Devoir de vacances n ° 3

Fonctions absolument monotones

Définitions et notations :

- Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont indéfiniment dérivables sur leur intervalle de définition. La dérivée k-ième d'une fonction f est notée $f^{(k)}$. On pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$.
- Une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *absolument monotone* (en abrégé AM) lorsque f et toutes ses dérivées $f^{(k)}$ sont positives sur l'intervalle I.
- Une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite *complètement monotone* (en abrégé CM) lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $(-1)^k f^{(k)}$ est positive sur l'intervalle I.
- On dit que f est AM jusqu'au rang n si les fonctions $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont positives sur I.
  On dit que f est CM jusqu'au rang n si les fonctions $f, -f, f'', \ldots, (-1)^n f^{(n)}$ sont positives sur I.

I. - Quelques exemples

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^x$ est AM sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est CM sur $]0, +\infty[$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ définie sur $I =]0, +\infty[$.
   Déterminer toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f est AM sur I, puis toutes les valeurs de α pour lesquelles f est CM sur I.
3. Déterminer les fonctions paires qui sont AM sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer aussi celles qui sont CM sur $\mathbb{R}$.

II. - Propriétés de stabilité

1. On considère une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 et la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ définie aussi sur I.
   Montrer que f est AM sur I si et seulement si g est CM sur I.
2. Montrer que le produit de deux fonctions AM jusqu'au rang n est lui aussi AM jusqu'au rang n.
   Que peut-on dire du produit de deux fonctions CM jusqu'au rang n ?
   Que peut-on dire du produit de deux fonctions AM ? de deux fonctions CM ?
3. On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et la fonction $h : x \mapsto f(g(x))$. On suppose que f et g sont AM sur $\mathbb{R}$.
   Prouver que h est AM sur $\mathbb{R}$.
   Que peut-on dire de h si f est AM sur $\mathbb{R}$ et g est CM sur $\mathbb{R}$?
   Montrer sur un exemple que si f et g sont CM sur $\mathbb{R}$, alors la fonction h n'est pas forcément AM sur $\mathbb{R}$.
4. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, définie sur $I = [0, 1[$.
   Trouver deux constantes a et b telles que : $\forall\, x \in I, \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-x}$.
   En déduire que les fonctions $\ln(f)$, puis f sont AM sur I.

$\boxed{\text{III.}}$ - Théorème de Bernstein pour les fonctions AM

Dans cette partie, on considère une fonction f AM sur $[0, a]$, où a est un réel strictement positif fixé.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $T_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. La fonction polynomiale $T_{n,f}$ est appelée le *polynôme de Taylor en* 0 *de* f *à l'ordre* n.

1. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de $T_{n,f}$ en fonction d'un polynôme de Taylor de f'.
   En déduire que $f(x) - T_{n,f}(x) \geq 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, a]$.
2. Montrer la relation : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) - T_{n,f}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(tx) dt$.
   [*Indication : on pourra procéder par récurrence à l'aide d'une intégration par parties.*]
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - T_{n,f}(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
3. Démontrer le *théorème de Bernstein* : pour tout $x \in [0, a[$, $T_{n,f}(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   Montrer aussi le résultat en a.