DM N° 1 : Équation différentielle et limites

Lucas Tabary

---

1 Suites, racines et limites

On pose les suites S_n et u_n telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

On se propose de rechercher les limites éventuelles de ces suites. Considérons les propriétés suivantes :

1. $(H_n) : S_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$;
2. $(L_n) : S_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$.

1.1 Démonstration de (H_n)

Démontrons-les succesivement par récurrence. Étudions d'abord la somme suivante définie sur $\mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\sqrt{(n-1)(n+1)} + 1 - \left(\sqrt{n+1}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\sqrt{n^2-1} - n \right] \leqslant 0 \because (n^2 - 1 < n^2) \Rightarrow (\sqrt{n^2-1} < n) \text{ par croissance de la fonction racine carré sur } \mathbb{R}_+$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} \leqslant 0 \iff \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} \tag{1}$$

Au rang $n = 1$, on a : $S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$; $\sqrt{1-1} + \sqrt{1} = 1 \geqslant S_1$; donc (H_1) est vraie. Supposons maintenant que (H_n) est vraie pour un certain rang n, montrons que (H_{n+1}) l'est aussi :

$$\begin{aligned} S_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n} &\iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &\iff S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \text{ d'après (1)} \end{aligned}$$

On a donc : $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$. D'après le principe de raisonnement par récurrence, on en conlut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

1.2 Démonstration de (L_n)

On détermine préalablement le signe de la somme suivante :

$$2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} \iff 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}+1 \geqslant 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \iff 2n+3 \geqslant 2\sqrt{n^2+3n+2}$$

$$\iff (2n+3)^2 \geqslant 4(n^2+3n+2) \text{ et } \left(2n+3>0 \text{ et } (n+1)(n+2)>0 \Leftrightarrow n>-\frac{2}{3} \text{ et } n \notin [-2;-1]\right)$$

$$\iff 4n^2+12n+9 \geqslant 4n^2+12n+8, \text{ toujours vraie}$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} \tag{2}$$

On détermine la valeur de (L_1). On a : $S_1 = 1$ et $2\sqrt{1+1}-2 \approx 0.83 \leqslant 1$. (L_1) est donc vraie. On considère maintenant un entier n tel que (L_n) est vraie. Montrons alors que (L_{n+1}) l'est aussi :

$$S_n \geqslant 2\sqrt{n+1}-2 \iff \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\iff S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2\sqrt{n+2}-2 \text{ d'après (2)}$$

1.3 Conclusion

On sait d'après la démonstration relative à (L_n), que S_n est minorée par $2\sqrt{n+1}-2$ pour tout entir n non nul. Cependant on a :

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n+1}-2 = +\infty, \text{ par limite de somme et de fonction composée.}$$

D'après le théorème de minoration, on en conclut que S_n diverge vers $+\infty$. Au contraire, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1}-2 \leqslant S_n \leqslant \sqrt{n-1}+\sqrt{n} \iff 2\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{\frac{n-1}{n}}+1$$

$$\iff 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{1-\frac{1}{n}}+1$$

Cependant : $\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{1} = 2$, et $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1 = \sqrt{1}+1 = 2$. D'après le théorème des gendarmes on déduit d'après l'inégalité précédente que : $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

2 Problème

Dans tout l'exercice n désigne un entier, avec $n \geqslant 2$

2.1 Résolution de l'équation différentielle

On considère l'équation différentielle d'ordre 1 suivante (E) et son ESSMA (H) :

$$(E) : y' - \frac{1}{n}y = -\frac{x+1}{n(n+1)} \text{ et } (H) : y' - \frac{1}{n}y = 0$$

