DM N° 5 : Intégrales de Wallis

Lucas Tabary

1 Étude préliminaire

On désigne par intégrale de Wallis les intégrales suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

On considère la fonction $\varphi\colon x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$, $[0;\pi/2] \to [0;\pi/2]$, φ de classe C^1 sur son intervalle de définition. On pose $x = \varphi(u)$, on remarque que φ est bijective et que $\varphi^{-1} = \varphi$. On a :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} \cos^n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-1)\,\mathrm{d}u = -\int_0^{\pi/2} -\sin^n(u)\,\mathrm{d}u = J_n$$

Calculons maintenant I_0 et I_1 :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

1.1 Calculs supplémentaires

Linéarisons l'expression de $\cos^2 x$ et $\cos^3 x$ à l'aide des nombres complexes, afin de déterminer les valeurs de I_2 et I_3. On écrit, en utilisant ensuite l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe :

$$\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{2ix} = \left(e^{ix}\right)^2 = (\cos x + i\sin x)^2 = \cos^2 x + 2i\cos(x)\sin(x) - \sin^2 x$$
$$\therefore \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3 x$$
$$\therefore \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos(x)(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

On peut maintenant calculer :

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2x + 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\sin\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos 3x + 3\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{12}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{-1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

2 Recherche d'une expression générale

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur à 1. On réécrit J_n pour faire apparaître une relation de récurrence :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$$
$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Étudions cette dernière intégrale. On pose $\forall x \in [0;\pi/2]$, $u(x) = \sin^{n-1} x$ et $v(x) = \cos x$. Ces fonctions sont dérivables sur leur intervalle de définition et $u'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2} x$, $v'(x) = -\sin x$. u et v sont donc de classe C^1 sur $[0;\pi/2]$. Calculons maintenant par intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \frac{n-1}{n-1}\cos(x)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \left(\sin^{n-1} x\right)'\cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sin^{n-1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(\pi/2)\cos(\pi/2) - \sin^{n-1}(0)\cos(0) - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} -\sin^n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}J_n
\end{aligned}$$

On peut désormais injecter le résultar dans l'expression obtenue précédemment de J_n :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n-1}J_n = J_{n-2} - \frac{1}{n-1}J_n \Longrightarrow J_n + \frac{1}{n-1}J_n = J_{n-2} \Longrightarrow J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2} \tag{1}$$

On pose maintenant :

$$\forall n > 0,\ a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}$$

On étudie la propriété (H_p) : $J_{2p} = a_p J_0$; $J_{2p+1} = b_p J_1$. Démontrons-la par récurrence. À $n = 1$,
$a_1 J_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = J_2$ et $b_1 J_1 = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} = I_3$. Supposons maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que (H_p) soit vraie. Montrons qu'alors (H_{p+1}) l'est aussi.

$$J_{2p} = a_p J_0 \Longrightarrow J_{2p}\frac{2p+2-1}{2p+2} = a_p\frac{2(p+1)-1}{2(p+1)}J_0 \Longrightarrow J_{2p+2} = a_{p+1}J_0 \Longrightarrow J_{2(p+1)} = a_{p+1}J_0$$
$$J_{2p+1} = b_p J_1 \Longrightarrow J_{2p+1}\frac{(2p+1)+2-1}{(2p+1)+2} = b_p\frac{2(p+1)}{2(p+1)+1}J_1 \Longrightarrow J_{2p+3} = b_{p+1}J_1 \Longrightarrow J_{2(p+1)+1} = b_{p+1}J_1$$

On en conclut que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ et d'après le principe de raisonnement par récurrence, on en conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p} = a_p J_0,\ J_{2p+1} = b_p J_1$$

On tente donc finalement d'exprimer a_p et b_p avec des factorielles. On a :

$$a_p = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)\cdot 2\cdot 4\cdots(2p)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)\cdot 2\cdot 4\cdots(2p)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2p)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p))^2} = \frac{(2p)!}{\left(2^p(p!)\right)^2}$$
$$b_p = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p))^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2p+1)} = \frac{\left(2^p(p!)\right)^2}{(2p+1)!}$$

On en conlut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2p} = \frac{(2p)!}{\left(2^p p!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\ ;\ J_{2p+1} = \frac{\left(2^p p!\right)^2}{(2p+1)!}\cdot\frac{2}{3}$$