Solution

第 8 届河北省大学生程序设计竞赛题解

北京邮电大学 ICPC 集训队

May 26, 2024

K. Welcome

题意

输出本次比赛的简称。

K. Welcome

题解

```
print("HBCPC2024")
printf("HBCPC2024");
System.out.println("HBCPC2024");
```

A. Update
题意

一次操作可以把一种字母变成另一种，问把一个单词里所有种字母都变成 `i` 这一种要几次操作.
$1 \leq |s| \leq 10^4$。

A. Update

题解

每次可以选择一个不是 `i` 的字符全部替换成 `i`。
因此，计算有多少种不是 `i` 的字符即可。时间复杂度 $O(|s|)$。

I. Subnet
题意

给定一个 IPv4 子网，判断 IP 地址是否属于子网。
$n \leq 10^3$。

I. Subnet
题解

根据说明把 IP 地址和给定的 IP 子网转换为二进制，然后分别与子网掩码按位与，如果结果一致就说明在同一个子网内。
可以对输入的字符串进行处理，又或者可以使用 `scanf("%d.%d.%d.%d")` 直接读入 IP 地址。

C. Goose Goose Duck
题意

n 个人玩游戏。第 i 个人允许在总人数在 $[l_i, r_i]$ 加入，问怎么安排能让最多的人加入。
$1 \le n \le 10^6$。

C. Goose Goose Duck

题解

考虑当前人数为 k，现在希望新加入一个人。
贪心，选择当前可加入的人中，最早将不能加入的人加入即可（即满足 $l_i \le k \le r_i$ 的所有未加入的人中，r_i 最小的那个人）。
使用堆维护即可在 $O(n \log n)$ 的时间复杂度内解决问题。

G. Bracelet

题意

给定 00，01，11 珠子的个数，以及一个目标字符串（首尾相接），问能最长串出多长的区间（01 可以翻转成 10）。
$|s| \le 10^6$。

G. Bracelet

题解

考虑一个显然的 $O(n^2)$ 做法，从每个位置开始放到不能放为止。
发现放下一个珠子，不会影响在模板上对应位置的奇偶性，所以实质上只有两种放置方式。
于是可以使用 two-pointer 解决。
时间复杂度 $O(n)$。

J. Iris' Food

题意

$0 \sim 9$ 的数字有 a_i 个，组成一个 m 位的无前导零的十进制数，问最小可以是多少（模 10^9+7）。
$T \leq 10^4$，$a_i, m \leq 10^9$。

J. Iris' Food

题解

找到 $1 \sim 9$ 中最小的 i，满足 $a_i \geq 1$ 的非零的数，将其放在第一个，剩下的数从小到大排列。
特别的，若 $m = 1, a_0 \geq 1$，答案为 0。
对于每一段连续相同数字的权值，可以通过类似 $c \times \frac{10^{k_1}-1}{9} \times 10^{k_2}$ 的形式用快速幂求出。
时间复杂度 $O(T \log m)$，带一个 10 的常数。

E. Breakfast II

题意

给定三个食堂的坐标，n 个学生的坐标和办公室坐标，以及包子和鸡蛋限购数量和总共需要采购的数量，求所有学生总路程最少是多少。
$n \le 10^3$，坐标不超过 10^4。

E. Breakfast II

题解

首先进行贪心，如果一个人要去其中某个食堂的话，那他一定会购买 b 个包子和 e 个鸡蛋。
可以计算出最少需要几人次进行购买，即 $\max\left(\left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil,\left\lceil\frac{m}{e}\right\rceil\right)$。
首先对于每个人，枚举每个食堂其是否前往，以及其前往顺序。
得到每个人买 $0\sim 3$ 次的最短路径长度。
然后就可以直接进行 dp。设 $f_{i,j}$ 表示考虑到第 i 个人时，一共去了 j 次食堂的最短路径。
时间复杂度 $O(kn)$。这里的 n 指需要购买的数量。

