Mathématiques : Calcul intégral

Lucas Tabary

1 Étude des variations de la fonction proposée

On considère la fonction f définie ci-après et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto (x+2)e^{-x} \end{cases}$$

Recherchons les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes du repère, soient les points $A(0\,;\,f(0))$ et $B(\alpha\,;\,0)$, avec α tel que $f(\alpha) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} & f(0) = (0+2)e^{-0} = 2 \times 1 = 2 \\ & f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \because \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \neq 0 \end{aligned}$$

Les points $A(0\,;\,2)$ et $B(-2\,;\,0)$ sont donc les intersections de $\mathscr{C}$ avec respectivement l'axes des ordonnées et des abscisses dans le plan. Étudions maintenant les limites de la fonction en $-\infty$ et en $+\infty$. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} x+2 = -\infty \,; \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \quad \therefore \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{-x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} -xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0 \quad \therefore \lim_{x\to\infty} (x+2)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} + 2e^{-x} = 0$$

Par limite de produit, de somme et de fonction composée. On en déduit l'existence d'une droite d'équation $y = 0$, asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Déterminons les variations de la fonction, en considérant sa fonction dérivée associée f' sur $\mathbb{R}$, telle que : $f'(x) = e^{-x} + (x+2)(-e^{-x}) = (-x-1)e^{-x}$. Cherchons les éventuelles valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule, ainsi que les intervalles sur lesquels elle est positive.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (-x-1)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -x-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \because \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

On a par ailleurs $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e$. Construisons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Figure 1 – Tableau de variations de la fonction d'étude f.

2 Calcul de l'aire sous $\mathscr{C}$

On cherche à déterminer l'aire délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$. On notera cette aire a et on a, puisque f est positive sur $[0\,;\,1]$:

$$a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

2.1 Calcul par approximation

On réalisera une première approximation de a en découpant l'aire sous la courbe en un nombre arbitrairement grand n de rectangles de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(x_0)$, avec x_0 l'abscisse du point le plus à gauche du rectangle. On note a_n l'aire obtenue par cette approximation. L'expression de a_n est donc :

$$n \in \mathbb{N}_* \quad a_n = \frac{1}{n} \times f(0) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On considère l'algorithme donné à la figure 2, basé sur l'expression donnée ci-dessus.

```
Variables :
n, k : nombres entiers naturels
S : nombre réel

Initialisation :
S prend la valeur 0
Demander la valeur de n

Traitement :
Pour k allant de 0 à n - 1
S prend la valeur S + f(k/n)
Fin pour
S prend la valeur S/n

Sortie :
Afficher S
```

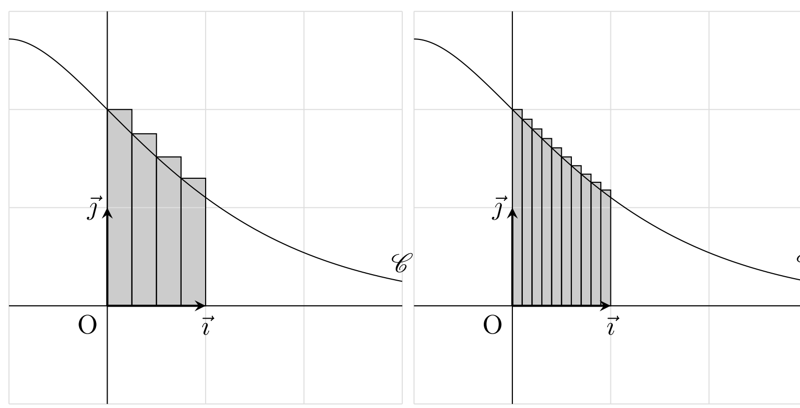

FIGURE 2 – Algorithme calculant a_n pour n donné. Les parties grisées des graphiques suivants représentent respectivement a_4 et a_{10}.

Cet algorithme renvoie par exemple les valeurs suivantes :

$$a_4 = \frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] \simeq 1{,}642\ ; \quad a_{10} = \frac{1}{10}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \cdots + f\left(\frac{9}{10}\right)\right] \simeq 1{,}574$$

2.2 Utilisation d'une primitive de f

On désire maintenant trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$, qu'on notera F ; afin de calculer a. Soient deux fonctions u et v définies et dérivables sur un intervalle I ainsi que deux réels a et b distincts appartenant à cet intervalle, avec $b > a$. On a :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (u'v + uv')(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow [(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

On fixe donc les fonctions suivantes :

$u : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto x+2 \end{cases}$ et $v : \begin{cases} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R}_- \\ x & \mapsto -e^{-x} \end{cases}$ ainsi que leurs dérivées associées sur $\mathbb{R}$: $u' : x \mapsto 1$ et $v' : x \mapsto e^{-x}$

On utilise l'équation (2) obtenue précédemment avec ces fonctions. On a :

$$\int_a^b (uv')(x)\mathrm{d}x = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_a^b (x+2)e^{-x}\mathrm{d}x = \left[(x+2)(-e^{-x})\right]_a^b - \int_a^b -e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b (x+2)e^{-x}\mathrm{d}x = \left[(-x-2)(e^{-x})\right]_a^b - \left[e^{-x}\right]_a^b = \left[(-x-2)(e^{-x}) - e^{-x}\right]_a^b = \left[(-x-3)(e^{-x})\right]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[(-x-3)(e^{-x})\right]_a^b = [F(x)]_a^b$$

On vérifie ensuite :

$$F'(x) = (-1)(e^{-x}) + (-x-3)(-e^{-x}) = -e^{-x} + (x+3)e^{-x} = (x+2)e^{-x} = f(x)$$

On en conclut qu'une primitive de f est de la forme $F(x) = (-x-3)e^{-x} + c$, $c \in \mathbb{R}$. À partir de cette fonction on peut calculer littéralement a, soit :

$$a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (-1-3)e^{-1} - (-0-3)e^0 = -4e^{-1} - (-3)$$

$$a = 3 - \frac{4}{e} \simeq 1{,}528$$

On note finalement ε_n l'écart de valeur entre a et a_n, c'est-à-dire l'erreur due à l'approximation faite par somme d'aire de rectangles. Soit :

$$\varepsilon_4 = a_4 - a \simeq 1{,}642 - 1{,}528 \simeq 0{,}113$$
$$\varepsilon_{10} = a_{10} - a \simeq 1{,}574 - 1{,}528 \simeq 0{,}045$$

Document réalisé avec LaTeX.