0.1　簡単な変換に分解してみる

メビウス変換をいくつかの簡単な変換の合成としてあらわして, その具体的な状況をみます. メビウス変換に対応する行列の成分から幾何学的な情報を読み取ったり, 逆に幾何学的な情報からメビウス変換を構成するためにも有用です.
簡単のため, 複素平面の一次分数変換, $\mathrm{PSL}_2\mathbf{C}$ の場合を例に進めていきます.
$ad-bc=1, c\neq 0$ のとき, 一次分数変換 $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$ は次のようにかけます. [(1)]

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+b}{cx+d} && (1)\\ &= \frac{c(ax+b)}{c(cx+d)} && (2)\\ &= \frac{cax+cb}{c(cx+d)} && (3)\\ &= \frac{cax+cb+(ad-ad)}{c(cx+d)} && (4)\\ &= \frac{cax+ad+cb-ad}{c(cx+d)} && (5)\\ &= \frac{a(cx+d)-1}{c(cx+d)} && (6)\\ &= \frac{a}{c}-\frac{1}{c^2(x+d/c)}. && (7) \end{aligned}$$

いいかえると f は,

1. 平行移動 $f_1 : z \mapsto x+d/c$,
2. 回転および拡大縮小 $f_2 : z \mapsto c^2 z$,
3. $f_3 : z \mapsto -1/z$ という変換[(2)]
4. 平行移動 $f_4 : z \mapsto z+a/c$

という 4 つの変換の合成であらわせるということになります. つまり

$$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \tag{8}$$

ということですね.
ここで, r, θ を実数として, x を点 $-d/c$ を中心とした「極形式」$x=-d/c+re^{i\theta}$ であらわすと, r が一定であれば, x は中心 $-d/c$ の半径が r の円周上を動きます. このとき $f(x)$ はどうなるかというと,

$$f(x) = \frac{a}{c}-\frac{1}{c^2re^{i\theta}} = \frac{a}{c}-\frac{e^{-i\theta}}{rc^2} \tag{9}$$

となりますので, $f(x)$ は a/c を中心とした半径が $|1/(rc^2)|$ の円周上の点を（逆回りで）動きます.
とくに $r=1/|c|$ のとき,

(1) かなり細かく変形してますので, ちょっと冗長かもしれません. でもこのくらい冗長な方が, 後で見たとき（忘れたとき）にはいいのかな, とも思います.
(2) 位数 2 の楕円型変換. このような変換を「反転」と呼ぶ文献もあるが, 円による（向きを変える）「鏡映」のことを反転ということもあるので紛らわしい.

$$f(x) = \frac{a}{c} - re^{-i\theta}\frac{\bar{c}}{c} \tag{10}$$

となります．ここで$\bar{c}/c$は絶対値が1の複素数なので, $f(x)$もまたxと同様に半径が$r = 1/|c|$の円周上を動きます.

すなわち, 一次分数変換$f(x) = (ax + b)/(cx + d)$は（$c \neq 0$のとき）,

1. 中心が$-d/c$, 半径が$1/|c|$の円を
2. 中心がa/c, 半径が$1/|c|$の円に移すような変換

ということになります. [3]また，rを動かしたとき，rが大きいほどfの行き先では小さくなることから，一次分数変換fによって，中心が$-d/c$, 半径が$1/|c|$の円の外部は中心がa/c, 半径が$1/|c|$の円の内部にうつることもわかります.（無限遠点を固定しない）一次分数変換fに対して決まる，これらの円を$I(f)$（$-d/c$を中心とするほう），$I(f^{-}1)$（$-a/c$を中心とする方）をそれぞれf, f^{-1}の**等長円** *(Isometric circle)*と呼ぶことにしましょう。

以上のプロセスを逆にたどると, 平面上の２点p_1とp_2および正の実数Rを決めたとき

- p_1を中心とする半径Rの円を，p_2を中心とする半径Rの円に移すような変換

として, 一次分数変換を構成できます.

具体的には, まず条件$R = 1/|c|$から, cを正の実数として, $c = 1/R$と定め, 条件$p_1 = -d/c, p_2 = a/c$から$a = p_2c, d = -p_1c$と定めることができます．さらに条件$ad - bc = 1$からbが定まるので求めたい一次分数変換（のうちの一つ）が得られます．２次正方行列で書くと次の通りです.

$$\begin{pmatrix} p_2c & b \\ 1/R & -p_1c \end{pmatrix}.$$

前述の構成でp_2とp_1を入れかえれば逆変換が得られるはずですが，符号の違いが出てきます。しかし，PSL2Cの元としては正負の符号だけが違ったものは一次分数変換としては同じ変換をあらわしますので，きちんと逆変換であることが確認できます。

$$\begin{pmatrix} p_1c & b \\ 1/R & -p_2c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -p_1c & -b \\ -1/R & p_2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2c & b \\ 1/R & -p_1c \end{pmatrix}^{-1}$$

nFAQのコーナー

Q1. 半径が異なる円から円への変換をつくりたいときはどうすればいいのでしょうか？　A1. 異なる２つの半径をR_1, R_2としたとき，２つの半径の幾何平均が等長円の半径になるようにすればよいです。つまり$\sqrt{R_1R_2} = 1/|c|$となるようにcを決めればOKです。

