DM N$^{\text{o}}$ 18 : Matrices circulantes

Utilisation de plusieurs techniques dans le calcul d'un déterminant

Lucas Tabary

On indexera par la suite les matrices à partir de 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On appelle *matrice circulante* la matrice $C(S)$ définie par :

$$(c_{k,j})_{0 \leq k,j \leq n-1} = C(S) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

On pose σ la permutation sur $I = [\![0, n-1]\!]$ telle que $\sigma = \begin{pmatrix} n-1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On notera tout d'abord qu'une expression similaire de σ est, pour $k \in I$, $\sigma(k) = k - 1 \mod n$, où mod est l'opérateur du reste dans la division euclidienne. Il vient alors naturellement que $\sigma^l(k) = k - l \mod n$. On établit la relation de récurrence entre les coefficients de $C(S)$:

$$\begin{cases} \forall j \in I, c_{0,j} = a_j \\ \forall k, j \in [\![0, n-2]\!] \times I, c_{k+1,j} = c_{k,\sigma(j)} \end{cases} \Longrightarrow c_{k,j} = a_{\sigma^k(j)}$$

On posera aussi $\forall k \in I$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \omega^k$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et finalement on considérera le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{j \in I} a_j X^j$. On se propose ainsi de trouver l'expression du déterminant de $C(S)$ selon plusieurs méthodes.

Utilisation du déterminant de Vandermonde

On pose $\Omega = (\omega_k^j)_{0 \leq k,j \leq n-1} = \left(\omega^{kj}\right)_{0 \leq k,j \leq n-1}$. Cherchons maintenant à exprimer les coefficients de la matrice $B = (b_{kj})_{0 \leq k,j \leq n-1} = C(S) \times \Omega$. On évalue selon la définition du produit matriciel :

$$\forall j \in I,\ b_{k,j} = \sum_{l \in I} c_{k,l} \times \omega_l^j = \omega^{kj} \sum_{l \in I} c_{k,l} \times \omega^{(l-k)j} = \omega_k^j \sum_{l \in I} a_{\sigma^k(l)} \times \omega_j^{(l-k)}$$

Or $l < n \wedge k > 0 \Longrightarrow l - k < n$. Si $l - k \geq 0$, alors $\omega_j^{(l-k)} = \omega^{(l-k \mod n)}$. Sinon, $l - k < 0 \Longrightarrow 0 < l - k + n < n$ et alors, en utilisant $\omega_j^n = 1$, il vient $\omega_j^{(l-k)} = \omega_j^{(l-k)} \times \omega_j^n = \omega_j^{(l-k)} \times \omega_j^n = \omega_j^{(l-k+n)} = \omega_j^{(l-k \mod n)}$. Dans tous les cas, on a $\omega_j^{l-k} = \omega_j^{l-k \mod n} = \omega_j^{\sigma^k(l)}$. D'où, en changeant ensuite de variable (σ étant une permutation de I), on obtient :

$$\forall j \in I,\ b_{k,j} = \omega_k^j \sum_{l \in I} a_{\sigma^k(l)} \times \omega_j^{(l-k)} = \omega_k^j \sum_{l \in I} a_{\sigma^k(l)} \times \omega_j^{\sigma^k(l)} = \omega_k^j \sum_{l \in I} a_l \times \omega_j^l$$

$$\therefore \forall (k,j) \in I^2,\ b_{k,j} = \omega_k^j \cdot P(\omega_j)$$

Calculons maintenant le déterminant de B, en factorisant les colonnes par n-linéarité :

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_0^0 P(\omega_0) & \omega_0^1 P(\omega_1) & \cdots & \omega_0^{n-1} P(\omega_{n-1}) \\ \omega_1^0 P(\omega_0) & \omega_1^1 P(\omega_1) & \cdots & \omega_1^{n-1} P(\omega_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n-1}^0 P(\omega_0) & \omega_{n-1}^1 P(\omega_1) & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} P(\omega_{n-1}) \end{vmatrix}$$
$$= P(\omega_0) \times \cdots \times P(\omega_{n-1}) \times \begin{vmatrix} \omega_0^0 & \omega_0^1 & \cdots & \omega_0^{n-1} \\ \omega_1^0 & \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n-1}^0 & \omega_{n-1}^1 & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{k \in I} P(\omega_k) \times \det \Omega$$

