Devoir NON Surveillé 03

Pour le 17 Octobre 2018

Exercice 1 : Un peu comme au DS

$\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls.
Par convention : $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z^0 = 1$.
On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

1. Discuter, suivant la valeur du complexe u, le nombre d'antécédents de u.
2. f est-elle surjective ? f est-elle injective ?
3. Soit
$$\mathscr{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$$
et F l'intervalle réel $[-2, 2]$.
Montrer que : $f(\mathscr{U}) \subset F$ et que $f(z) \in F \Rightarrow z \in \mathscr{U}$.
4. Soit $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < |z| < 1\}$.
Montrer que
$$g : \mathscr{D} \to \mathbb{C} - F, z \mapsto f(z)$$
est une application bijective.

Exercice 2 : Recollement de solution pour une EDL2

Question liminaire :[1]
On admet que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quelle est la limite en 0 de
$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.
Soit y une fonction réelle de la variable x réelle définie sur I.

On donne l'équation différentielle
$$(\mathscr{E}) : \quad x y'' + 2y' - xy = 4xe^x$$

1. On pose $\forall x \in I, \quad z(x) = x \cdot y(x)$.
Calculer z' et z'' en fonction de x, y, y' et y''.
Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{F}) : z'' - z = 4xe^x$.
2. Déterminer une solution particulière de $(\mathscr{F})$.
3. Résoudre $(\mathscr{F})$ sur I ; en déduire les solutions de $(\mathscr{E})$ sur I.
4. Une solution sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. En calculant les limites en 0 de f, f' pour f solution de (E), trouver toutes les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'unique solution y de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(0) = 0$. $\longrightarrow$ Pas sûr qu'on puisse trouver une unique solution

1. Ce résultat sera utilisé dans la question 4.