DM N^{o} 11 : Polynômes de Tchebychev et problème de Bâle

Lucas Tabary

---

1 Étude des polynômes de Tchebychev

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} (T_0, T_1) = (1, X) \\ \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

Par la suite on ne fera pas de distinction graphique entre les polynômes et leurs fonctions associées. Par ailleurs, on peut déterminer les termes suivants :

$$T_2 = 2X \cdot X - 1 = 2X^2 - 1 \quad \text{et} \quad T_3 = 2X \cdot (2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$$

1.1 Propriétés

On considère la propriété $H_n : \forall k \in [\![0, n]\!],\, T_k = t_k X^k + P_k,\ \deg P_k < k$. À $n = 1$, la propriété est bien vérifiée car $1 = 1 \cdot X^0 + 0,\ X = 1 \cdot X^1 + 0$. On suppose donc maintenant qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que H_{n+1} est vraie. On a donc :

$$T_{n+2} = 2X \cdot T_{n+1} - T_n = 2X \cdot (t_{n+1}X^{n+1} + P_{n+1}) - (t_n X^n + P_n) = \underbrace{2t_{n+1}}_{t_{n+2}} X^{n+2} + \underbrace{(2XP_{n+1} - t_n X^n - P_n)}_{\deg \leqslant n+1}$$

D'où $H_{n+1} \Longrightarrow H_{n+2}$. On en conclut que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg T_n = n$;
- $\forall n \geqslant 1,\, t_{n+1} = 2t_n \Longrightarrow t_n = 2^{n-1}$.

On considère maintenant une autre propriété qu'on démontrera aussi par récurrence (forte) :

$$L_n : \forall k \in [\![0, n]\!],\, \forall \theta \in \mathbb{R},\, T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$$

On fixera $\theta \in \mathbb{R}$ pour la suite de la démonstration. L_1 est vraie car $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos 0$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos 1 \cdot \theta$. On rappelle préalablement que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

On suppose maintenant qu'il existe $n \geqslant 1$, tel que L_{n+1} est vraie. Évaluons $T_{n+2}(\cos\theta)$.

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta)$$
$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\cos(\theta + (n + 1)\theta) + \cos(\theta - (n + 1)\theta)) - \cos(n\theta) = \cos((n + 2)\theta) + \cos(-n\theta) - \cos(n\theta)$$
$$T_{n+2}(\cos\theta) = \cos((n + 2)\theta)$$

Ainsi L_n est héréditaire. D'après le principe de raisonnement par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Valeurs particulières

Déterminons maintenant $T_n(1)$ et $T_n'(1)$ en utilisant la propriété précédente.

$$T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \cdot 0) = 1$$

Pour déterminer le nombre dérivé de T_n en 1, on calcule la limite du taux d'accroissement en ce point. Cette valeur est bien définie car T_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $\cos n\theta - 1 \underset{0}{=} 1 - \frac{(n\theta)^2}{2} + o\big(\theta^2\big) - 1$. On peut donc utiliser un équivalent :

$$\frac{T_n(X) - T_n(1)}{X - 1} = \frac{T_n(\cos\theta) - 1}{\cos\theta - 1} = \frac{\cos n\theta - 1}{\cos\theta - 1} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{n^2\theta^2}{2}}{-\frac{\theta^2}{2}} = n^2 \underset{\theta\to 0}{\longrightarrow} n^2 = T_n'(1)$$

Avec $X = \cos\theta$ tel que $X \to 1 \Longrightarrow \theta \to 0$.

1.3 Racines de T_n

La fonction cos est strictement monotone sur $[0, \pi]$ et continue. Elle établit donc une bijection de $[0, \pi]$ dans $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\forall x \in [-1, 1],\ \exists! \theta \in [0, \pi],\ x = \cos\theta$$

Sur $[-1, 1]$, on a donc :

$$T_n(x) = 0 \iff T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos n\theta = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$\text{Par ailleurs} \quad 0 \leqslant n\theta \leqslant \pi n \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant \pi n \Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant n - \frac{1}{2} \Longrightarrow k \in [\![0, n-1]\!]$$

C'est-à-dire, après changement de variable :

$$\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = 0 \iff x = x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k \in [\![1, n]\!] = I$$

Chaque valeur de k donne une opérande du cosinus distincte sur l'intervalle $[0, \pi]$, or cos est bijective donc injective sur cet intervalle, par conséquent toutes les valeurs prises par x sont distinctes. On en dénombre $\#I = n$. Cependant T_n est de degré n est possède donc au plus n racines, on en conclut que toutes les racines de T_n sur $\mathbb{R}$ sont celles sur $[-1, 1]$.

2 Lien avec le problème de Bâle

On désigne par problème de Bâle la détermination de la limite de (S_n) définie ci-dessous. On utilisera les propriétés des polynômes de Tchebychev pour la trouver.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

2.1 Convergence des suites étudiées

Déterminons premièrement la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)}$.

