Théorème de Schnirelmann

Définitions et notations :

- Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n(A) = \mathrm{card}\big([\![1,n]\!] \cap A\big)$ et l'on appelle *densité de Schnirelmann* de A le réel $\sigma(A) = \inf \left\{ \dfrac{S_n(A)}{n} \,/\, n \geq 1 \right\}$.
- Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose $A + B = \{a + b \,/\, (a,b) \in A \times B\}$.

Objectif :

En théorie additive des nombres, on dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est une *base d'ordre* h de $\mathbb{N}$ si tout élément de $\mathbb{N}$ peut s'écrire comme la somme de h éléments de A.
Le théorème de Schnirelmann, établi en dernière question du problème, donne une condition suffisante simple pour qu'une partie de $\mathbb{N}$ soit une base. Ce résultat admet de nombreuses applications.

I. - Généralités, exemples

On considère une partie A de $\mathbb{N}$.

1. Justifier la définition de $\sigma(A)$.
2. Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?
3. À quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?
4. Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.
5. Calculer $\sigma(A)$ pour les parties A suivantes :
   a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$;
   b) A est l'ensemble des entiers impairs ;
   c) $A = \{k^s \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des puissances s-ièmes, où $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ est fixé.

II. - Théorème de Schnirelmann (1930)

1. On considère deux parties A et B de $\mathbb{N}$ qui contiennent 0.
   a) On considère un entier $n \geq 1$.
   Montrer que, si $S_n(A) + S_n(B) \geq n$, alors $n \in A + B$.
   b) En déduire que, si $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1$, alors $A + B = \mathbb{N}$.
   c) Prouver que, si $\sigma(A) \geq \dfrac{1}{2}$, alors A est une base de $\mathbb{N}$ d'ordre 2.
2. On considère deux parties A et B de $\mathbb{N}$ qui contiennent 0, la partie A étant infinie.
   On numérote $0 = a_0 < a_1 \ldots$ la suite croissante des éléments de A.
   a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$:
   $$S_n(A+B) \geq S_n(A) + \left(\sum_{i=0}^{S_n(A)-1} S_{a_{i+1}-a_i-1}(B) \right) + S_{n-a_{S_n(A)}}(B).$$

b) En déduire que $\sigma(A+B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)$.

c) Cette inégalité reste-t-elle vraie si A est finie ?

3. On considère $p\,(\geq 2)$ parties $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathbb{N}$ contenant 0.

   Montrer que : $1 - \sigma(A_1 + A_2 + \ldots + A_p) \leq \prod_{i=1}^{p} \big(1 - \sigma(A_i)\big)$.

4. Montrer qu'une partie A de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $\sigma(A) > 0$ est une base de $\mathbb{N}$.