# DM N° 1 : Théorème de Schnirelmann

Lucas Tabary

## 1 Généralités, exemples

1. Justifions avec les notations suivantes que $\sigma(A)$ définit une densité dans les ensembles. On considère la fonction :
$$f_A\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R},\, n \longmapsto \frac{S_n(A)}{n}$$
On note alors $\sigma(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} f_A$ (qui existe car l'ensemble est non vide et minoré par 0). Puisque $f_A$ est à valeurs positives, $\sigma(A)$ est nécessairement positif ou nul, sinon on pourrait construire une image négative de $f_A$. D'où $\sigma(A) \geqslant 0$.
Par ailleurs, $\sigma(A) \geqslant 1 \implies \forall n \in \mathbb{N},\, f_A(n) \geqslant 1 \implies \forall n \in \mathbb{N},\, \#\left([\![1,\, n]\!] \cap A\right) \geqslant n$ or $\#\,[\![1,\, n]\!] = n$ d'où $[\![1,\, n]\!] \subset A$. Il vient alors $\forall n \in \mathbb{N},\, [\![1,\, n]\!] \subset A \implies \mathbb{N}^* \subset A$. D'où $\sigma(A) \leqslant 1$.
2. On conclut directement : $\sigma(A) \leqslant \frac{S_1(A)}{1} = \#\{1\} \cap A = 0$, d'où $\sigma(A) = 0$.
3. On se reporte au raisonnement de la question (1). La réciproque étant évidente, il vient :
$$\sigma(A) = 1 \iff \mathbb{N}^* \subset A$$
4. Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tels que $A \subset B$. Il vient directement que $f_A \leqslant f_B$. Puisque $\sigma(A)$ minore $f_A(\mathbb{N}^*)$, il minore $f_B(\mathbb{N}^*)$. Par définition :
$$\sigma(A) \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\, f_B(n) \geqslant x\} \quad \text{et} \quad \sigma(B) := \max\{x \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\, f_B(n) \geqslant x\}$$
d'où $\sigma(A) \leqslant \sigma(B)$.
5. (a) Soit $A \subset \mathbb{N}$ fini, il admet alors une borne supérieure (un maximum) strictement positive notée $M$. Il en découle $\forall k \in \mathbb{N},\, k > M \implies k \notin A$. D'où :
$$S_n(A) = \#([\![1,\, n]\!] \cap A) = \underbrace{\#([\![1,\, M]\!] \cap A)}_{\leqslant M} + \underbrace{\#([\![M+1,\, n]\!] \cap A)}_{0} \leqslant M \implies \forall n \geqslant M,\, 0 \leqslant f_A(n) \leqslant \frac{M}{n}$$
Par encadrement, on en conclut que $f_A$ tend vers 0 en $+\infty$. Soit $m$ un minorant de $f_A$, si $m > 0$, alors par la définition de la limite il existe $k$ entier tel que $f_A(k) < m$, ce qui est absurde. Donc $m \leqslant 0$ ce qui implique $\sigma(A) \leqslant 0$ d'où $\sigma(A) = 0$.

   (b) On pose $A = \{2k+1 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Déterminons l'expression de $f_A(n)$ selon la parité de $n$. Si $n = 2k,\, k \in \mathbb{N}$, on a :
$$f_A(2k) = \frac{\#([\![1,\, 2k]\!] \cap A)}{2k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$
Sinon $n = 2k+1,\, k \in \mathbb{N}$ et :
$$f_A(2k+1) = \frac{\#([\![1,\, 2k+1]\!] \cap A)}{2k+1} = \frac{k+1}{2k+1} = 1 - \frac{k}{2k+1} > \frac{1}{2}$$
Par conséquent, $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} f_A = \min_{n\in\mathbb{N}^*} f_A = \frac{1}{2} = \sigma(A)$.

(c) On pose $A = \{k^s \,|\, k \in \mathbb{N}\}$, où $s$ est un entier strictement supérieur à 1. On cherche à déterminer $A \cap [\![1,\, n]\!]$ pour $n \geqslant 1$. Il vient, en utilisant la bijection réciproque de $k \mapsto k^s$, notée $k \mapsto \sqrt[s]{k}$ :

$$x \in A\cap[\![1,\, n]\!] \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N},\, x = k^s \\ 1 \leqslant x \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N},\, x = k^s \\ 1 \leqslant k \leqslant \sqrt[s]{n} \end{cases} \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N},\, x = k^s \\ 1 \leqslant k \leqslant \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor \end{cases} \iff k \in \left[\!\left[1,\, \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor\right]\!\right]$$

C'est-à-dire $x \in \{k^s \,|\, k \in [\![1,\, \lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor]\!]\}$. On dénombre ainsi $\lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor$ éléments dans l'intersection, il vient donc :

$$0 \leqslant f_A = \frac{\lfloor \sqrt[s]{n} \rfloor}{n} < \frac{\sqrt[s]{n} + 1}{n} \quad \text{qui tend vers 0 en } +\infty \text{ par encadrement et croissances comparées.}$$

On conclut de la même manière qu'à la (1. 5. a), et $\sigma(A) = 0$.

