Devoir de vacances n° 8

Exercices de probabilités

I. - Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geq 1$ boules rouges et $b/geq1$ boules blanches.
On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.
Pour $n \geq 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement : « la n-ième boule tirée est rouge (resp. est blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge, sachant que la deuxième boule tirée est rouge ?
2. a) Pour $n \geq 1$, on note $p_n(r, b)$ la probabilité d'obtenir une boule rouge au n-ième tirage, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches.
   Montrer que : $\forall\, n \geq 2, p_n(r, b) = \dfrac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \dfrac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
3. On considère dans cette question deux entiers m et n tels que $1 \leq m < n$.

   a) Démontrer, en utilisant la même méthode, que la probabilité de $R_m \cap R_n$ est égale à $\dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
   [*Indication : on pourra noter $p_{m,n}(r, b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m-ième et n-ième tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.*]

   b) En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.
4. Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité que les n premiers tirages aient donné exactement k boules rouges.

II. - Indicatrice d'Euler

On considère un entier $n \geq 2$ et on choisit au hasard un entier compris entre 1 et n.
Pour $p \in [[1, n]]$ tel que p divise n, on note A_p l'événement : « le nombre choisi est divisible par p ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ pour tout $p \in [[1, n]]$.
2. Montrer que, si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sont les diviseurs premiers distincts de n, alors les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On désigne par $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la *fonction indicatrice d'Euler*, définie par :
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \operatorname{card}\big(\{k \in [[1, n]] \,/\, k \wedge n = 1\}\big)$.
   Déduire de ce qui précède que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = n \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

III. - Divergence de Kullback-Leibler

Sur un ensemble fini Ω, on considère deux probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ telles que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ et $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$.

On appelle *divergence de Kullback-Leibler* de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ le réel : $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\{\omega\}) \ln\left(\dfrac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right)$.

1. Établir que : $\forall\, t > 0, \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \big(\{\lambda\, t - \exp(\lambda) + 1\}\big) = t\ln(t) - t + 1$.
2. On considère une application $U : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie : $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \exp\big(U(\omega)\big)\mathbb{P}(\{\omega\}) \leq 1$.

   Montrer que : $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) \geq \sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{Q}(\{\omega\})U(\omega)$.
3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

   $V(\omega) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right)$ et $U(\omega) = V(\omega) - \ln\left(\sum\limits_{\omega' \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega'\}) \exp\big(V(\omega')\big)\right)$.

   Montrer que $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) \geq -2\ln\left(\sum\limits_{\omega \in \Omega} \sqrt{\mathbb{P}(\{\omega\})\mathbb{Q}(\{\omega\})}\right)$,

   puis que : $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) \geq \sum\limits_{\omega \in \Omega} \left(\sqrt{\mathbb{Q}(\{\omega\})} - \sqrt{\mathbb{P}(\{\omega\})}\right)^2$.
4. En déduire que $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) \geq 0$ et que $K(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

IV. - Problème du scrutin

On considère deux entiers naturels non nuls p et q tels que $p > q$.

1. On considère des *chemins* joignant des points de $\mathbb{N}^2$ et formés de déplacements successifs. Les seuls déplacements autorisés à partir du point (n, m) sont : le passage de (n, m) à $(n+1, m)$ ou de (n, m) à $(n, m+1)$.
   On note Δ la droite d'équation $y = x$.
   a) Pour $(a, b, m, n) \in \mathbb{N}^4$, combien y a-t-il de chemins différents allant de (a, b) à $(a+m, b+n)$?
   b) Montrer, en utilisant une symétrie par rapport à la droite Δ, que le nombre de chemins allant de $(1, 0)$ à (p, q) et qui rencontrent la droite Δ est égal au nombre de chemins allant de $(0, 1)$ à (p, q).
   c) En déduire que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (p, q) qui ne rencontrent Δ qu'en $(0, 0)$ est : $\dbinom{p+q-1}{p-1} - \dbinom{p+q-1}{p}$.
2. Dans un scrutin, il y a p bulletins pour le candidat P et q pour le candidat Q.
   Calculer la probabilité que le candidat P soit toujours en tête au cours du dépouillement.

$\boxed{\text{V.}}$ - Formule du crible

On rappelle que, pour toute partie A de Ω, on appelle *fonction indicatrice* de A l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}.$$

On considère $n\,(\geq 2)$ événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Montrer que : $1 - \mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.
2. En déduire que : $\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}} \right)$.
3. En déduire la *formule du crible* : $\mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right)$.

$\boxed{\text{VI.}}$ - Espérance conditionnelle

On considère une variable aléatoire réelle X sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.
Pour tout événement A de probabilité non nulle, on pose $\mathbb{E}_A(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_A(\{X = x\})$.
Il s'agit de l'espérance de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}_A)$.

