Mathématiques : Suite de points et arguments

Lucas Tabary

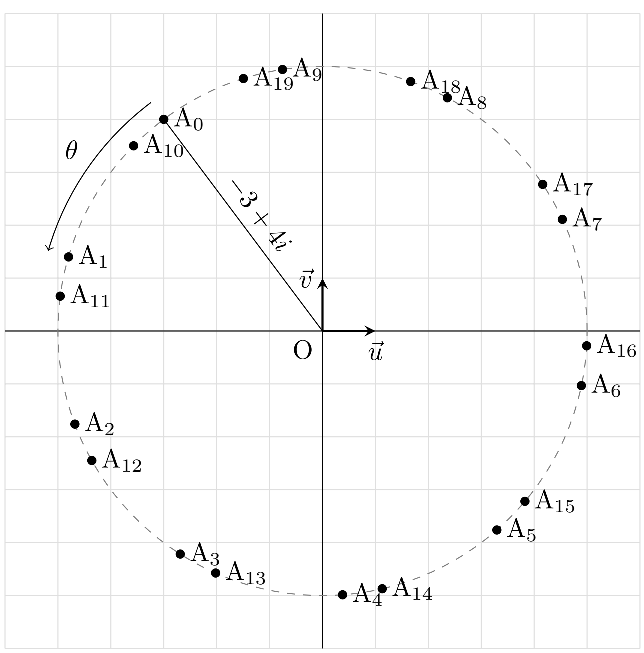
1 Présentation de l'énoncé et conjecture

On considère la suite de points (A_n), dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} A_0(x_0\,;\,y_0) \\ A_{n+1}(x_{n+1}\,;\,y_{n+1}) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} (x_0\,;\,y_0) = (-3\,;\,4) \\ x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{array}\right.$$

On obtient ainsi par exemple les points $A_1(-4{,}8\,;\,1{,}4)$ et $A_2(-4{,}68\,;\,-1{,}76)$. L'objectif de l'exercice est de trouver un moyen de construire géométriquement les points de la suite. Après calcul, on place l'ensemble des points sur le plan ci-dessous. D'après celui-ci, on conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathscr{C}(O;5)$$



(a) Représentation des 20 premiers points de la suite (A_n) sur un plan. Les autres indications concèrnent la suite de l'exercice.

```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées (x, y)
t prend la valeur x
x prend la valeur 0,8x - 0,6y
y prend la valeur 0,6t + 0,8y
Fin pour
```

(b) Algorithme permettant le calcul des coordonnées des points A_0 à A_{19}.

2 Étude de la position des points

2.1 Étude des modules

Soit, $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in \mathbb{C}, z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n ; ainsi que la suite (u_n) définie par : $u_n = |z_n|$. Soit la propriété P_n telle que $P_n : u_n = 5$. À $n = 0$, on a :

$$z_0 = -3 + 4i \; ; u_0 = |z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

P_0 est donc vraie. Supposons maintenant qu'il existe un entier naturel n tel que P_n est vrai. Montrons que cette propriété est héréditaire, c'est-à-dire qu'elle est vraie au rang $n + 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
|z_n| = |x_n + iy_n| = 5 &\Leftrightarrow |0{,}8 + 0{,}6i|\,|x_n + iy_n| = 5\,|0{,}6 + 0{,}8i| \\
&\Leftrightarrow |0{,}8x_n + 0{,}8iy_n + 0{,}6ix_n - 0{,}6y_n| = 5\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} \\
&\Leftrightarrow |(0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)i| = 5\sqrt{0{,}36 + 0{,}64} \Leftrightarrow |x_{n+1} + iy_{n+1}| = 5 \cdot 1 \Leftrightarrow |z_{n+1}| = 5
\end{aligned}$$

P_{n+1} est vrai, on en déduit donc $(P_n) \Rightarrow (P_{n+1})$, P_n est donc héréditaire. D'après le principe du raisonnement par récurrence, on en conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| = 5 \Leftrightarrow OA_n = 5 \Leftrightarrow A_n \in \mathscr{C}(O; 5)$$

2.2 Étude des arguments

θ	0 $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$-\sin(\theta)$	$-$
$\cos(\theta)$	$1 \searrow 0$

Figure 2 – Tableau de variations de la fonction cosinus.

