

DM N° 1 : Théorème de SCHNIRELMANN

Lucas TABARY

1 Généralités, exemples

1. Justifions avec les notations suivantes que $\sigma(A)$ définit une densité dans les ensembles. On considère la fonction :

$$f_A : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}, n \longmapsto \frac{S_n(A)}{n}$$

On note alors $\sigma(A) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_A$ (qui existe car l'ensemble est non vide et minoré par 0). Puisque f_A est à valeurs positives, $\sigma(A)$ est nécessairement positif ou nul, sinon on pourrait construire une image négative de f_A . D'où $\sigma(A) \geq 0$.

Par ailleurs, $\sigma(A) \geq 1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, f_A(n) \geq 1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \#([1, n] \cap A) \geq n$ or $\#([1, n] \cap A) \leq n$ d'où $[1, n] \subset A$. Il vient alors $\forall n \in \mathbb{N}, [1, n] \subset A \implies \mathbb{N}^* \subset A$. D'où $\sigma(A) \leq 1$.

2. On conclut directement : $\sigma(A) \leq \frac{S_1(A)}{1} = \# \{1\} \cap A = 0$, d'où $\sigma(A) = 0$.
3. On se reporte au raisonnement de la question (1). La réciproque étant évidente, il vient :

$$\sigma(A) = 1 \iff \mathbb{N}^* \subset A$$

4. Soient A et B dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tels que $A \subset B$. Il vient directement que $f_A \leq f_B$. Puisque $\sigma(A)$ minore $f_A(\mathbb{N}^*)$, il minore $f_B(\mathbb{N}^*)$. Par définition :

$$\sigma(A) \in \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, f_B(n) \geq x\} \quad \text{et} \quad \sigma(B) := \max\{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, f_B(n) \geq x\}$$

d'où $\sigma(A) \leq \sigma(B)$.

5. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$ fini, il admet alors une borne supérieure (un maximum) strictement positive notée M . Il en découle $\forall k \in \mathbb{N}, k > M \implies k \notin A$. D'où :

$$S_n(A) = \#([1, n] \cap A) = \underbrace{\#([1, M] \cap A)}_{\leq M} + \underbrace{\#([M+1, n] \cap A)}_0 \leq M \implies \forall n \geq M, 0 \leq f_A(n) \leq \frac{M}{n}$$

Par encadrement, on en conclut que f_A tend vers 0 en $+\infty$. Soit m un minorant de f_A , si $m > 0$, alors par la définition de la limite il existe k entier tel que $f_A(k) < m$, ce qui est absurde. Donc $m \leq 0$ ce qui implique $\sigma(A) \leq 0$ d'où $\sigma(A) = 0$.

- (b) On pose $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Déterminons l'expression de $f_A(n)$ selon la parité de n . Si $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_A(2k) = \frac{\#([1, 2k] \cap A)}{2k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

Sinon $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ et :

$$f_A(2k+1) = \frac{\#([1, 2k+1] \cap A)}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} = 1 - \frac{k}{2k+1} > \frac{1}{2}$$

Par conséquent, $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} f_A = \min_{n \in \mathbb{N}^*} f_A = \frac{1}{2} = \sigma(A)$.

- (c) On pose $A = \{k^s \mid k \in \mathbb{N}\}$, où s est un entier strictement supérieur à 1. On cherche à déterminer $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ pour $n \geq 1$. Il vient, en utilisant la bijection réciproque de $k \mapsto k^s$, notée $k \mapsto \sqrt[s]{k}$:

$$x \in A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, x = k^s \\ 1 \leq x \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, x = k^s \\ 1 \leq k \leq \sqrt[s]{n} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}, x = k^s \\ 1 \leq k \leq \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor \end{cases} \iff k \in \llbracket 1, \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor \rrbracket$$

C'est-à-dire $x \in \{k^s \mid k \in \llbracket 1, \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor \rrbracket\}$. On dénombre ainsi $\lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor$ éléments dans l'intersection, il vient donc :

$$0 \leq f_A = \frac{\lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor}{n} < \frac{\sqrt[s]{n} + 1}{n} \quad \text{qui tend vers 0 en } +\infty \text{ par encadrement et croissances comparées.}$$

On conclut de la même manière qu'à la (1. 5. a), et $\sigma(A) = 0$.