# 2 Théorème de Schnirelmann (1930)

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $S_n(A) + S_n(B) \geqslant n$. On en déduit :

$$\#\left([\![1,\, n]\!] \cap A\right) + \#\left([\![1,\, n]\!] \cap B\right) \geqslant n \Longrightarrow \#\left([\![0,\, n]\!] \cap A\right) + \#\left([\![0,\, n]\!] \cap B\right) \geqslant n + 2$$

Car d'après l'énoncé $0 \in A$, $0 \in B$. On pose $\tilde{A} = [\![0,\, n]\!] \cap A$ et $\tilde{B} = [\![0,\, n]\!] \cap B$. On suppose maintenant que $\forall a \in \tilde{A},\, n - a \notin \tilde{B}$. Cependant en utilisant la bijection $k \mapsto n - k$, il vient $\#\{n - a \,|\, a \in \tilde{A}\} = \#\tilde{A}$. Par ailleurs, $\{n - a \,|\, a \in \tilde{A}\} \subset [\![0,\, n]\!]$, ce qui nous permet de déterminer le cardinal de la soustraction d'ensemble de la prochaine étape. De l'hypothèse il découle $\tilde{B} \subset [\![0,\, n]\!] \setminus \{n - a \,|\, a \in \tilde{A}\}$ ; soit au niveau des cardinaux :

$$\#\tilde{B} \leqslant n + 1 - \#\tilde{A} \Longrightarrow \#\tilde{A} + \#\tilde{B} < n + 2$$

Ce qui contredit l'inégalité établie en début de question. L'hypothèse est donc fausse, et

$$\exists a \in A,\, n - a \in B \Longrightarrow n = a + (n - a) \in A + B$$

(b) On poursuit : $\sigma(A) + \sigma B \geqslant 1 \Longrightarrow \sigma(A) \geqslant 1 - \sigma(B)$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \frac{S_n(A)}{n} \geqslant \sigma(A) \geqslant 1 - \sigma(B) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \sigma(B) \geqslant 1 - \frac{S_n(A)}{n} \Longrightarrow \forall n,\, m \in \mathbb{N}^*,\, \frac{S_m(B)}{m} \geqslant 1 - \frac{S_n(A)}{n}$$

Et pour $n = m$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{S_n(A)}{n} + \frac{S_n(B)}{n} \geqslant 1 \Longrightarrow S_n(A) + S_n(B) \geqslant n \Longrightarrow n \in A + B$$

D'où $\mathbb{N}^* \subset A + B$, et de plus $0 \in A$, $0 \in B$, d'où $A + B = \mathbb{N}$.

(c) En utilisant les résultats précédents : $\sigma(A) \geqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow \sigma(A) + \sigma(A) \geqslant 1 \Longrightarrow A + A = \mathbb{N}$. On en conclut que par définition, $A$ est une base d'ordre 2 de $\mathbb{N}$.

2. (a) On décompose tout d'abord $[\![1,\, n]\!]$ en parties disjointes :

$$[\![1,\, n]\!] = ([\![1,\, n]\!] \cap A) \cup \bigcup_{i=0}^{S_n(A)-1} [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!] \cup \left[\!\left[a_{S_n(A)} + 1,\, n\right]\!\right]$$

Il vient alors, en utilisant les formules sur les cardinaux d'ensembles disjoints :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) = \#([\![1,\, n]\!] \cap (A + B)) &= \#(A \cap [\![1,\, n]\!] \cap (A + B)) \\ &+ \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} \#\left((A + B) \cap [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!]\right) + \#\left((A + B) \cap \left[\!\left[a_{S_n(A)} + 1,\, n\right]\!\right]\right) \end{aligned}$$

Et $\forall a_i \in A \cap [\![1,\, n]\!]$, $B + \{a_i\} \subset A + B$, d'où

$$\#(B + \{a_i\}) \cap [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!] \leqslant \#(A + B) \cap [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!]$$

Par ailleurs, les ensembles $(B + \{a_i\}) \cap [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!]$ et $B \cap [\![1,\, a_{i+1} - a_i - 1]\!]$ sont en bijection par $k \mapsto k - a_i$, d'où l'égalité des cardinaux et on obtient :

$$\#(A + B) \cap [\![a_i + 1,\, a_{i+1} - 1]\!] \geqslant \#B \cap [\![1,\, a_{i+1} - a_i - 1]\!]$$