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X} \Longrightarrow \begin{cases} a = \left.\dfrac{1}{X}\right|_{X=1} = 1 \\ b = \left.\dfrac{1}{X-1}\right|_{X=0} = -1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$$

Cette nouvelle expression permet de télescoper la somme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

À partir de laquelle on forme une majoration de (S_n) :

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant 2,\ k \geqslant k-1 \Longrightarrow \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} &\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \Longrightarrow 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} < 2\end{aligned}$$

Néanmoins on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc (S_n) est croissante. Puisqu'elle est majorée, on en conclut qu'elle converge. $\boxed{S_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}}$.

On considère maintenant la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Grâce à laquelle on détermine une expression simplifiée de :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} = \underbrace{\frac{1}{(2\cdot 1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-2)^2} + \frac{1}{(2n)^2}}_{\text{termes pairs}} + \underbrace{1 + \cdots + \frac{1}{(2n-3)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}}_{\text{termes impairs}}$$

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + S'_n = \frac{1}{4}S_n + S'_n$$

Cependant $\lim S_{2n} = \lim S_n = \ell$ par unicité de la limite, donc S'_n converge par somme de suites convergentes. On note $S'_n \longrightarrow \ell' \in \mathbb{R}$ et en passant l'égalité à la limite on a $\boxed{\ell' = \frac{3}{4}\ell}$.

2.2 Utilisation des polynômes de Tchebychev pour déterminer ℓ'

On utilisera la notation x_k comme dans la section 1.3. T_n possède donc n racines simples, on peut alors décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante.

$$\frac{T'_n}{T_n} = \frac{\alpha_1}{X - x_1} + \frac{\alpha_2}{X - x_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{X - x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k}$$

On pose $\forall j \in [\![1, n]\!],\ T^*_{n,j} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n = (X - x_j)T^*_{n,j}$. Par la dérivée du produit on a en particulier :

$$T'_n(x_j) = 1 \cdot T^*_{n,j}(x_j) + (x_j - x_j){T^*_{n,j}}'(x_j) = T^*_{n,j}(x_j)$$

Soit, en multipliant par $X - x_j$ l'expression obtenue précédemment et en l'évaluant ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{T'_n}{T_n} \cdot (X - x_j) = \frac{T'_n}{(X - x_j)T^*_{n,j}} \cdot (X - x_j) = \frac{T'_n}{T^*_{n,j}} &= \alpha_j + (X - x_j)\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k} \\ \therefore X = x_j \Longrightarrow \frac{T'_n(x_j)}{T^*_{n,j}(x_j)} &= \frac{T'_n(x_j)}{T'_n(x_j)} = \alpha_j\end{aligned}$$

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \alpha_k = 1$, on a alors

$$\frac{T'_n}{T_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}$$

En évaluant cette expression en $X = 1$, il vient, d'après les résultats de la section 1.2,

$$\frac{n^2}{1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_k} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = n^2$$

On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R},\ \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \iff \sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$, ce qui permet de déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2 \cdot \frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}} = 2n^2$$

Similairement on établit $\forall a \in]0,\pi/2[,\ \frac{1}{\tan^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a} - 1$, qu'on pourra utiliser car

$$k \in [\![1,n]\!] \Longrightarrow \frac{(2k-1)\pi}{4n} \in \left[\frac{\pi}{4n}, 1 - \frac{\pi}{4n}\right] \subset]0,\pi/2[$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} - 1\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2 - n$$

2.3 Conclusion

Soit $x \in [0,\pi/2]$ et $t \in [0,x]$. On a directement :

$$\cos t \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2 t \Longrightarrow \int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1+\tan^2 t)\mathrm{d}t \Longrightarrow \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$$

On peut donc remplacer x par une valeur convenable, celle-ci étant dans l'intervalle de validité de l'inégalité précédente.

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n} \leqslant \frac{(2k-1)\pi}{4n} \leqslant \tan\frac{(2k-1)\pi}{4n} \\
\Longrightarrow\ &0 \leqslant \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \leqslant \left(\frac{4n}{(2k-1)\pi}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \quad \because x \mapsto \frac{1}{x^2} \searrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\Longrightarrow\ &\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \left(\frac{4n}{\pi}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{4n}} \\
\Longrightarrow\ &2n^2 - n \leqslant S'_n \cdot \frac{16n^2}{\pi^2} \leqslant 2n^2 \\
\Longrightarrow\ &\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16n} \leqslant S'_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

Or $\lim \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16n} = \lim \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8}$. D'après le théorème des gendarmes, on en conclut que $\lim S'_n = \frac{\pi^2}{8} = \ell'$. Par conséquent :

$$\ell = \frac{4}{3}\ell' = \frac{\pi^2}{6} \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$