DM N° 9 : Étude de fonction et nombres premiers

Lucas Tabary

Exercice 1 : Étude d'une fonction

On considère la fonction à étudier suivante. On cherchera finalement à représenter avec le plus d'informations sa courbe représentative. Ses tracés sont en annexe (annexe A, page 5).

$$f\colon x \mapsto (x^2+2x)\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|,\ f\colon I \to \mathbb{R}$$

Étude des variations

Déterminons l'ensemble sur lequel f est définie. $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe pour :

$$\frac{x+2}{x} \neq 0 \text{ et } x \neq 0 \iff x \neq -2 \text{ et } x \neq 0 \ \therefore I = \mathbb{R} \setminus \{-2;\, 0\}$$

On remarque de même que f est dotée d'une symétrie centrale (possible car I est symétrique autour de -1). En effet :

$$f(-2-x) = \big((-2-x)^2 + 2(-2-x)\big)\ln\left|\frac{-2-x+2}{-2-x}\right| = (x^2+4x+4-4-2x)\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$$
$$= (x^2+2x)\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|(-1) = -f(x) \Longrightarrow f(2(-1)-x)+f(x) = 2\times 0$$

Ce qui correspond à une relation de symétrie centrale autour du point $(-1, 0)$. On pourra donc par la suite se restreindre à une étude sur $[-1;\, +\infty] \setminus \{0\}$. f est de plus continue et dérivable sur I par opération sur les fonctions usuelles. On note f' sa fonction dérivée associée sur I est on a :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = (2x+2)\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + (x^2+2x)\frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = 2(x+1)\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + x(x+2)\left(-\frac{2}{x^2}\right)\frac{x}{x+2}$$
$$f'(x) = 2(x+1)\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - 2 \Rightarrow \forall x \in I,\ x \neq -1,\ f'(x) = 2(x+1)g(x)$$

Avec $\forall x \in I \setminus \{-1\}$, $g(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{1}{x+1}$. Cette fonction est aussi continue, dérivable par opération sur les fonctions usuelles. On établit alors :

$$\forall x \in I \setminus \{-1\},\ g'(x) = \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{x(x+2)-(x+1)^2}{x(x+2)(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-x^2-2x-1}{x(x+2)(x+1)^2}$$
$$g'(x) = -\frac{1}{x(x+2)(x+1)^2}$$

On détermine maintenant les limites de g aux bornes de son intervalle de définition, qui ne présentent pas de forme indéterminée.

$$\lim_{-1^+} g = -\infty\,;\ \lim_{+\infty} = +\infty\,;\ \text{etc., par opération sur les limites.}$$

g étant continue et monotone sur $]-1;0[$, on a d'après le théorème de la bijection :

$$\forall y \in g(]-1;0[) = \mathbb{R}, \exists! x \in]-1;0[, g(x) = y$$

On notera donc α_2 la valeur correspondant à cette propriété pour $y = 0$ sur cet intervalle et α_1 son équivalent sur l'intervalle $]-2;-1[$ qui présente les même propriétés, *mutatis mutandis*[1]. On peut maintenant déterminer le signe de g puis trouver ensuite les variations de f sur I. Toute l'étude est représentée dans le tableau, figure 1.

Limites et valeurs spécifiques de f. La limite en 0 de f est obtenue en faisant apparaître une croissance comparée. On exploite la symétrie pour obtenir alors la limite en -2 (resp. en $+\infty$ et $-\infty$). On déterminera par ailleurs la valeur de α_1 par dichotomie, voir annexe B, page 5.

$$\lim_{-2} f = \lim_{0} f = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{(x^2+2x)}_{\to 0}\ln(x+2) - (x+2)\underbrace{x\ln x}_{\to 0}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x} \Longrightarrow f \underset{+\infty}{\sim} x^2\cdot\frac{2}{x} = 2x \Longrightarrow \lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

x	$-\infty$		-2		α_1		-1		α_2		0		$+\infty$
$-x$		$+$			$+$				$+$		0	$-$	
$x+2$		$-$	0		$+$				$+$			$+$	
$g'(x)$		$-$	‖		$+$		‖		$+$		‖	$-$	
g	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
$g(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2(x+1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0		$-$		0	$+$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	0 ‖ 0	↗	$f(\alpha_1)$	↘	↘	↘	$f(\alpha_2)$	↗	0 ‖ 0	↗	$+\infty$