On raisonne similairement pour obtenir :

$$\#(A + B) \cap \left[\!\left[a_{S_n(A)} + 1,\, n\right]\!\right] \geqslant \#B \cap \left[\!\left[1,\, n - a_{S_n(A)}\right]\!\right]$$

On forme alors l'inégalité suivante à partir de l'égalité construite initialement :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) &\geqslant \#(A \cap [\![1,\, n]\!]) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} \#B \cap [\![1,\, a_{i+1} - a_i - 1]\!] + \#B \cap \left[\!\left[1,\, n - a_{S_n(A)}\right]\!\right] \\ &\geqslant S_n(A) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} S_{a_{i+1} - a_i - 1}(B) + S_{n - a_{S_n(A)}}(B) \end{aligned}$$

(b) On a $\forall A \subset \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{S_n(A)}{n} \geqslant \sigma(A) \iff S_n(A) \geqslant n\sigma(A)$. On injecte ce résultat dans l'inégalité obtenue en (2. 2. a) pour avoir :

$$\begin{aligned} S_n(A + B) &\geqslant n\sigma(A) + \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (a_{i+1} - a_i - 1)\sigma(B) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geqslant n\sigma(A) + \sigma(B) \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (a_{i+1} - a_i) + \sigma(B) \sum_{i=0}^{S_n(A)-1} (-1) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geqslant n\sigma(A) + \sigma(B)(a_{S_n(A)} - a_0) - \sigma(B)(S_n(A)) + (n - a_{S_n(A)})\sigma(B) \\ &\geqslant n\sigma(A) - S_n(A)\sigma(B) + n\sigma(B) \\ \implies \frac{S_n(A + B)}{n} &\geqslant \sigma(A) + \sigma(B) - \frac{S_n(A)}{n}\sigma(B) \quad \text{par définition de la borne inférieure, il vient :} \\ \sigma(A + B) &\geqslant \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B) \end{aligned}$$

Dans les détails, on applique ici le même type de raisonnement que pour la (2. 1. b).

(c) Si $A$ est fini alors $\sigma(A) = 0$. Par ailleurs

$$A + B \supset B \implies \sigma(A + B) \geqslant \sigma(B) = \underbrace{\sigma(A)}_{0} + \sigma(B) - \underbrace{\sigma(A)}_{0}\sigma(B)$$

On conserve donc aussi l'inégalité dans ce cas.

3. On remarque préalablement que $\sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B) = 1 - (1 - \sigma(A))(1 - \sigma(B))$. On considère $\{A_1,\, \ldots,\, A_p\}$ un ensemble de parties de $\mathbb{N}$ contenant 0. Soit la propriété :

$$H_k\colon\ \sigma(A_1 + \cdots + A_k) \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - \sigma(A_i))$$

On procède par récurrence pour démontrer cette propriété pour $k > 1$. À $k = 2$, on applique directement la formule trouvée précédemment. Soit maintenant $k > 1$, tel que $H_k$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(\underbrace{A_1 + \cdots + A_k}_{\text{"}A\text{"}} + \underbrace{A_{k+1}}_{\text{"}B\text{"}}) &\geqslant 1 - (1 - \sigma(A_1 + \cdots + A_k))(1 - \sigma(A_{k+1})) = 1 + (-1 + \sigma(A_1 + \cdots + A_k))(1 - \sigma(A_{k+1})) \\
&\geqslant 1 + \left(-1 + \left(1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \sigma(A_i))\right)\right)(1 - \sigma(A_{k+1})) \geqslant 1 - \left(\prod_{i=1}^{k}(1 - \sigma(A_i))\right)(1 - \sigma(A_{k+1})) \\
&\geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k+1}(1 - \sigma(A_i))
\end{aligned}$$

On peut donc conclure.

4. Soit $A$ tel que $0 \in A$ et $\sigma(A) > 0$. On recherche une valeur $p$ entière telle que $\sigma(\sum_{i=1}^{p} A_i) \geqslant \frac{1}{2}$. À partir du résultat de la question précédente, il vient :

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{p} A\right) \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{p}(1 - \sigma(A)) \geqslant \frac{1}{2} \iff (1 - \sigma(A))^p \leqslant \frac{1}{2} \iff p \geqslant -\frac{\ln 2}{\ln(1 - \sigma(A))}$$

En prenant l'arrondie à l'entier supérieure de la valeur précédente, on obtient ainsi une valeur qui convient pour $p$. Ainsi $\sigma(\sum_{i=1}^{p} A) \geqslant \frac{1}{2}$, et donc $\sum_{i=0}^{p} A$ est une base d'ordre 2 de $\mathbb{N}$, donc $A$ est une base d'ordre $2p$ de $\mathbb{N}$.