Les solutions de (H), notées f_H sont d'après le cours de la forme $f_H : x \mapsto \lambda e^{\frac{x}{n}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque que le second membre de (E) est un polynôme de degré 1, on recherche donc une solution particulière de (E) notée f_p de la forme $f_p : x \mapsto ax+b$, $a{,}b \in \mathbb{R}$, f_p est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_p' : x \mapsto a$. f_p est donc solution de (E) si, et seulement si :

$$f_p'(x)-\frac{1}{n}f_p(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)} \iff a-\frac{1}{n}(ax+b) = -\frac{x}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)} \iff -\frac{a}{n}x+\left(a-\frac{b}{n}\right) = -\frac{x}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} -\frac{a}{n} &= -\frac{1}{n(n+1)} \\ a-\frac{b}{n} &= -\frac{1}{n(n+1)} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} a &= \frac{1}{n+1} \\ b &= \frac{1}{n+1}+an = \frac{1+n}{n+1} = 1 \end{array}\right.$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E) f_p est $f_p : x \mapsto \frac{x}{n+1} + 1$. Or la solution générale de (E) correspond à la somme d'une de ses solutions particulières avec la solution générale de (H). Finalement on a donc :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \mapsto \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{n+1} + 1 + \lambda e^{\frac{x}{n}} \end{array} , \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche maintenant une fonction f telle que $f \in S$ et $f(0) = 0$. On a : $f(0) = \frac{0}{n+1} + 1 + \lambda e^{\frac{0}{n}} = 0 \iff \lambda = -1$. On en déduit $f : x \mapsto \frac{x}{n+1} + 1 - e^{\frac{x}{n}}$.

2.2 Étude de la fonction

On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$, $f_n : x \mapsto \frac{x}{n+1} + 1 - e^{\frac{x}{n}}$. On se propose d'étudier cette fonction pour déterminer la position de ses racines éventuelles. Étudions donc ses variations. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme, et on a : $f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}}$. On résout maintenant l'inégalité suivante afin de construire un tableau de variations (voir figure 1) :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}} > 0 \iff e^{\frac{x}{n}} < \frac{n}{n+1} \iff \frac{x}{n} < \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \iff x < n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n$$

Déterminons maintenant les limites de f_n en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n+1} + 1 - e^{\frac{x}{n}} = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} \right) = -\infty \because \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = \lim_{\chi \to +\infty} \frac{n e^{\chi}}{\chi} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{n+1} + 1 - e^{\frac{x}{n}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{n+1} = -\infty \because \forall n > 0, \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{n}} = 0$$

Par limite de somme, de produit et de fonction composée. De plus $f_n(0) = \frac{0}{n+1} + 1 - e^{\frac{0}{n}} = 1 - 1 = 0$.

x	$-\infty$		α_n		0		$+\infty$
f_n'		$+$	0			$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

FIGURE 1 – Tableau de variations de f_n.

D'après le tableau de variations, on sait que f_n est décroissante sur $[\alpha_n, 0]$, on a donc : $\alpha_n < 0 \iff f_n(\alpha_n) > 0$. Calculons sa valeur :

$$f_n(\alpha_n) = \frac{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n+1} + 1 - e^{\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \frac{\alpha_n}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{\alpha_n + 1}{n+1}$$

On considère maintenant un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction $g_n : x \mapsto \frac{x}{n+1} + 1$, de droite associée Δ_n dans le plan, ainsi que $\mathscr{C}_n$ la courbe associée à f_n. Or on a : $\lim_{x \to -\infty} (f_n - g_n)(x) = \lim_{x \to -\infty} -e^{\frac{x}{n}} = 0$. On en conclut que Δ_n est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_n$ en $-\infty$. On représente lesdites courbes à la figure 2.

D'après le tableau de variations, on décompose la fonction sur des intervalles sur lesquels elle est monotone, on remarque que : $0 \in f_n(]-\infty, \alpha_n]) =]-\infty, f_n(\alpha_n)]$. Cependant f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (par somme) et strictement croissante sur $]-\infty, \alpha_n]$. On en conclut d'après le corollaire du TVI : $\exists! x_n \in]-\infty, \alpha_n]$, $f_n(x_n) = 0$. De même, $0 \notin f_n([\alpha_n, 0[)$, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a donc pas de solution sur $[\alpha_n, 0[$. D'où :