FIGURE 1 – Tableau de variations de f

Études locale et en l'infini

Déterminons un $DL_3(-1)$ de f. Au voisinage de ce point, on peut écrire f ainsi : $f(x) = (x^2+2x)\ln(-1-\frac{2}{x})$. On posera par la suite $h = x+1$ pour se ramener à une étude en 0. Travaillons sur la partie logarithmique de f :

$$l(x) = \ln\left(-1-\frac{2}{h-1}\right) = \ln\left(1-2-\frac{2}{h-1}\right) = \ln\left[1+2\left(\frac{1}{1-h}-1\right)\right] \text{ avec } 2\left(\frac{1}{1-h}-1\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

1. Désolé, il fallait bien que je le fasse.

Écrivons un développement limité de cette première expression. On a :

$$\frac{1}{1-h} \underset{0}{=} 1+h+h^2+h^3+o\big(h^3\big) \Longrightarrow 2\left(\frac{1}{1-h}-1\right) \underset{0}{=} 2h+2h^2+2h^3+o\big(h^3\big)$$

De plus on sait que $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)$. On peut à présent composer les deux développements limités car les limites sont compatibles. Alors :

$$l(h-1) = \ln\left[1+2\left(\frac{1}{1-h}-1\right)\right] \underset{0}{=} \left[2h+2h^2+2h^3\right] - \frac{1}{2}\left[2h+2h^2+2h^3\right]^2 + \frac{1}{3}\left[2h+2h^2+2h^3\right]^3 + o\big(h^3\big)$$

$$l(h-1) \underset{0}{=} 2h + [2-2]h^2 + \left[2-4+\frac{8}{3}\right]h^3 + o\big(h^3\big) \underset{0}{=} 2h + \frac{2}{3}h^3 + o\big(h^3\big)$$

On cherche maintenant un développement limité en $x=-1$ de la partie polynomiale de f, $P(x)=x^2+2x$. On peut remarquer[2] que : $x^2+2x = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1 \Longrightarrow P(h-1) = h^2-1$. On réalise donc maintenant le produit de $P(h-1)$ et $l(h-1)$:

$$f(x) = P(x)l(x) = P(h-1)l(h-1) \underset{0}{=} (h^2-1)\left(2h+\frac{2}{3}h^3\right) + o\big(h^3\big) \underset{0}{=} -2h + \left[2-\frac{2}{3}\right]h^3 + o\big(h^3\big)$$

$$\therefore f(x) \underset{-1}{=} -2(x+1) + \frac{4}{3}(x+1)^3 + o\big((x+1)^3\big)$$

On en conclut que la position relative de la courbe par rapport à la tangente est déterminée par le terme d'ordre 3. Celui-ci étant strictement positif, on en conclut que la courbe représentative de la fonction présente un point d'inflexion en $x=-1$.

Étudions maintenant le comportement en $+\infty$ de la fonction en en déterminant un $DA_3(+\infty)$. On a, en reprenant le développement limité donné précédemment de la fonction logarithme népérien :

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \Longrightarrow f(x) \underset{+\infty}{=} (x^2+2x)\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3})\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f(x) \underset{+\infty}{=} [-1+2\times 2] + 2x + \left[\frac{8}{3}-4\right]\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{=} 2+2x \underbrace{-\frac{4}{3x}}_{<0} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On conclut de cette expression que la droite d'équation $\mathscr{T} : y = 2x+2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}$, en $+\infty$, et que celle-ci est en dessous de cette droite, car le terme d'ordre supérieur est négatif pour x tendant vers l'infini. L'étude en $-\infty$ est strictement identique et l'asymptote est par conséquent la même. Par symétrie la courbe est néanmoins au-dessus d'elle.

Recherche des points d'inflexion

Les points d'inflexion correspondant à des points où s'annulent la dérivée seconde, ils correspondent à des extrema de la dérivée première : ils n'existent donc pas sur les intervalles de monotonie de f'. Pour $x \neq -1$ (on peut l'exclure car on sait déjà qu'il s'agit d'un point d'inflexion), on a $f'(x) = 2(x+1)g(x)$. $x \mapsto 2(x+1)$ étant croissante et positive sur $I =]-1;\ +\infty[$, on en déduit que f' dispose des variations de g sur I. Les changements de monotonie étant uniquement situés en $x=0$ sur I, il s'agit du seul point à étudier. Néanmoins on peut le considérer comme exclu car f n'est pas défini en ce point. Par symétrie on en conclut qu'il n'y a pas de point d'inflexion sur l'intervalle opposé. Le seul point d'inflexion est donc celui en $x=-1$.