2 Théorème de Schnirelmann (1930)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $S_n(A) + S_n(B) \geq n$. On en déduit :

$$\#(\llbracket 1, n \rrbracket \cap A) + \#(\llbracket 1, n \rrbracket \cap B) \geq n \implies \#(\llbracket 0, n \rrbracket \cap A) + \#(\llbracket 0, n \rrbracket \cap B) \geq n + 2$$

Car d'après l'énoncé $0 \in A, 0 \in B$. On pose $\tilde{A} = \llbracket 0, n \rrbracket \cap A$ et $\tilde{B} = \llbracket 0, n \rrbracket \cap B$. On suppose maintenant que $\forall a \in \tilde{A}, n - a \notin \tilde{B}$. Cependant en utilisant la bijection $k \mapsto n - k$, il vient $\#\{n - a \mid a \in \tilde{A}\} = \#\tilde{A}$. Par ailleurs, $\{n - a \mid a \in \tilde{A}\} \subset \llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui nous permet de déterminer le cardinal de la soustraction d'ensemble de la prochaine étape. De l'hypothèse il découle $\tilde{B} \subset \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{n - a \mid a \in \tilde{A}\}$; soit au niveau des cardinaux :

$$\#\tilde{B} \leq n + 1 - \#\tilde{A} \implies \#\tilde{A} + \#\tilde{B} < n + 2$$

Ce qui contredit l'inégalité établie en début de question. L'hypothèse est donc fausse, et

$$\exists a \in A, n - a \in B \implies n = a + (n - a) \in A + B$$

- (b) On poursuit : $\sigma(A) + \sigma(B) \geq 1 \implies \sigma(A) \geq 1 - \sigma(B)$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{S_n(A)}{n} \geq \sigma(A) \geq 1 - \sigma(B) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \sigma(B) \geq 1 - \frac{S_n(A)}{n} \implies \forall n, m \in \mathbb{N}^*, \frac{S_m(B)}{m} \geq 1 - \frac{S_n(A)}{n}$$

Et pour $n = m$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{S_n(A)}{n} + \frac{S_n(B)}{n} \geq 1 \implies S_n(A) + S_n(B) \geq n \implies n \in A + B$$

D'où $\mathbb{N}^* \subset A + B$, et de plus $0 \in A, 0 \in B$, d'où $A + B = \mathbb{N}$.

- (c) En utilisant les résultats précédents : $\sigma(A) \geq \frac{1}{2} \implies \sigma(A) + \sigma(A) \geq 1 \implies A + A = \mathbb{N}$. On en conclut que par définition, A est une base d'ordre 2 de \mathbb{N} .

2. (a) On décompose tout d'abord $\llbracket 1, n \rrbracket$ en parties disjointes :

$$\llbracket 1, n \rrbracket = (\llbracket 1, n \rrbracket \cap A) \cup \bigcup_{i=0}^{S_n(A)-1} \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket \cup \llbracket a_{S_n(A)} + 1, n \rrbracket$$

Il vient alors, en utilisant les formules sur les cardinaux d'ensembles disjoints :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) &= \#(\llbracket 1, n \rrbracket \cap (A + B)) = \#(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket \cap (A + B)) \\ &+ \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} \#((A + B) \cap \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket) + \#((A + B) \cap \llbracket a_{S_n(A)} + 1, n \rrbracket) \end{aligned}$$

Et $\forall a_i \in A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, $B + \{a_i\} \subset A + B$, d'où

$$\#(B + \{a_i\}) \cap \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket \leq \#(A + B) \cap \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket$$

Par ailleurs, les ensembles $(B + \{a_i\}) \cap \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket$ et $B \cap \llbracket 1, a_{i+1} - a_i - 1 \rrbracket$ sont en bijection par $k \mapsto k - a_i$, d'où l'égalité des cardinaux et on obtient :

$$\#(A + B) \cap \llbracket a_i + 1, a_{i+1} - 1 \rrbracket \geq \#B \cap \llbracket 1, a_{i+1} - a_i - 1 \rrbracket$$

On raisonne similairement pour obtenir :

$$\#(A + B) \cap \llbracket a_{S_n(A)} + 1, n \rrbracket \geq \#B \cap \llbracket 1, n - a_{S_n(A)} \rrbracket$$