1. On considère un système complet d'événements $(A_1, \ldots, A_n)$, de probabilité non nulle chacun.
   Démontrer la *formule de l'espérance totale* : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{A_k}(X)\mathbb{P}(A_k)$.
2. On considère $n\,(\in \mathbb{N}^*)$ urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ telles que, pour $j \in [[1, n]]$, l'urne U_j contient j boules blanches et $n - j$ boules noires.
   On effectue $r\,(\in \mathbb{N}^*)$ tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   a) Donner la loi de X.
   b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$\boxed{\text{VII.}}$ - Marche aléatoire particulière sur $\mathbb{N}$

Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités suivant la procédure suivante :

- au départ, la puce est en O ;
- si, à un instant, la puce est au point d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera, soit au point d'abscisse $k + 1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit au point d'abscisse $k + 2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- les sauts sont indépendants.

1. Pour $n \geq 1$, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
   Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Pour $n \geq 1$, on note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
   a) Exprimer X_n en fonction de S_n.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre minimum de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser (au cas où on ne s'y arrêterait pas) la case d'abscisse n. On a donc $Y_0 = 0$.
   a) Déterminer les valeurs prises par Y_n lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.
   b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout entier $k \geq 1$:
   $\mathbb{P}(\{Y_n = k\}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\{Y_{n-1} = k-1\}) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(\{Y_{n-2} = k-1\})$.
   c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$.
   d) α. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{E}(Y_n) - n a$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   β. Déterminer alors u_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

VIII. - Inégalité de Bernstein

On considère un entier naturel non nul n et deux réels $p \in]0,1[$ et $x > 0$. On pose $q = 1 - p$ et on considère la variable aléatoire S_n sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ qui suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

1. On considère un réel $\lambda > 0$.
   Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}\big(S_n = np \geq nx\big) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$.
2. Montrer que : $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n-np)}) = (p\,e^{\lambda q} + q\,e^{-\lambda p})^n$.
3. a) Montrer que, pour tout réel t : $e^t \leq e^{t^2} + t$.
   b) En déduire que : $\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)}$, puis que $\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{-(nx^2)/4}$.
4. a) Expliquer comment on démontrerait de la même façon que : $\mathbb{P}(S_n - n p \leq -n x) \leq e^{-(nx^2)/4}$.
   b) En déduire l'*inégalité de Bernstein* : $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-(nx^2)/4}$.
   c) Comparer l'inégalité de Bernstein avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

IX. - Fonction génératrice

On considère une variable aléatoire finie X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et l'application $g_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R}, g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k\,\in\, X(\omega)} t^k\,\mathbb{P}(\{X = k\})$.
La fonction g_X est appelée la *fonction génératrice* de X.

1. Montrer que la loi de X est entièrement déterminée par la fonction g_X.
2. Montrer que, si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes telles que $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors : $g_{X_1+X_2} = g_{X_1} g_{X_2}$.
3. a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable suivant une loi binomiale.

   b) Retrouver ainsi le fait que, si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes suivant les lois binomiales de paramètres (n_1, p) et (n_2, p) respectivement, alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. On lance deux dés classiques à six faces. Le résultat affiché par le i-ème dé, pour $i \in [[1, 2]]$, est une variable aléatoire X_i à valeurs dans $[[1, 6]]$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes. On pose $Y = X_1 + X_2$.

   a) On veut montrer que, même si les dés sont pipés, il est impossible que Y suive la loi uniforme sur $[[2, 12]]$. On raisonne par l'absurde.

      α. Déterminer alors la fonction génératrice de Y, ainsi que ses racines.

      β. Montrer que g_{X_1} et g_{X_2} sont deux polynômes de degré 6 ayant 0 pour racine, tels que $g_{X_1} g_{X_2} = g_Y$.

      γ. Conclure que c'est impossible.

   b) On veut montrer que, si les dés sont pipés, alors il est impossible que la loi de Y soit la même que quand les dés ne sont pas pipés.

      α. Déterminer la fonction génératrice P de Y quand les dés sont équilibrés, et déterminer les racines de P.

      β. On suppose que $X_1 + X_2$ suive la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés. En écrivant que $g_{X_1} g_{X_2} = P$, montrer que les dés sont équilibrés.

X. - Entropie

On considère la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω à valeurs dans un ensemble fini E de cardinal N.

On appelle *entropie* de X le réel noté $H(X)$ défini par : $H(X) = \sum\limits_{x \in E} f\big(\mathbb{P}(\{X = x\})\big)$.

1. a) Calculer $H(X)$ lorsque X est presque sûrement constante.

   b) Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme sur E.
2. a) Montrer que $f(x) \leq 1 - x$ pour $x \geq 0$ et déterminer les cas d'égalité.

   b) En déduire que : $\sum\limits_{x \in E} f\big(N\mathbb{P}(\{X = x\})\big) \leq 0$.

   c) α. Montrer que : $\sum\limits_{x \in E} f\big(N\mathbb{P}(\{X = x\})\big) = -N\ln(N) + NH(X)$.

      β. En déduire une majoration de $H(X)$.

3. a) Pour quelles variables aléatoires X l'entropie $H(X)$ est-elle minimale ?
   b) Pour quelles variables aléatoires X l'entropie $H(X)$ est-elle maximale ?
4. On considère deux variables aléatoires X et Y sur Ω à valeurs respectivement dans les ensembles finis E et F. On note Z le couple (X, Y).
   Démontrer que, si les variables X et Y sont indépendantes, alors $H(Z) = H(X) + H(Y)$.