Exercice 2 : Nombre premiers d'une progression arithmétique

On considère au cours de l'exercice les ensembles suivants :

— $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers ;

— $A = \{p \in \mathbb{P} \mid p \equiv 5\ [6]\} = \{p_1, p_2, \ldots\}$. dans le contexte de l'exercice on supposera cet ensemble fini et on aura $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, avec n un entier naturel ;

— $\mathbb{P}_N = \{d \in \mathbb{P},\ d \mid N\}$.

Le but de l'exercice est de montrer que A est infini, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6. On fera donc l'hypothèse par l'absurde que A est fini.

2. On aurait pu utiliser la méthode des coefficients indéterminés

1. On remarque que $5 = 6 \cdot 0 + 5 \in A \Rightarrow p_1 = 5$. De même $p_2 = 11$. En se référant à l'annexe C, page 5, on constate que le premier nombre congru à 5 modulo 6 et non premier est 35. Cela peut justifier la question d'une infinité ou non d'éléments premiers de cette forme.

2. On considère le nombre N défini par (N est bien un entier fini car il est le résultat d'une opération sur un nombre fini d'éléments) :

$$N = 6 \prod_{p \in A} p - 1 = 6 \prod_{k=1}^{n} p_k - 1 = 6P - 1 = 6 \cdot p_1 p_2 \cdots p_n - 1$$

Étant un entier, il possède au moins un diviseur premier qu'on notera p. On notera de même q le reste dans la division euclidienne de p par 6, c'est-à-dire que $p \equiv q$ [6] et $q \in [\![0,\, 5]\!]$.

a. Étudions la congruence modulo 3 de N.

$$N = 6P - 1 = 3 \cdot 2P - 1 \equiv -1 \ [3] \Longrightarrow 3 \nmid N$$

On suppose donc que 3 divise p, or p divise N, donc 3 divise N par transitivité de la divisibilité. Ce qui est contradictoire, donc 3 ne divise pas p. Nécessairement, on a donc $q \neq 0$ et $q \neq 3$ (puisque dans le cas contraire, p serait divisible par 3). $q \in \{1,\, 2,\, 4,\, 5\}$.

b. On a $p \equiv q \ [6] \iff p - q = 6k = 2 \cdot 3k, k \in \mathbb{N} \iff p \equiv q \ [2]$. Supposons que q est pair. p l'est donc aussi, or N est un multiple de p, donc N est pair. Néanmoins $N \equiv 2 \cdot 3P - 1 \equiv -1 \equiv 1 \ [2]$, N est impair. Ce qui est encore absurde, on en conclut que q est impair. $q \in \{1,\, 5\}$.

3. Des questions précédentes on a conclu que tout diviseur premier de N est congru soit à 1, soit à 5 modulo 6. Supposons alors que N n'admette pas de diviseur premier congru à 5 modulo 6, c'est-à-dire, $\forall d \in \mathbb{P}_N,\ d \equiv 1$ [6]. D'après le théorème fondamentale de l'arithmétique (décomposition d'un nombre en facteurs premiers), on a :

$$N = \prod_{d \in \mathbb{P}_N} d^{\nu_d(N)} \text{ or } \forall d \in \mathbb{P}_N,\ d \equiv 1 \ [6] \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ d^n \equiv 1^n \equiv 1 \ [6]$$

