Devoir de vacances n° 6

Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Définitions et notations :

- Dans ce problème, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ; dans les parties I et II, E est un plan vectoriel : $\dim(E) = 2$.
- Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$.
- On rappelle qu'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant l'identité de E et stable pour la composition $\circ$.

Objectif :

Le but du problème est de décrire toutes les sous-algèbres de l'algèbre des endomorphismes d'un plan vectoriel (parties I et II), puis d'étendre le résultat lorsque l'espace vectoriel est de dimension supérieure ou égale à 3, en se limitant alors aux sous-algèbres strictes de dimension maximale (partie III).

I. - Dimension du commutant d'un endomorphisme du plan

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et f est un endomorphisme de E. On note $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, g \circ f = f \circ g\}$.

1. On suppose que f n'est pas une homothétie.
   Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de E.
   Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?
2. Vérifier que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant f.
3. Déterminer $C(f)$ et calculer sa dimension.
4. Montrer que la famille (id_E, f, f^2) (où $f^2 = f \circ f$) est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$.

II. - Sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ lorsque $\dim(E) = 2$

Dans cette partie, E est encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et A désigne une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que A admet une base de la forme $(\mathrm{id}_E, \varphi, \psi)$ avec $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.
   [*Indication : on pourra utiliser les résultats de la question I.3.*]
2. a) Montrer qu'il existe un triplet $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\varphi \circ \psi = \lambda\,\varphi + \mu\,\psi + \nu\,\mathrm{id}_E$.
   b) Montrer que $(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_E) \circ (\psi - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est nul.
   [*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et se rappeler qu'un automorphisme commute avec son inverse.*]
3. a) Montrer que A admet une base de la forme $(\mathrm{id}_E, \varphi_1, \psi_1)$ avec $\varphi_1 \circ \psi_1 = 0$.
   b) Calculer les rangs de φ_1 et ψ_1.

c) Montrer qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ soient tous les deux colinéaires à x.

4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de chacun des éléments de A est triangulaire supérieure.
5. Décrire toutes les sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$.

$\boxed{\text{III.}}$ - Extension des résultats lorsque $\dim(E) \geq 3$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie quelconque $n \geq 1$.
À tout sous-espace vectoriel V de E, on associe l'ensemble $A_V = \{f \in \mathcal{L}(E) \,/\, f(V) \subset V\}$.

1. On considère un sous-espace vectoriel V de E de dimension $m \in [[1, n-1]]$.
   Montrer que A_V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $m^2 + (n-m)n$.
2. Établir que, pour tout $m \in [[1, n-1]]$, $m^2 + (n-m)n \geq n^2 - n + 1$, avec égalité si et seulement si $m \in \{1, n-1\}$.
3. On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et l'application $\varphi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \mathrm{tr}(f \circ u) \end{array}$.
   Montrer que φ_u est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $\varphi : u \mapsto \varphi_u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathbb{K})$.
4. Montrer que, si W est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - r$, avec $r \in [[1, n^2-1]]$, alors il existe une famille libre $(u_1, \ldots, u_r)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ telle que $W = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_{u_i})$.
5. On considère dans cette question une sous-algèbre A de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - r$, avec $r \in [[1, n^2-1]]$ et une famille libre $(u_1, \ldots, u_r)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ telle que $A = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_{u_i})$.
   Montrer que, si $g \in A$, alors, pour $j \in [[1, r]]$, $\mathrm{Ker}(\varphi_{g \circ u_j}) \subset \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_{u_i})$ et $g \circ u_j \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_r)$.
6. On suppose dans cette question que $r \in [[1, n-1]]$. On considère une famille libre $(u_1, \ldots, u_r)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ telle que $A = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_{u_i})$ soit une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - r$. On choisit $x \in E$ tel que $u_1(x) \neq 0$ et on pose $V = \mathrm{Vect}(u_1(x), \ldots, u_r(x))$.
   Montrer que la construction précédente est valide et montrer que $A = A_V$.
7. En déduire que les sous-algèbres strictes de dimension maximale de $\mathcal{L}(E)$ sont exactement celles qui stabilisent une droite ou un hyperplan.
   Préciser leur dimension.
   Retrouver la cohérence des résultats lorsque $n = 2$.