DM N° 3 : Application complexe et équation différentielle

Lucas Tabary

1 Un peu comme au DS

On considère l'application f suivante :

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

1. Déterminons le nombre antécédents d'un complexe y par f en fonction de sa valeur. On a, avec la définition :

$$y = z + \frac{1}{z} \iff zy = z^2 + 1 \iff z^2 - yz + 1 = 0$$

Cela correspond donc à un polynôme à coefficients comlexes, pour lequel on applique la méthode de résolution usuelle : $\Delta = (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = y^2 - 4$. Pour un tel polynôme, il existe toujours deux racines complexes pour $\Delta \neq 0$ et une seule pour $\Delta = 0$. On a donc :

$$\Delta = 0 \iff y^2 - 4 = 0 \iff (y-2)(y+2) = 0 \iff y \in \{-2; 2\}$$

Puisqu'on a procédé précédemment par équivalence, on en conclut que pour $y \in \{-2; 2\}$, y admet 1 seul antécédent par f, sinon, il en admet 2.

2. On note δ une racine complexe de Δ, δ existe toujours, et les racines du polynôme précédent sont donc de la forme $\frac{y \pm \delta}{2}$. on a donc : $\forall y \in \mathbb{C},\ \exists z = \frac{y+\delta}{2} \in \mathbb{C},\ y = z + \frac{1}{z}$. y admet toujours au moins un antécédent, et f est surjective.

On considère maintenant les images de i et $-i$ par f. On a $f(i) = i + \frac{1}{i} = i - i = 0$ et $f(-i) = -i + \frac{1}{-i} = -i + i = 0$. On a donc bien $-i \neq i$, $f(-i) = f(i)$. 0 admet donc 2 antécédents par f, f n'est donc pas injective.

3. On note : $\mathscr{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. On cherche un sur-ensemble de $f(\mathscr{U})$. On a :

$$\forall z \in \mathscr{U},\ z = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R},\ f(z) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

On peut donc encadrer $f(z)$, de telle sorte que :

$$-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1 \iff -2 \leqslant 2\cos(\theta) \leqslant 2 \iff -2 \leqslant f(z) \leqslant 2 \iff f(\mathscr{U}) \subset F = [-2; 2]$$

On considère maintenant $y = f(z) \in F \Rightarrow y^2 \in [0; 4]$. On rappelle : $y = f(z) \iff z^2 - yz + 1 = 0$ (dans notre cas à coefficients réels). Le discrimant est donné par $\Delta = y^2 - 4$, or $0 \leqslant y^2 \leqslant 4 \iff -4 \leqslant \Delta \leqslant 0$. On disjoncte donc les cas :

— $\Delta = 0$ (nécessairement $y \in \{-2; 2\}$) : la racine unique est $z = \frac{y}{2} \Rightarrow z \in \{-1; 1\} \Rightarrow z \in \mathscr{U}$

— $\Delta < 0$: les racines sont $z_1 = \frac{y+i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{y+i\sqrt{4-y^2}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow |z_2| = |z_1|$. On calcule :

$$|z_1|^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)^2 = \frac{y^2+4-y^2}{4} = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \{z_1,z_2\} \subset \mathscr{U}$$

On en conclut : $y = f(z) \in F \Rightarrow z \in \mathscr{U}$.

4. On note maintenant $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C},\, 0 < |z| < 1\}$; ainsi que l'application induite $g = f\Big|_{\mathscr{D}}^{\mathbb{C}\setminus F}$. Montrons que g est bijective. Soit z une solution de $f(z) = y \Rightarrow z + \frac{1}{z} = y$. On a donc :

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} + z = f(z) = y$$

Donc $\frac{1}{z}$ est aussi un antécédent de y par f. De plus, $f(\mathscr{U}) \subset F$, c'est-à-dire, $|z| = 1 \Rightarrow y = f(z) \in F$, soit par contraposée $y \notin F \Rightarrow |z| \neq 1$. Dans ce cas-là on a de plus $\frac{1}{z} \neq z$, or y admet deux antécédents par f sur $\mathbb{C} \setminus F$ (car $y \notin \{-2; 2\}$, voir question 1), ceux-ci sont donc z et $\frac{1}{z}$. On disjoncte les cas :

— $0 < |z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| > 1 \;\therefore z \in \mathscr{D} \wedge \frac{1}{z} \notin \mathscr{D} \Rightarrow \exists! z' = z \in \mathscr{D},\, f(z') = y$

— $|z| > 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow 0 < \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \;\therefore z \notin \mathscr{D} \wedge \frac{1}{z} \in \mathscr{D} \Rightarrow \exists! z' = \frac{1}{z} \in \mathscr{D},\, f(z') = y$

On peut conclure, en remarquant que $z' \in \mathscr{D}$ et $y \in \mathbb{C} \setminus F$ (ensembles de départ et d'arrivée de g) :

$$\forall y \in \mathbb{C} \setminus F,\, \exists! z \in \mathscr{D},\, g(z) = y$$

C'est-à-dire, g est bijective.

