DM N° 8 : Irrationalité de e

Lucas Tabary

Irrationnalité de la limite

Soient les suites $(u_n)_{n>0}$ et $(v_n)_{n>0}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Montrons que ces suites sont adjacentes pour prouver l'existence de leur limite. Déterminons donc :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Longrightarrow u_n \text{ est croissante} \\
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n \times n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{\frac{n+1}{n} \times (n+1)}{(n+1)(n+1)!} \\
&= \frac{n+2-\frac{(n+1)^2}{n}}{(n+1)(n+1)!} = -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \Longrightarrow v_n \text{ est décroissante} \\
u_n - v_n &= -\frac{1}{n \times n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par limite de quotient}
\end{aligned}$$

On en conclut que u et v sont adjacentes et ont pour limite commune $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < \lambda < v_n \tag{1}$$

Il est possible d'obtenir une première approximation avec une erreur ε de λ en déterminant le rang n tel que l'intervalle $[u_n,\, v_n]$, de longueur $\frac{1}{n \times n!}$, soit de longueur ε. Pour $\varepsilon = 10^{-4}$, on a, pour $n = 7$:

$$\frac{1}{7 \times 7!} \approx 2{,}83 \times 10^{-5} < 10^{-4} \Longrightarrow |u_7 - \lambda| < 10^{-4}$$

On considère maintenant l'inéquation (1) au rang $n+3$, en considérant de plus la décroissance de v. D'où :

$$u_{n+3} \leqslant \lambda \leqslant v_{n+3} \leqslant v_{n+1} \Longrightarrow -v_{n+1} \leqslant -\lambda \leqslant -u_{n+3} \Longrightarrow v_n - v_{n+1} \leqslant v_n - \lambda \leqslant v_n - u_{n+3} \tag{2}$$

À partir de cette équation, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^3 n!(v_n - v_{n+1}) \leqslant n^3 n!(v_n - \lambda) \leqslant n^3 n!(v_n - u_{n+3})$, développons les membres de gauche et de droite de cette inégalité.

$$n^3 n!(v_n - v_{n+1}) = \frac{n^3 n!}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$
\begin{aligned}
n^3 n!(v_n - u_{n+3}) &= n^3 n! \left(\frac{1}{n \times n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n+3} \frac{1}{k!} \right) = n^3 n! \left(\frac{1}{n \times n!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) \\
&= n^3 n! \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+3)!} - \frac{n(n+2)(n+3)}{n(n+3)!} - \frac{n(n+3)}{n(n+3)!} - \frac{n}{n(n+3)!} \right) \\
&= n^3 n! \left(\frac{(n+2)(n+3)[(n+1)-n] - n(n+3) - n}{n(n+3)!} \right) = n^3 n! \left(\frac{(n+3)[(n+2)-n] - n}{n(n+3)!} \right) \\
&= n^3 n! \times \frac{n+6}{n(n+3)!} = \frac{n^2(n+6)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}
$$

En appliquant le théorème des gendarmes avec l'inéquation (2), on obtient :

$$
\lim_{n\to\infty} n^3 n!(v_n - \lambda) = 1 \iff v_n - \lambda \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 n!} \iff v_n - \lambda = \frac{1}{n^3 n!} + o\left(\frac{1}{n^3 n!}\right)
$$

On en conclut qu'approximativement $|v_n - \lambda| = \frac{1}{n^3 n!}$, or pour $n = 5$, $\frac{1}{5 \times 5!} \approx 6{,}66 \times 10^{-5} < 10^{-4}$. On en déduit que le terme v_5 est égale à la limite avec une erreur inférieure à $\varepsilon = 10^{-4}$.

On pose maintenant, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n \cdot n! \cdot u_n$. Montrons par récurrence que a_n est un nombre entier. On a donc $H_n : a_n \in \mathbb{N}$. À $n = 1$, $a_1 = 1 \cdot 1! \times u_1 = 1 \in \mathbb{N}$. On suppose maintenant que pour n, H_n est vraie. On a :

$$
a_{n+1} = (n+1)(n+1)! \cdot u_{n+1} = (n+1)(n+1)! \left[u_n + \frac{1}{(n+1)!} \right] = (n+1)\left[(n+1)n! \cdot u_n + 1\right] = (n+1)((n+1)a_n + 1)
$$

Or $a_n \in \mathbb{N}$, la somme et la multiplication étant stables dans $\mathbb{N}$, on en déduit $a_{n+1} \in \mathbb{N}$. Donc H_{n+1} est vraie, est d'après le principe de raisonnement par récurrence, $\forall n \geqslant 1$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Reprenons l'équation (1), on a :

$$
\forall n \geqslant 1,\, u_n < \lambda < v_n \iff \frac{n \cdot n!}{n \cdot n!} u_n < \lambda < \frac{n \cdot n!}{n \cdot n!}\left(u_n + \frac{1}{n \cdot n!}\right) \iff \frac{a_n}{n \cdot n!} < \lambda < \frac{n \cdot n! \cdot u_n + 1}{n \cdot n!} = \frac{a_n + 1}{n \cdot n!} \qquad (3)
$$

Montrons par l'absurde que λ est irrationnel. Supposons donc que : $\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists (p,\, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\, q \neq 0,\, \lambda = \frac{p}{q}$. Injectons l'expression de λ dans l'inéquation (3). Celle-ci est vraie pour toute valeur de n positive, en particulier pour $n = q$. On a donc :

$$
\frac{a_q}{q \cdot q!} < \frac{p}{q} < \frac{a_q + 1}{q \cdot q!} \Longrightarrow a_q < p \cdot q! < a_q + 1 \Longrightarrow p \cdot q! \in]\!]a_q,\, a_q + 1[\![= \varnothing
$$

Ce qui est absurde. On en déduit que l'hypothèse initiale est fausse, par conséquent $\boxed{\lambda \notin \mathbb{Q}}$.