$$\exists! x_n \in]-\infty, 0[, \ f_n(x_n) = 0$$

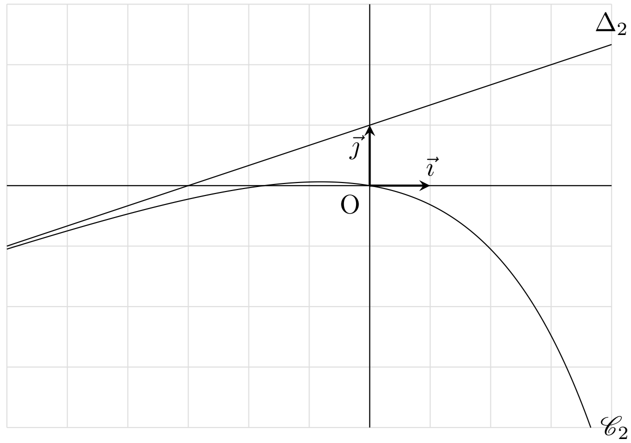

FIGURE 2 – Représentation de $\mathscr{C}_2$ et Δ_2

2.3 Limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$

2.3.1 Minoration de $(x_n)_{n\geqslant 2}$

Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{2}{x} + \ln \frac{x-1}{x+1}$ définie sur $]1, +\infty[$. Étudions-en les variations puis le signe. φ est dérivable si, et seulement si : $\frac{x-1}{x+1} > 0 \iff x - 1 > 0 \because x > -1 \iff x > 1$. φ est donc dérivable sur son ensemble de définition, et :

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{-2(x+1)(x-1) + x^2(x+1) - x^2(x-1)}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{-2x^2 + 2 + x^2(x+1-x-(-1))}{x^2(x+1)(x-1)}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^2(x+1)(x-1)}$$

Déterminons les limites de φ aux bornes de son intervalle de définition :

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x} + \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to 1} 2 + \ln \frac{x-1}{x+1} = -\infty \because \lim_{x\to 1} \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{\chi\to 0} \ln \chi = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} + \ln \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$$

On peut désormais établir le tableau de variations de φ sur $]1, +\infty[$ (figure 3) :

x	1		$+\infty$
x^2		$+$	
$x+1$		$+$	
$x-1$	0	$+$	
φ'	$\|$	$+$	
φ	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0
φ	$\|$	$-$	

FIGURE 3 – Tableau de variations de φ.

On en déduit :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi(x) < 0 \therefore \forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \varphi(n) < 0 \ \because [\![2,+\infty[\![\subset]1,+\infty[\tag{3}$$

De la conclusion précédente découle :

$$\begin{aligned}\varphi(n) = \frac{2}{n} + \ln\frac{n-1}{n+1} < 0 &\iff e^{\left(\frac{2}{n}+\ln\frac{n-1}{n+1}\right)} < e^0 \iff e^{\left(\frac{2}{n}\right)} \times \frac{n-1}{n+1} < 1 \\ &\iff 0 < 1 - e^{\left(\frac{2}{n}\right)} \times \frac{n-1}{n+1} \iff -e^{-\left(\frac{2}{n}\right)}\left(1 - e^{\left(\frac{2}{n}\right)} \times \frac{n-1}{n+1}\right) < 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Cependant on a :

$$\forall n \geqslant 2,\ f_n(-2) = 1 + \frac{-2}{n+1} - e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} = -e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} + \frac{n+1-2}{n+1} = -e^{-\left(\frac{2}{n}\right)}\left(1 - e^{\left(\frac{2}{n}\right)} \times \frac{n-1}{n+1}\right) < 0 \text{ d'après (4)}$$

Supposons que $\alpha_n < -2 < 0$. On a donc : $0 < f_n(-2) < f_n(\alpha_n)$ par décroissance de f_n sur $[\alpha_n,0]$ or $f_n(-2) < 0$, donc cette conclusion est absurde. L'hypothèse de départ est fausse et : $-2 < \alpha_n$.

Supposons maintenant que $x_n < -2$. Cela implique donc $f(x_n) < f_n(-2) < 0$ par croissance de f_n sur $]-\infty,\alpha_n]$ or $f_n(x_n) = 0$, l'hypothèse de départ est donc aussi fausse, et $x_n > -2$.

