a) Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers $n$ correspondants distincts.
On admet que les $n$ appels constituent $n$ expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p$ (avec $p \in ]0,1[$).
On note $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
Donner la loi de $X$. Justifier.

b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels.
On note $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
$\alpha$. On considère un entier $i \in [[0,n]]$.
Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{X=i\}}(\{Y=k\})$.
$\beta$. Prouver l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$, où $n$, $k$ et $i$ sont trois entiers naturels tels que $i \leq k \leq n$.
$\gamma$. Prouver que la variable aléatoire $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminer le paramètre.
$\delta$. Déterminer l'espérance et la variance de $Z$.

33 a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) On considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que : $\forall\, a \in ]0,+\infty[$, $\mathbb{P}\Big(\Big\{\Big|\dfrac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\Big|\Big\} \geq a\Big) \leq \dfrac{\mathbb{V}(Y_1)}{n\,a^2}$.

c) Application : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ?
[ *Indication : on pourra considérer la suite* $(Y_i)$ *de variables aléatoires de Bernoulli où* $Y_i$ *mesure l'issue du i-ème tirage.* ]

**34** On considère un entier naturel $n \geq 3$.
On dispose de $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les $n$ boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les trois compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les $n$ boules.
On note $X$ la variable aléatoire qui, à chaque expérience aléatoire, fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
a) Préciser les valeurs prises par $X$.
b) $\alpha$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\{X=2\})$.
$\beta$. Achever de déterminer la loi de probabilité de $X$.
c) $\alpha$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
$\beta$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$.
Interpréter ce résultat.

**35** a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
b) On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
$\alpha$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
$\beta$. On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé $n$ fois et on obtient $n$ fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?
$\gamma$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.
Interpréter ce résultat.

**36** On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.
L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie ;
- on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient ;
- si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$ ; sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n$-ième triage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.
a) Calculer $p_1$.
b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}\, p_n + \dfrac{4}{7}$.
c) En déduire, pour tout entier naturel non nul $n$, la valeur de $p_n$.

**37** Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules blanches numérotées de 1 à $n$ et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage, une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note $Y$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

a) Déterminer la loi de $X$.

b) Déterminer la loi de $Y$.

**38** On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble $E$ possédant $n$ éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.

a) Déterminer le nombre $a$ de couples $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$ tels que $A \subset B$.

b) Déterminer le nombre $b$ de couples $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

c) Déterminer le nombre $c$ de triplets $(A, B, C) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^3$ tels que $A$, $B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.