Valeur de la limite

On pose :

$$
\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall p \in [\![2,\, n]\!],\, \mathcal{K}(n,\, p) = \prod_{k=1}^{p-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)
$$

Démontrons premièrement par récurrence sur $p \in [\![2,\, n]\!]$, $H_p : 0 \leqslant 1 - \mathcal{K}(n,\, p) \leqslant \frac{p(p-1)}{2n}$. On prendra $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 2$:

$$
1 - \mathcal{K}(n,\, 1) = 1 - \prod_{k=1}^{1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \geqslant 0 \quad \text{ et } \quad \frac{2(2-1)}{2n} = \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n}
$$

H_2 est donc vraie. on suppose maintenant que pour $p \geqslant 2$, H_p est vraie, d'où :

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant 1 - \mathcal{K}(n,\, p) \leqslant \frac{p(p-1)}{2n} &\iff 0 \leqslant \left(1 - \frac{p}{n}\right)[1 - \mathcal{K}(n,\, p)] \leqslant \left(1 - \frac{p}{n}\right)\frac{p(p-1)}{2n} \qquad \because p \leqslant n \Rightarrow 0 < 1 - \frac{p}{n} < 1 \\
&\iff 0 \leqslant 1 - \frac{p}{n} - \mathcal{K}(n,\, p+1) \leqslant \left(1 - \frac{p}{n}\right)\frac{p(p-1)}{2n} \leqslant \frac{p(p-1)}{2n} \\
&\iff 0 \leqslant \frac{p}{n} \leqslant 1 - \mathcal{K}(n,\, p+1) \leqslant \frac{p}{n} + \frac{p^2 - p}{2n} = \frac{p^2 + p}{2n} = \frac{(p+1)p}{2n}
\end{aligned}
$$

H_{p+1} est donc vraie. D'après le principe de raisonnement par récurrence, on obtient donc :

$$\forall n > 0,\ \forall p \in [\![2,\ n]\!],\ 0 \leqslant 1 - \mathcal{K}(n,\ p) \leqslant \frac{p(p-1)}{2n} \tag{4}$$

On pose maintenant $\forall n > 0,\ w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Étudions la différence suivante :

$$\begin{aligned} u_n - w_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left[1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right] = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left[1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right] + \underbrace{\frac{1}{0!}\left(1 - \frac{n!}{n!n^0}\right) + \frac{1}{1!}\left(1 - \frac{n!}{(n-1)!n^1}\right)}_{0} \end{aligned}$$

Étudions séparément une partie du calcul :

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-p)!n^p} &= \frac{(n-p)!(n-(p-1))\cdots(n-2)(n-1)n}{(n-p)!} \times \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1}} \times \prod_{k=1}^{p-1}(n-k) = \prod_{k=1}^{p-1}\frac{1}{n} \times \prod_{k=1}^{p-1}(n-k) \\ &= \prod_{k=1}^{p-1} \frac{1}{n}(n-k) = \prod_{k=1}^{p-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \mathcal{K}(n,\ p) \end{aligned}$$

En injectant dans la relation donnée précédemment, on a donc ($\mathcal{K}(n,\ p)$ existe car $p \in [\![2,\ n]\!]$) :

$$u_n - w_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1 - \mathcal{K}(n,\ p)}{p!} \tag{5}$$

Reprenons maintenant l'inégalité (4). On peut effectuer la somme de cette inégalité pour p allant de 2 à n car l'inégalité est vraie pour toutes ces valeurs. On a :

$$\begin{aligned} &\forall n > 0,\ \forall p \in [\![2,\ n]\!],\ 0 \leqslant 1 - \mathcal{K}(n,\ p) \leqslant \frac{p(p-1)}{2n} \iff 0 \leqslant \frac{1 - \mathcal{K}(n,\ p)}{p!} \leqslant \frac{p(p-1)}{p! \cdot 2n} = \frac{1}{2n(p-2)!} \\ &\implies \sum_{p=2}^{n} 0 \leqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1 - \mathcal{K}(n,\ p)}{p!} \leqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2n(p-2)!} = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{i!} = \frac{u_{n-2}}{2n} \text{ or d'après (1) } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < \lambda \\ &\therefore 0 \leqslant u_n - w_n \leqslant \frac{\lambda}{2n} \implies u_n - \frac{\lambda}{2n} \leqslant w_n \leqslant u_n \end{aligned}$$

Néanmoins $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda}{2n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n - \frac{\lambda}{2n} = \lambda$. On applique donc le théorème des gendarmes dans l'inégalité déterminée précédemment. On en conclut que (w_n) converge vers la même valeur λ que (u_n). Concluons :

$$\begin{aligned} &\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \because \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \implies n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \implies \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \\ &\therefore \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \exp\left[n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{N\to 1} \exp N = \boxed{e = \lambda} \end{aligned}$$