Néanmoins $\det(\Omega)$ correspond au déterminant de Vandermonde pour la famille $(\omega_k)_{k\in I}$, les ω_k étant distincts deux à deux, on en conclut que $\det(\Omega) \neq 0$ d'après la formule dudit déterminant. Par multiplicativité du déterminant, on a alors :

$$\det B = \det(C(S) \times \Omega) = \det(C(S)) \times \det(\Omega) \Longrightarrow \prod_{k\in I} P(\omega_k) \times \det \Omega = \det(C(S)) \times \det(\Omega)$$

En simplifiant, il vient finalement :

$$\det C(S) = \prod_{k \in I} P(\omega_k)$$

Méthode polynomiale

On considère le polynôme $Q = \det C(X, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Ainsi les X forment les coefficients diagonaux de la matrice associée. Écrivons l'expression générale du déterminant :

$$\det Q = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(I)} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=0}^{n-1} c_{\sigma(j),j} \quad \text{où } \mathfrak{S}(I) \text{ désigne l'ensemble des permutations de } I.$$
$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(I) \\ \sigma \neq \mathrm{Id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j \in I} c_{\sigma(j),j} + \varepsilon(\mathrm{Id}) \prod_{j\in I} c_{j,j} = \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(I) \\ \sigma \neq \mathrm{Id}}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j \in I} \underbrace{c_{\sigma(j),j}}_{\exists j \in I,\, \sigma(j) \neq j}}_{\deg < n} + 1 \times X^n$$

Le produit des $c_{\sigma(j),j}$ ne peut en effet contenir au plus que $n-1$ fois le terme X (car au moins un coefficient n'est pas sur la diagonale). D'où le degré du polynôme Q est n. On note que par ailleurs, $\operatorname{dom} Q = 1$.

Par la suite on notera $I \setminus \{0\} = [\![1, n-1]\!] = I^*$. On considère la matrice $B = C\left(-\sum_{j\in I^*} a_j \omega_i^j, a_1, \ldots, a_{n-1}\right)$, c'est-à-dire la matrice associée à Q évalué en les $-\sum_{j\in I^*} a_j \omega_i^j$ pour $i \in I$. On note $(\beta_j)_{j\in I}$ les vecteurs associés aux colonnes de B et $\beta_{j,l}$ leur l-ième coordonnée. Démontrons que $(\beta_j)_{j \in I}$ est liée. On détermine préalablement une expression de β_j, en utilisant la relation de récurrence sur les coefficients $c_{k,j}$ définie en introduction. Ainsi on a :

$$\forall (j,l) \in I^2,\ \beta_{j,l} = \begin{cases} a_{\sigma^l(j)} & \text{si } l \neq j \\ -\sum_{j \in I^*} a_j \omega_i^j & \text{si } l = j \end{cases}$$

On peut maintenant évaluer la valeur de la combinaison linéaire $\sum_{j\in I} \omega_i^j \beta_j$ sur chaque composante (ligne) l :

$$\sum_{j \in I} \omega_i^j \beta_{j,l} = \underbrace{\omega_i^l \left(- \sum_{j \in I^*} a_j \omega_i^j \right)}_{\text{terme de la diagonale } (l=j)} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq l}} \omega_i^j a_{\sigma^l(j)} = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq l}} a_{\sigma^l(j)} \omega_i^j - \sum_{j \in I^*} a_j \omega_i^{j+l}$$

On effectue alors dans la première somme le changement de variable $u = \sigma^l(j)$. La valeur non atteinte par la somme correspond alors à : $j \neq l \iff u = \sigma^l(j) \neq \sigma^l(l) = l - l \mod n = 0$. Par ailleurs, $\omega_i^j = \omega_i^{\sigma^{-l}(u)} = \omega_i^{u+l \mod n} = \omega_i^{u+l}$. On peut dès lors injecter dans l'expression précédente pour conclure :

$$\sum_{j\in I} \omega_i^j \beta_{j,l} = \sum_{\substack{u\in I\\u\neq 0}} a_u \omega_i^{u+l} - \sum_{j\in I^*} a_j \omega_i^{j+l} = 0 \Longrightarrow \sum_{j\in I} \omega_i^j \beta_j = 0$$

Or $(\omega_i^0, \omega_i, \ldots, \omega_i^{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$, on en conclut que la famille $(\beta_j)_{j\in I}$ est liée. Par conséquent $\det B = 0$, c'est-à-dire, $\det C\left(-\sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j, a_1, \ldots, a_{n-1}\right) = 0$, soit encore $Q\left(-\sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j\right) = 0$. En terme de polynômes, on en conclut que $\forall i \in I,\ X + \sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j \mid Q$.