F. 3 Spilt

题意

把一个竞赛图中的点分成 A、B、C 三个非空集合，要求所有的点对满足：

- 若 $x \in A, y \in B$，则连边顺序为 $x \to y$；
- 若 $x \in B, y \in C$，则连边顺序为 $x \to y$；
- 若 $x \in C, y \in A$，则连边顺序为 $x \to y$。

构造一个合法划分方法，或者输出无解。

$n \leq 500$。

F. 3 Spilt

题解

首先我们不妨假设 $1 \in A$，对答案没有什么影响，但可以方便接下来的讨论。

Lemma

如果存在合法的将点分成三组的方案，那么这个方案一定唯一。

Proof.

对于一个任意的合法方案 A, B, C，其中一组点 $x \in A, y \in B, z \in C$，显然有 $x \to y \to z \to x$。假如存在另一个合法方案 A', B', C'，考虑其中 x, y, z 的分组：

1. 仍然是 $x \in A, y \in B, z \in C$。则先不管。
2. 变成了 $x \in B, y \in C, z \in A$，也就是旋转了一下。
3. 其中两者合为了一组，比如 $x, y \in A$。但其实这种情况**不可能存在**，因为 $z \to x, y \to z$，两者和 z 的关系不同。

$\square$

F. 3 Spilt

题解

Proof.

4. x, y, z 合为了一组，比如变成了 $x, y, z \in A'$。此时还要简单讨论一下：
   - 如果 $|B| = 1$ 或 $|C| = 1$，那么 $x, y, z \in A$ 会导致 $|B'| = 0$ 或 $|C'| = 0$，则 A', B', C' 不是一个合法的方案。所以这种情况**不存在**。
   - 否则，取 $y' \in B, y' \neq y$，原先有 $x \to y', y' \to z$，则由于 x, z 合为一组，新方案中 y' 一定 $\in A'$。取 $x' \in A, z' \in C$ 同理，最后会导致原先 A, B, C 内的点现在都在 A' 内，$|B'| = |C'| = 0$，方案不合法。所以这种情况**也不存在**。

综上，只可能发生 $1, 2$ 的情况，此时再来分析 2 情况，如果发生了旋转，则剩余的点也必须跟着旋转，否则根据类似情况 4 的讨论可知是不合法的。那么就会变成 $A' = C, B' = A, C' = B$，但是这样势必无法满足 $1 \in A'$（因为会变成 $1 \in B'$），所以 2 也不会发生。

所以，只会发生情况 1，对于任意 $x \in A, y \in B, z \in C$，在新方案中都有 $x \in A', y \in B', z \in C'$，则 $A' = A, B' = B, C' = C$，新方案并不新。

于是方案是唯一的 $\square$。 $\square$

F. 3 Spilt

题解

所以我们可以得到一个简单粗暴的构造：先选择一个三元组 x, y, z，构成一开始的 A, B, C，即 $A = \{x\}, B = \{y\}, C = \{z\}$，然后枚举剩下的点往里面加入。假设当前加入点 x，如果可以加入，那么能加入哪一组一定是唯一的（根据引理）；如果不能加入，则将当前的 A, B, C 三组合并成新的 A（根据引理，由于方案是唯一的，所以不存在通过调整 A, B, C 内的点能使得 x 变得可以加入），然后另外找合法的两个点放入 B, C。重复以上过程即可。
总的复杂度为 $O(n^3)$。加上 random-shuffle 后，时间复杂度可优化为 $O(n^2 \log n)$，或能进一步优化到 $O(n^2)$。

F. 3 Spilt

题解

也可以使用 2-sat 来解决这个问题。
考虑 $1 \in A$，然后先将其他的所有的点按照与 1 的连边先分成 B, C 两个集合。
对其他的边分四种情况进行讨论。
然后可以得到若干个个如果 x 在/不在 A 集合，那么 y 就在/不在 A 集合中的关系。使用 2-sat 看是否能找出一组合法的解即可。时间复杂度为 $O(n^2)$。