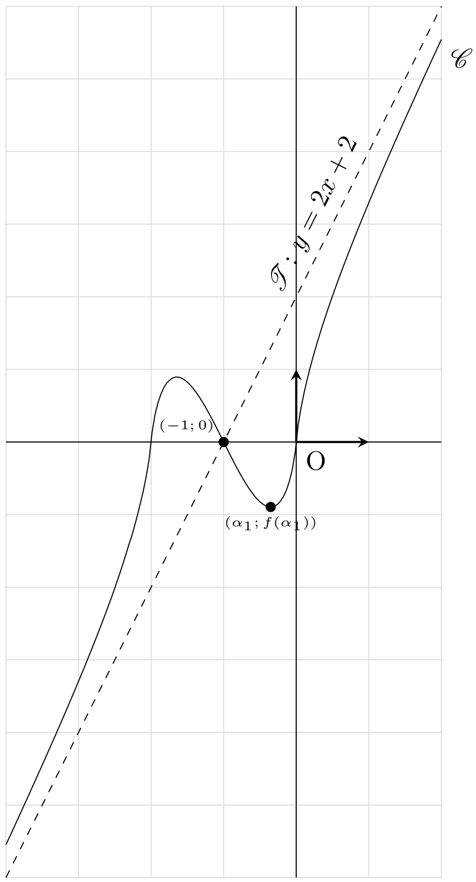
En particulier, $d^{\nu_d(N)} \equiv 1$ [6]. On en conclut : $N \equiv \overbrace{1 \times 1 \times \cdots \times 1}^{\#\mathbb{P}_N \text{ fois}} \equiv 1$ [6]. Néanmoins $N = 6P - 1 \equiv -1$ [6]. À nouveau, cela est absurde. La supposition est donc fausse : il existe au moins un diviseur premier de N, qu'on notera p_*, tel que $p_* \equiv 5$ [6].

4. On reconsidère maintenant la définition de N, en notant par ailleurs $N = kp_*$, $k \in \mathbb{N}$.

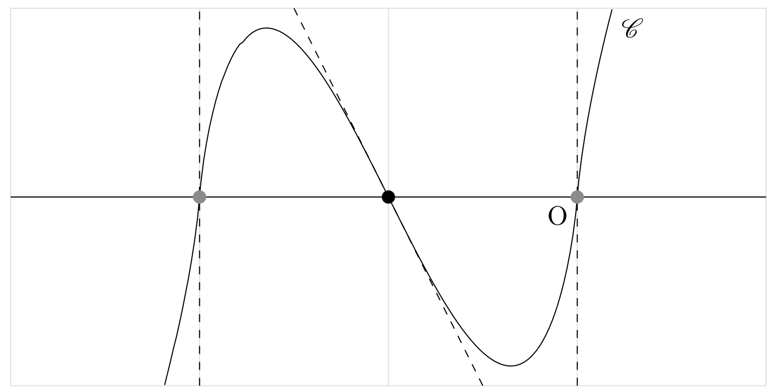
$$N = 6P - 1 = kp_* \iff 6 \cdot P + (-k) \cdot p_* = 1$$

D'après le théorème de Bézout, on en conclut que $P = p_1 p_2 \cdots p_n$ et p_* sont premiers entre eux, donc $p_* \nmid P$. Cependant, $p_* \in A \Rightarrow P = p_1 p_2 \cdots p_* \cdots p_n \Rightarrow p_* \mid P$. Par la contraposée, on en conclut que $p_* \notin A$. Ce qui est absurde, car $p_* \in \mathbb{P}$ et $p_* \equiv 5$ [6]. On en conclut que l'hypothèse initiale est fausse, et donc A possède une infinité d'éléments.

A Représentations de la courbe de f



(a) Représentation de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$



(b) Représentation des points d'inflexion de $\mathscr{C}$

B Calcul de α_1 par dichotomie

On détermine une valeur approchée à 10^{-1} de α_1 par dichotomie en cherchant un zéro de la fonction g sur $]-2;\ -1[$. On démarre avec $(a_1,\ b_1) = (-1{,}9;\ -1{,}1)$. On rappelle que $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Étape	a_n	b_n	m_n	$f(m_n)$	$b_n - a_n$
1	$-1{,}90$	$-1{,}10$	$-1{,}50$	0,90	0,80
2	$-1{,}90$	$-1{,}50$	$-1{,}70$	$-0{,}31$	0,40
3	$-1{,}70$	$-1{,}50$	$-1{,}60$	0,28	0,20
4	$-1{,}70$	$-1{,}60$	$-1{,}65$	$-0{,}01$	0,10
5	$-1{,}65$	$-1{,}60$	$-1{,}63$	0,13	0,05

On a donc pour une précision à 10^{-1}, $\alpha_1 \approx -1{,}6$.

C Premiers nombres premiers

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,\\ 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157,\\ 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, \ldots\}$$