L'inégalité isopérimétrique pour les polygones

Définitions et notations :

- Dans tout le problème, n désigne un entier au moins égal à 3, et l'on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
On utilisera, le plus souvent possible, les propriétés de ω plutôt que son expression.
- Étant donné $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ (qui représente un polygone à n côtés par les affixes de ses sommets), on pose $\widehat{Z} = (\widehat{z}_0, \widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_{n-1})$ où, pour tout $j \in [[0, n-1]]$, $\widehat{z}_j = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\omega}^j\right)^k z_k$.
On convient aussi de noter systématiquement $z_n = z_0$ et $\widehat{z}_n = \widehat{z}_0$.
- Un polygone $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ est dit *équilatéral* si $|z_{j+1} - z_j|$ ne dépend pas de $j \in [[0, n-1]]$.
- Un polygone $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ est dit *régulier* s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que : $\forall\, k \in [[0, n-1]], z_k = a\omega^k + b$ ou $\forall\, k \in [[0, n-1]], z_k = a\overline{\omega}^k + b$.

Objectif :

Le but de ce problème est de montrer que, parmi les polygones du plan à n sommets de périmètre fixé, ceux qui ont une aire maximale sont les polygones réguliers.

I. - Questions préliminaires

.

1. Pour $p \in \mathbb{Z}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k$.
2. On munit le plan complexe de sa structure euclidienne usuelle et de son orientation canonique. Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, l'aire algébrique du triangle $(0, z_1, z_2)$ vaut $\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z_1} z_2)$.
3. On considère un polygone $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.
Vérifier que, pour tout $j \in [[0, n-1]]$, $z_j = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^j\right)^k \widehat{z}_k$.

II. - L'inégalité isopérimétrique

On pose, pour tout polygone $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ (on rappelle que l'on note $z_n = z_0$) :
$L(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$, $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2$ et $A(Z) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z_k} z_{k+1}\Big)$.

1. Interpréter géométriquement les quantités $L(Z)$ et $A(Z)$.
[*La quantité $E(Z)$ peut se voir comme l' « énergie » du système (en mettant par exemple des élastiques entre les z_j ...).*]
2. Calculer $L(Z)$, $E(Z)$ et $|A(Z)|$ lorsque Z est un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.
En déduire, dans ce cas, la valeur des rapports $\dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2}$, $\dfrac{|A(Z)|}{E(Z)}$ et $\dfrac{L(Z)^2}{E(Z)}$.

L'objet du problème est de démontrer que les rapports que l'on vient d'obtenir sont maximaux.

3. Vérifier, pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$ non constant, que $\dfrac{L(Z)^2}{E(Z)} \leq n$.

   À quelle condition a-t-on l'égalité ?

4. Établir les relations : $A(Z) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) |\widehat{z}_k|^2$ et $E(Z) = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\widehat{z}_k|^2$.

5. Vérifier que $E(Z) - 4\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right) A(Z) = 4\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) |\widehat{z}_k|^2$.

   En déduire la majoration cherchée de $\dfrac{|A(Z)|}{E(Z)}$.

   Montrer que l'égalité ne se produit que si Z est un polygone régulier.

6. On pose $\alpha = \sup\limits_{Z} \dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des polygones non constants $Z \in \mathbb{C}^n$.

   a) Montrer que l'on peut trouver une suite $\left(Z^k\right)_{k\in\mathbb{N}} = (z_0^k, z_1^k, \ldots, z_{n-1}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polygones vérifiant : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k = 0$, $L(Z^k) = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} |A(Z^k)| = \alpha$.

   [*Indication : les exposants k sont à considérer ici comme une numérotation.*]

   b) On considère un polygone Z vérifiant $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} z_{!j} = 0$ et $L(Z) = 1$.

   Montrer que Z est contenu dans le disque $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1/2\}$.

   c) Montrer que l'on peut extraire de $\left(Z^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(Z^{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $j \in [[0, n-1]]$, la suite $\left(z_j^{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

   d) Établir l'existence d'un polygone $Z \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2} = \alpha$ et en déduire que $\alpha < +\infty$.

7. Montrer qu'un polygone Z vérifiant $\dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2} = \alpha$ est équilatéral.

   [*Indication : on pourra, pour établir que $|z_j - z_{j-1}| = |z_{j+1} - z_j|$, « déplacer » z_j parallèlement à $(z_{j+1} - z_{j-1})$.*]

8. Déduire de ce qui précède la majoration cherchée de $\dfrac{|A(Z)|}{L(Z)^2}$.

   [*Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 5.*]

   Quels sont les cas d'égalité ?

9. On ne cherchera pas, dans cette question, à être rigoureux, mais à établir de façon intuitive le fait suivant : si une courbe du plan fermée simple (i.e. sans point double) de longueur L délimite une portion du plan d'aire A, alors $\dfrac{A}{L^2} \leq \dfrac{1}{4\pi}$.