H. Missing Iris

题意

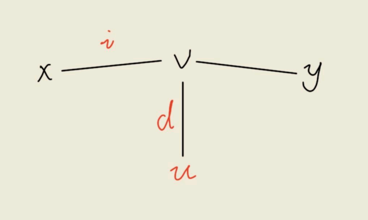
在一棵树上有一些点有单车，经过有单车的点速度就可以从 1 变成 2，多次询问从树上点 x 到点 y 的最短耗时。

$n \le 5 \times 10^5$。

H. Missing Iris

题解

我们称有共享单车的节点为**特殊点**。
假设最优路线如图所示（其中 i 为 x 到点 v 的距离，d 为 v 到最近特殊点的距离）：



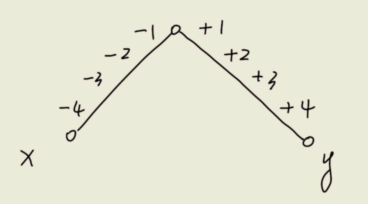
那么需要的时间为 $2i + 2d + d + (\mathsf{dis}(x, y) - i) = 3d + i + \mathsf{dis}(x, y)$。
记录距离一个点最近的特殊点的距离为 d_i，那么需要求的是 $3d_i + i$ 的最小值。

H. Missing Iris
题解

考虑固定一个节点作为树根，然后每次询问形如右图。
求出 x, y 的 lca 后，只需求：

- $x \sim$ lca 的 $3d_i - dep_i$ 最小值;
- lca $\sim y$ 的 $3d_i + dep_i$ 的最小值。

使用树上倍增分别维护这两个最值即可。
时间复杂度为 $O((n+q)\log n)$。



D. CCPC

题意

给定一个字符串 s，求有多少种方式可以通过恰好 m 次交换相邻两个不同字符后，子序列 ccpc 和 ppcp 的个数的和最多。

$|s|, m \leq 500$

D. CCPC

题解

如果 $m=0$，如何统计 ccpc 与 ppcp 的个数呢？
对于 ccpc，枚举每一个 p 的位置 i，假设一共有 k 个 c，并且这个 p 前面有 c_i 个 c，那么方案数就是 $f(c_i)=\frac{c_i(c_i-1)}{2}\times(k-c_i)$。
假设最终要得到字符串 s'，如何计算是否可以恰好 m 步得到？
设 s' 中 p 的位置为 $a_1,a_2,\cdots,a_p$，s 中 p 的位置为 $b_1,b_2,\cdots,b_p$，那么至少需要 $\sum_{i=1}^{p}|a_i-b_i|$ 步。
然后可以随意交换两个相邻位置两次。
因此，只要 $m\geq\sum_{i=1}^{p}|a_i-b_i|$ 并且奇偶性相同即可。
记 $f_{i,j,k}$ 表示考虑到第 i 位，前 i 位有 j 个 c，当前 $\sum_{i=1}^{p}|a_i-b_i|=k$ 时最大的答案。枚举下一位选什么即可。时间复杂度 $O(n^2m)$。

B. Sequence II
题意

定义一个区间 $[l, r]$ 的价值为 $\min \times \max \times (r - l + 1)$，问给定序列里区间价值第 k 大的是多少。
$n, a_i \leq 5 \times 10^4$。

B. Sequence II

题解

考虑二分一个权值 V，然后计算有多少个区间的权值小于等于 V。
因为在确定最小值的情况下，权值是随着区间的增大而增大的，所以考虑对于特定的最小值来计算区间个数。
建出为小根堆的笛卡尔树，那么就是要计算所有子树中跨过根的那些区间。
在较小的子树枚举区间的一个端点，在另一个子树中二分另一个端点可拓展到的位置，即可在 $O(n\log^3 n)$ 时间复杂度内解决这个问题。