Q2. $p_1 = p_2$とすると$I(f) = I(f^{-1})$となっちゃうけど大丈夫？　A2. 安心してください。大丈夫です。そういうときもあります。この場合は，等長円の内部と外部を入れ替えるような変換になります。この場合には円周上に固定点が２つあります。次節で等長円と固定点とのかかわりを詳しく見ていくことになりますのでお楽しみに。

[3] 一般に, メビウス変換の「円円対応」という性質があります．しかし, 一般にはある円の中心が別の円の中心に移るとは限りません．これらの円は円円対応の中でも特別なペアということになります。

一次分数変換を決めるパラメータの数あるいはその自由度について

なお, cを正の実数と限定しましたが, Rはcの絶対値を制御するのみで, cが複素数の場合には角度（偏角）分の自由度（１次元分の）があります．これは円の対称性を保つ回転分の１次元の自由度ともいえます[(4)].
一次分数変換の係数a, b, c, dは，複素数4つぶんだけ自由に選べるわけではありません．なぜなら条件$ad - bc = 1$から複素数３つぶんだけしか自由には選べないからです．したがって[(5)]一次分数変換のパラメータは複素3次元を動くということになります。複素数１つを実数２つ分として考えると，実6次元ということになります.
一方，平面上の二点, 円の半径, 回転角度というパラメータは，$2 \times 2 + 1 + 1 = 6$となっているため，ちょうど辻褄が合う感じで気分がいいですね。

0.2　固定点と等長円とトレースと,

さっきでてきた, $-d/c$, a/cを中心に持つ半径が$1/|c|$の円は, 一次分数変換に関連してひょっこりと顔を出すことがあります．一次分数変換の固定点と等長円の関連をみてみましょう．なお, 引き続き$c \neq 0$とします.
一次分数変換$f(x) = (ax + b)/(cx + d)$の固定点をxとすると, 固定点の満たす方程式は

$$\frac{ax + b}{cx + d} = x \tag{11}$$

なので，２次方程式$cx^2 + x(d - a) - b = 0$を解けば（$ad - bc = 1$を使ってbを消去して簡単にすると）固定点は

$$\begin{aligned} x &= \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c} && (12) \\ &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4ad + 4bc}}{2c} && (13) \\ &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c} && (14) \end{aligned}$$

と表示できます。ここで右辺をよく見ると,

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \left(-\frac{d}{c}\right)\right) \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(a + d)^2 - 4} \tag{15}$$

と変形できます．つまり$-d/c$, a/cの中点と固定点xとの位置関係をあらわす式だとも解釈できます.
とくに$a + d$が実数の場合, 固定点と２つの円$I(f), I(f^{-1})$の関係は次のように分類できます.

1. $|a + d| > 2$であれば, 固定点は$-c/d$, a/cを端点とする線分上にあり, 半径が$1/|c|$の円の内部にある. ２円は交わらない.
2. $|a + d| = 2$なら固定点は$-c/d$, a/cを中心とした半径が$1/|c|$の円の接点．２円は接する.
3. $|a + d| < 2$なら固定点は$-c/d$, a/cを端点とする垂直２等分線分と円との交点．２円は交わる.

---

(4) 群でいえば, 直交群$SO(2)$の次元が１ということと同値です．おおげさなものいいで，２次元の場合には自明にも思えることですが，3次元の場合は$\dim SO(3) = 3$となることを気に留めておくとありがたいです（誰が？）。

(5) ちゃんと言うと，リー群とリー代数との次元の対応とかそういう話になるかと思われます。

メビウス変換をあらわす行列の成分との関連でいうと, $a+d$は単に行列のトレースにすぎないのですが、, 円$I(f), I(f^{-1})$の中心間の離れ具合$a/c-(-d/c)=(a+d)/c$とも関わっていることがわかります.

0.3 to be continued...

0.4 おまけ: 3次元版（四元数を使った計算）

2次元の複素数版と比較すると面白いかもしれません。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (ax+b)(cx+d)^{-1} && (16)\\
&= (ax+b)(c^*(c^*)^{-1})(cx+d)^{-1} && (17)\\
&= (axc^*+bc^*)((cx+d)c^*)^{-1} && (18)\\
&= (axc^*+bc^*+ad^*-ad^*)((cx+d)c^*)^{-1} && (19)\\
&= (a(xc^*+d^*)-ad^*+bc^*)(cxc^*+dc^*)^{-1} && (20)\\
&= (a(xc^*+d^*)-1)(cxc^*+cd^*)^{-1} && (21)\\
&= (a(xc^*+d^*)-1)(c(xc^*+d^*))^{-1} && (22)\\
&= (a(xc^*+d^*)-1)(xc^*+d^*)^{-1}c^{-1} && (23)\\
&= a(xc^*+d^*)(xc^*+d^*)^{-1}c^{-1}-(xc^*+d^*)^{-1}c^{-1} && (24)\\
&= ac^{-1}-((x+d^*(c^*)^{-1})c^*)^{-1}c^{-1} && (25)\\
&= ac^{-1}-((x+c^{-1}d)c^*)^{-1}c^{-1} && (26)\\
&= ac^{-1}-(c(x+c^{-1}d)c^*)^{-1}. && (27)
\end{aligned}
$$

2 次元の場合と同様になる.