On cherche à prouver qu'il existe un réel θ tel que : $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta = 0{,}8$. Comme le montre le tableau de variations ci-dessus, la fonction cosinus est définie, continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, d'intervalle image associé $[0; 1]$, or $0{,}8 \in [0; 1]$; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos\theta = 0{,}8$.

De même :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - (0{,}8)^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6 \text{ ou } \sin\theta = -0{,}6$$

Cependant $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\theta \geqslant 0$, donc $\sin\theta = 0{,}6$.

Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} z_n &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n) = (0{,}8 + 0{,}6i)(x_n + iy_n) = 0{,}8x_n + 0{,}8iy_n + 0{,}6ix_n - 0{,}6y_n \\
e^{i\theta} z_n &= (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)i = x_{n+1} + iy_{n+1} \\
e^{i\theta} z_n &= z_{n+1}
\end{aligned}$$

Considérons désormais la propriété Q_n telle que : $Q_n : z_n = e^{in\theta} z_0$. À $n = 0$:

$$e^{i \cdot 0 \cdot \theta} z_0 = e^0 z_0 = z_0$$

Q_0 est donc vraie. Supposons qu'il existe un entier n tel que Q_n est vraie, montrons maintenant qu'elle est héréditaire, c'est-à-dire que Q_{n+1} est vraie ; on a donc :

$$z_n = e^{in\theta} z_0 \Leftrightarrow e^{i\theta} z_n = e^{i\theta} e^{in\theta} z_0 \Leftrightarrow z_{n+1} = e^{i(\theta + n\theta)} z_0 \Leftrightarrow z_{n+1} = e^{i(n+1)\theta} z_0$$

Donc Q_{n+1} est vrai, d'où $(Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1})$, la propriété est donc héréditaire. D'après le principe de raisonnement par récurrence, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{in\theta} z_0$$

On se propose de trouver un argument de z_0. Calculons : $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta = -0{,}6\,;\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta = 0{,}8$. Soit a un nombre complexe tel que :

$$a = 5\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 5(-0{,}6 + 0{,}8i) = -3 + 4i = z_0$$

or $|z_0| = 5$, a est donc une écriture trigonométrique de z_0, ce dont découle : $\arg z_0 \equiv \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Ainsi, on peut écrire : $z_0 = 5e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$.

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{in\theta} z_0 \Leftrightarrow z_n = e^{in\theta} 5e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow z_n = 5e^{in\theta + i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = 5e^{i\left[(n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right]}$$
$$\Leftrightarrow \arg z_n \equiv (n+1)\theta + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Finalement, on cherche une manière de construire, pour tout entier n, A_{n+1} à partir de A_n. Intéressons-nous à l'argument de z_0 :

$$\arg z_0 \equiv \theta + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_0}\right) \equiv \theta + (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \theta \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_0}\right) + (\vec{v}, \vec{u}) \equiv \left(\vec{v}, \overrightarrow{OA_0}\right) \pmod{2\pi}$$

L'angle θ correspond donc à l'angle entre l'axe verticale du repère et la droite (OA_0). Cependant il correspond aussi à l'écart d'argument des affixes de deux points consécutifs, en effet :

$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA_n}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) \equiv \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_n},\right) \equiv \arg z_{n+1} - \arg z_n \pmod{2\pi}$$
$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) \equiv (n+2)\theta + \frac{\pi}{2} - \left((n+1)\theta + \frac{\pi}{2}\right) \equiv (n+2)\theta - (n+1)\theta + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \equiv \theta \pmod{2\pi}$$

On en conclut :

Afin de construire les points A_{n+1} à partir de A_n, il faut récupérer au compas l'angle $\left(\vec{v}, \overrightarrow{OA_0}\right)$, séparant l'axe vertical du repère et (OA_0) puis le retracer à partir du point A_0 pour couper le cercle en A_1 (en poursuivant dans le sens trigonométrique) ; répéter l'action en A_1 pour obtenir A_2, et de manière générale, tracer cet angle en A_n pour construire A_{n+1}.

Document réalisé avec LaTeX.