On suppose maintenant que les $\sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j$ sont distincts deux à deux selon les valeurs de $i \in I$. Ainsi Q possède $\#I = n$ racines distinctes, or il est de degré n ; on peut donc en déduire l'écriture de la forme factorisée de Q. Sachant que $\operatorname{dom} Q = 1$, il vient :

$$Q(X) = 1 \times \prod_{i\in I} \left(X + \sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j\right) = \det C(X, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

On peut alors évaluer Q en a_0 pour faire apparaître que :

$$Q(a_0) = C(S) = \prod_{i\in I}\left(a_0 + \sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j\right) = \prod_{i\in I}\left(a_0 \times \omega_i^0 + \sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j\right) = \prod_{i\in I}\left(\sum_{j\in I} a_j\omega_i^j\right) = \prod_{i\in I} P(\omega_i)$$

On ne traitera pas ici le cas où certains $\sum_{j\in I^*} a_j\omega_i^j$ sont égaux.

Diagonalisation

On considère la matrice $(j_{m,l})_{0\leq m,l\leq n-1} = J = C(0, 1, 0, \ldots, 0)$. Alors on écrit, en utilisant la définition donnée en introduction :

$$j_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^m(l) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On considère la propriété (L_k) suivante, pour $k \in I$:

$$({}_kj_{m,l})_{0\leq m,l\leq n-1} = J^k = C(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{où 1 est la } k\text{-ième coordonnée} \iff {}_kj_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^m(l) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(L_1) est vraie par définition, et (L_0) est vraie en considérant $J^0 = I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n ; en effet $j_{m,l} = 1 \iff \sigma^m(l) = 0 \iff l - m \mod n = 0 \iff l - m = 0$, c'est-à-dire uniquement les coefficients diagonaux. Supposons maintenant l'existence d'un entier $k \in I \setminus \{n-1\}$ tel que (L_k) est vraie. Considérons alors l'expression de J^{k+1} :

$$J^{k+1} = J \times J^k \Longrightarrow \forall (m, l) \in I^2,\ {}_{k+1}j_{m,l} = \sum_{p\in I} j_{m,p} \times {}_kj_{p,l} = \underbrace{j_{m,\sigma^{-m}(1)}}_{1} \times {}_kj_{\sigma^{-m}(1),l} + \sum_{\substack{p\in I\\p\neq\sigma^{-m}(1)}} \underbrace{j_{m,p}}_{0} \times {}_kj_{p,l}$$

En effet $p \neq \sigma^{-m}(1) \iff \sigma^m(p) \neq 1 \iff j_{m,p} = 0$. On a alors, en appliquant (L_k) :

$${}_{k+1}j_{m,l} = {}_kj_{\sigma^{-m}(1),l} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^{\sigma^{-m}(1)}(l) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or

$$\sigma^{\sigma^{-m}(1)}(l) = k \iff \sigma^{1+m \mod n}(l) = k \iff \sigma^{1-1+m \mod n}(l) = \sigma^{-1}(k)$$
$$\iff \sigma^m(l) = k+1 \mod n = k+1 \quad \because 0 < k+1 < n$$

On établit finalement :

$$_{k+1}j_{m,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^{\sigma^{-m}(1)}(l) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^m(l) = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \iff (L_{k+1})$$

on conclut alors par récurrence, et :

$$\forall k \in I,\ J^k = C(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{où 1 est la } k\text{-ième coordonnée}$$

En utilisant les propriétés sur les matrices, il vient naturellement :

$$C(S) = C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = C(a_0, 0, \ldots, 0) + C(0, a_1, \ldots, 0) + \cdots + C(0, \ldots, 0, a_{n-1})$$
$$= a_0 C(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_{n-1} C(0, \ldots, 0, 1) = \sum_{k \in I} a_k J^k = P(J)$$

On note maintenant $Q = \det(J - XI_n)$. Explicitons l'expression de Q en développant le déterminant sur la première colonne, puis utilisons les formules des déterminants des matrices remarquables :

$$Q = \begin{vmatrix} -X & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -X & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & -X \end{vmatrix} = -X \times \underbrace{\begin{vmatrix} -X & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -X \end{vmatrix}}_{\text{matrice scalaire}} + 1 \times (-1)^{1+n} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -X & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -X & 1 \end{vmatrix}}_{\text{matrice triangulaire inférieure}}$$

$$= -X \prod_{i=1}^{n-1} (-X) + (-1)^{1+n} \prod_{i=1}^{n-1} 1 = (-1)^n X^n + (-1)^n(-1) = (-1)^n (X^n - 1)$$