2 Recollement de solution pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2

2.1 Calcul liminaire

On admet la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$. De cette limite on a, en posant $x' = -x$:

$$\lim_{x'\to -0} \frac{e^{-x'} - 1 + x'}{x'^2} = \frac{1}{2}, \text{ par limite de fonction composée.}$$

On cherche donc maintenant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \text{ par limite de somme.} \tag{1}$$

2.2 Exercice

On considère maintenant l'équation différentielle suivante, avec $y\colon I \to \mathbb{R},\, x \mapsto y(x),\, I \subset \mathbb{R}^*$.

$$(\mathscr{E}) : \; xy'' + 2y' - xy = 4xe^x$$

1. On pose $\forall x \in I,\, z(x) = x \cdot y(x)$. On a donc, puisque y est deux fois dérivable :

— $z'(x) = y(x) + x \cdot y'(x) \Rightarrow z' = xy' + y$

— $z''(x) = y'(x) + y'(x) + x \cdot y''(x) \Rightarrow z'' = xy'' + 2y'$

On injecte dans $(\mathscr{E})$ et on a : $(xy'' + 2y') - (xy) = 4xe^x \iff z'' - z = 4xe^x$, équation qu'on notera $(\mathscr{F})$ par la suite.

2. On recherche une solution particulière de $(\mathscr{F})$ de la forme $f_P \colon x \mapsto (ax^2+bx)e^x$, $a,b \in \mathbb{R}$. f_P est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et :

— $f_P'(x) = (2ax+b+ax^2+bx)e^x$

— $f_P''(x) = (2a+2ax+b+2ax+b+ax^2+bx)e^x = (ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^x$

f_P est solution de $(\mathscr{F})$ si, et seulement si :

$$f_P'' - f_P = 4xe^x \iff ax^2+(4a+b)x+2a+2b-(ax^2+bx) = 4x \iff 4ax+2a+2b = 4x$$
$$\iff \begin{cases} 4a & = 4 \\ 2a+2b & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -a = -1 \end{cases}$$

On en conclut que $f_P \colon x \mapsto \left(x^2-x\right)e^x$ est une solution particulière de $(\mathscr{F})$.

3. On considère maintenant l'équation caractéristique associé à $(\mathscr{F})$, $r^2-1=0 \iff (r-1)(r+1)=0 \iff r \in \{-1;1\}$. Les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{F})$ sont donc de la forme : $x \mapsto ae^x+be^{-x}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Les solutions de $(\mathscr{F})$ sont donc, d'après le principe de superposition, de la forme : $f(x) = \left(x^2-x\right)e^x + ae^x + be^{-x}$, $a,b \in \mathbb{R}$. Or f solution de $(\mathscr{F})$ est équivalent à $y \colon x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ solution de $(\mathscr{E})$. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ sur I est par conséquent :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto xe^x - e^x + \frac{a}{x}e^x + \frac{b}{x}e^{-x} \end{array}, \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

4. On cherche maintenant une fonction f de S, telle que f soit continue en 0, soit :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}, \text{ or } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(-x) \iff \lim_{x\to 0^+} [f(x)-f(-x)] = 0$$

On étendra ensuite l'intervalle de définition de f en la définissant par morceaux. On a donc :

$$\lim_{x\to 0^+} [f(x)-f(-x)] = 0 \iff \lim_{x\to 0^+} \left[xe^x - e^x + \frac{a}{x}e^x + \frac{b}{x}e^{-x} - \left(-xe^{-x} - e^{-x} + \frac{a}{-x}e^{-x} + \frac{b}{-x}e^x \right) \right] = 0$$

$$\iff \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{a}{x}e^x + \frac{a}{x}e^{-x} + \frac{b}{x}e^{-x} + \frac{b}{x}e^x \right] + \overbrace{\lim_{x\to 0^+} \left[xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x} \right]}^{0} = 0 \iff \lim_{x\to 0^+} \left[(a+b)\frac{e^x+e^{-x}}{x} \right] = 0$$

Or $\frac{e^x+e^{-x}}{x}$ diverge ici en $+\infty$. On a donc nécessairement $a+b=0$ pour obtenir la limite présentée, c'est-à-dire $b=-a$.

5. Les solutions continues sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E})$ sont de la forme $f \colon x \mapsto xe^x - e^x + \frac{a}{x}e^x - \frac{a}{x}e^{-x}$. Cherchons a tel que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On tente de faire apparaître l'expression donnée en (1). On a donc :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to 0} \left[xe^x - e^x + \frac{a}{x}e^x - \frac{a}{x}e^{-x} \right] = 0 \iff \lim_{x\to 0}[xe^x - e^x] + \lim_{x\to 0} \left[ax\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) \right] = 0$$
$$\iff -1 + \lim_{x\to 0} \left[ax\left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x + 2x}{x^2} \right) \right] = 0 \iff \lim_{x\to 0} \left[ax\left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} \right) + ax \cdot \frac{2}{x} \right] = 1$$
$$\iff \lim_{x\to 0} \left[ax\left(\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} \right) \right] + \lim_{x\to 0} 2a = 1 \iff 2a = 1 \iff a = \frac{1}{2}$$

On en conclut que la seule solution de $(\mathscr{E})$ f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ est :

$$f \colon \begin{cases} x \longmapsto (x-1)e^x + \dfrac{e^x}{2x} - \dfrac{e^{-x}}{2x} = (x-1)e^x + \dfrac{\sinh x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ x \longmapsto 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$