On forme alors l'inégalité suivante à partir de l'égalité construite initialement :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) &\geq \#(A \cap \llbracket 1, n \rrbracket) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} \#B \cap \llbracket 1, a_{i+1} - a_i - 1 \rrbracket + \#B \cap \llbracket 1, n - a_{S_n(A)} \rrbracket \\ &\geq S_n(A) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} S_{a_{i+1}-a_i-1}(B) + S_{n-a_{S_n(A)}}(B) \end{aligned}$$

- (b) On a $\forall A \subset \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{S_n(A)}{n} \geq \sigma(A) \iff S_n(A) \geq n\sigma(A)$. On injecte ce résultat dans l'inégalité obtenue en (2. 2. a) pour avoir :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) &\geq n\sigma(A) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (a_{i+1} - a_i - 1)\sigma(B) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geq n\sigma(A) + \sigma(B) \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (a_{i+1} - a_i) + \sigma(B) \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (-1) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geq n\sigma(A) + \sigma(B)(a_{S_n(A)} - a_0) - \sigma(B)(S_n(A)) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geq n\sigma(A) - S_n(A)\sigma(B) + n\sigma(B) \\ \implies \frac{S_n(A + B)}{n} &\geq \sigma(A) + \sigma(B) - \frac{S_n(A)}{n}\sigma(B) \quad \text{par définition de la borne inférieure, il vient :} \\ \sigma(A + B) &\geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B) \end{aligned}$$

Dans les détails, on applique ici le même type de raisonnement que pour la (2. 1. b).

- (c) Si A est fini alors $\sigma(A) = 0$. Par ailleurs

$$A + B \supset B \implies \sigma(A + B) \geq \sigma(B) = \underbrace{\sigma(A) + \sigma(B)}_0 - \underbrace{\sigma(A)\sigma(B)}_0$$

On conserve donc aussi l'inégalité dans ce cas.

3. On remarque préalablement que $\sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B) = 1 - (1 - \sigma(A))(1 - \sigma(B))$. On considère $\{A_1, \dots, A_p\}$ un ensemble de parties de \mathbb{N} contenant 0. Soit la propriété :

$$H_k : \sigma(A_1 + \dots + A_k) \geq 1 - \prod_{i=1}^k (1 - \sigma(A_i))$$

On procède par récurrence pour démontrer cette propriété pour $k > 1$. À $k = 2$, on applique directement

la formule trouvée précédemment. Soit maintenant $k > 1$, tel que H_k est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(\underbrace{A_1 + \cdots + A_k}_{"A"} + \underbrace{A_{k+1}}_{"B"}) &\geq 1 - (1 - \sigma(A_1 + \cdots + A_k))(1 - \sigma(A_{k+1})) = 1 + (-1 + \sigma(A_1 + \cdots + A_k))(1 - \sigma(A_{k+1})) \\
&\geq 1 + \left(-1 + \left(1 - \prod_{i=1}^k (1 - \sigma(A_i)) \right) \right) (1 - \sigma(A_{k+1})) \geq 1 - \left(\prod_{i=1}^k (1 - \sigma(A_i)) \right) (1 - \sigma(A_{k+1})) \\
&\geq 1 - \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \sigma(A_i))
\end{aligned}$$

On peut donc conclure.

4. Soit A tel que $0 \in A$ et $\sigma(A) > 0$. On recherche une valeur p entière telle que $\sigma(\sum_{i=1}^p A_i) \geq \frac{1}{2}$. À partir du résultat de la question précédente, il vient :

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^p A\right) \geq 1 - \prod_{i=1}^p (1 - \sigma(A)) \geq \frac{1}{2} \iff (1 - \sigma(A))^p \leq \frac{1}{2} \iff p \geq -\frac{\ln 2}{\ln(1 - \sigma(A))}$$

En prenant l'arrondie à l'entier supérieure de la valeur précédente, on obtient ainsi une valeur qui convient pour p . Ainsi $\sigma(\sum_{i=1}^p A) \geq \frac{1}{2}$, et donc $\sum_{i=0}^p A$ est une base d'ordre 2 de \mathbb{N} , donc A est une base d'ordre $2p$ de \mathbb{N} .