2.3.2 Majoration de $(x_n)_{n\geqslant 2}$

On calcule :

$$\begin{aligned} f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) &= 1 + \frac{2n\ln\frac{n}{n+1}}{n+1} - e^{2\ln\frac{n}{n+1}} = \frac{2n\ln\frac{n}{n+1}}{n+1} + 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{2n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1} + \frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2n}{n+1}\ln\frac{n}{n+1} + \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \frac{2n}{n+1}\left[\ln\frac{n}{n+1} + \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right] \end{aligned}$$

Afin de déterminer le signe de ce nombre, on pose $\psi : x \mapsto \ln\frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{2x(x+1)}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On se propose d'en étudier les variations pour déterminer son signe. ψ est dérivable si, et seulement si, $\frac{x}{x+1} > 0$ et $2x(x+1) \neq 0$, soit $x > 0$ et $x \neq 0$ et $x > -1$, donc finalement si $x > 0$. ψ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(x) &= \frac{2(2x(x+1)) - (2x+1)(4x+2)}{[2x(x+1)]^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{4x^2+4x-8x^2-4x-4x-2}{[2x(x+1)]^2} + \frac{x+1-x}{x(x+1)} \\ &= \frac{-4x^2-4x-2}{4[x(x+1)]^2} + \frac{1}{(x+1)x} = \frac{-2x^2-2x-1+2x(x+1)}{2[x(x+1)]^2} = -\frac{1}{2[x(x+1)]^2} \end{aligned}$$

or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ [x(x+1)]^2 > 0 \ \therefore \forall x \in]0;+\infty[,\ \psi'(x) < 0$. Déterminons les limites de ψ en 1 et en $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{x} = +\infty\,;\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}\,;\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1}\ln\frac{x}{x+1} = \lim_{\chi\to 0}\chi\ln\chi = 0$$

$$\text{D'où : } \lim_{x\to 0}\psi(x) = \lim_{x\to 0}\ln\frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{2x(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x}\left[\frac{x}{x+1}\ln\frac{x}{x+1} + \frac{2x+1}{2(x+1)^2}\right] = +\infty$$

Par limite de somme, de produit et de fonction composée.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \ \because \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$$

$$\text{On a donc : } \lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2x}}{x+1} = 0$$

On peut maintenant construire le tableau des variations de ψ (figure 4). Du tableau de signe, on déduit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) > 0$, d'où $\forall n \geqslant 2,\ \psi(n) > 0$. Cependant on a :

$$\forall n \geqslant 2,\ f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}\left[\ln\frac{n}{n+1} + \frac{2n+1}{2n(n+1)}\right] = \frac{2n}{n+1}\psi(n) > 0 \ \because \frac{2n}{n+1} > 0$$

On suppose que $2n\ln\frac{n}{n+1} < x_n$, f_n étant croissante sur $]-\infty,\alpha_n]$, on a : $f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) < f_n(x_n) = 0$ or $f_n\left(2n\ln\frac{n}{n+1}\right) > 0$. L'hypothèse donnée est fausse et on en conclut : $x_n < 2n\ln\frac{n}{n+1}$.

x	0		$+\infty$
ψ'	$\Vert$	$-$	
ψ	$\Vert$	$+\infty \searrow$	0
ψ	$\Vert$	$+$	

Figure 4 – Tableau de variations de ψ.

2.3.3 Conclusion

On considère la définition du nombre dérivée en $x = 1$ pour la fonction $x \mapsto \ln x$ de dérivée associée sur $\mathbb{R}_+^*$ $x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = (\ln 1)' \iff \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{1} = 1 \tag{5}$$

On cherche à exprimer la limite suivante à l'aide de la relation (5) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} 2n \ln \frac{n}{n+1} &= \lim_{n \to +\infty} -2n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{N \to 0} -2 \frac{1}{N} \ln \frac{\frac{1}{N} + 1}{\frac{1}{N}} \text{ en posant } N = \frac{1}{n} \\ &= \lim_{N \to 0} -2 \frac{\ln(1+N)}{N} = -2 \end{aligned}$$

On remarque maintenant la relation suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \ -2 < x_n < 2n \ln \frac{n}{n+1}$$

Or, d'après le théorème des Gendarmes, puisquent $\lim_{n \to +\infty} -2 = \lim_{n \to +\infty} 2n \ln \frac{n}{n+1} = -2$, on conclut que $(x_n)_{n \geqslant 2}$ converge, et :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = -2 \ \blacksquare$$