On établit alors l'expression des racines de Q :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ Q(\lambda) = 0 \iff (-1)^n(\lambda^n - 1) = 0 \iff \lambda^n = 1 \iff \exists k \in I,\ \lambda = \omega_k$$

Pour toute valeur de λ racine de Q, on a alors $\det(J - \lambda I_n) = 0$, c'est-à-dire que l'application linéaire canoniquement associée à $J - \lambda I_n$ dans $\mathbb{R}^n$ n'est pas bijective, donc pas injective, ce qui se traduit, sachant que cette application est linéaire, par : $\mathrm{Ker}(J - \lambda I_n) \neq \{0\}$.

Dans la suite de l'exercice, on associera aux matrices et à leurs endomorphismes canoniquement associées les mêmes notations ; dans $\mathbb{R}^n$, les matrices considérées étant de format $n \times n$.

On note maintenant $\forall k \in I,\ A_k = \mathrm{Ker}(J - \omega_k I_n)$. On remarque préalablement la caractérisation suivante de ces espaces :

$$\forall u,\ u \in A_k \iff (J - \omega_k I_n)u = 0 \iff J(u) = \omega_k u$$

Démontrons que $\bigoplus_{k \in I} A_k$ est en somme directe. Considérons alors la propriété (M_k) : $\bigoplus_{i=0}^k A_i$ est en somme directe pour $k \in I$. À $k = 0$, le résultat est évident. Supposons maintenant (M_k) vraie pour $k \in I \setminus \{n-1\}$. Soit $x \in A_{k+1} \cap \bigoplus_{i=0}^k A_i$, x se décompose de manière unique sur $\bigoplus_{i=0}^k A_i$. Avec les notations naturelles, il vient :

$$x = \sum_{i=0}^k x_i \implies \begin{cases} J(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^k J(x_i) \\ \omega_{k+1} x = \displaystyle\sum_{i=0}^k \omega_{k+1} x_i \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_{k+1} x = \displaystyle\sum_{i=0}^k \omega_i x_i \because \forall i,\ x_i \in A_i \\ \omega_{k+1} x = \displaystyle\sum_{i=0}^k \omega_{k+1} x_i \end{cases} \implies \sum_{i=0}^k \omega_i x_i = \sum_{i=0}^k \omega_{k+1} x_i$$

Par unicité de la décomposition (la somme étant directe), on en conclut, sachant que les ω_k sont tous distincts, que les x_i sont nuls et par conséquent $x = 0$. Il vient :

$$A_{k+1} \cap \bigoplus_{i=0}^{k} A_i = \{0\} \iff \bigoplus_{i=0}^{k+1} A_i \quad \text{est en somme directe} \iff (M_{k+1})$$

D'après le principe de raisonnement par récurrence, il vient alors que $\bigoplus_{k\in I} A_k$ est en somme directe. On construit alors une famille de vecteurs non nuls $\mathcal{B} = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in A_0 \times \cdots \times A_{n-1}$. $\mathcal{B}$ est libre par construction, d'après le résultat précédent. Par ailleurs $\mathcal{B}$ possède n vecteurs, or $\dim \mathbb{R}^n = n$, donc $\mathcal{B}$ est une base de l'espace. Il vient, d'après la caractérisation des éléments de A_k, que :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(J) = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-1} \end{pmatrix} = D$$

D'après la formule du changement de base, il existe P une matrice inversible telle que $J = PDP^{-1}$. Par une récurrence triviale, on obtient ainsi : $\forall k \in I,\ J^k = PD^kP^{-1}$. D'après une précédente formule, il vient finalement :

$$\begin{aligned} PC(S)P^{-1} &= P \times P(J) \times P^{-1} = P \cdot \left(\sum_{k\in I} a_k J^k\right) \cdot P^{-1} = \sum_{k\in I} a_k P J^k P^{-1} = \sum_{k\in I} a_k D^k \\ &= \sum_{k\in I} a_k \begin{pmatrix} \omega_0^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{n-1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k\in I} a_k\omega_0^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k\in I} a_k\omega_1^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k\in I} a_k\omega_{n-1}^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par invariance du déterminant par changement de base, on obtient alors :

$$\det C(S) = \begin{vmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\omega_{n-1}) \end{vmatrix} = \prod_{k\in I} P(\omega_k)$$