**第13讲变化率与导数、导数的运算**







1*.*变化率与导数

(1)平均变化率:

|  |  |
| --- | --- |
| 概念 | 对于函数*y=f*(*x*),*=*叫作函数*y=f*(*x*)从*x*1到*x*2的变化率 |
| 几何意义 | 函数*y=f*(*x*)图像上两点(*x*1,*f*(*x*1)),(*x*2,*f*(*x*2))连线的 |
| 物理意义 | 若函数*y=f*(*x*)表示变速运动的质点的运动方程,则就是该质点在[*x*1,*x*2]上的速度 |

(2)导数:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 概念 | 点*x*0处 | *=*,我们称它为函数*y=f*(*x*)在处的导数,记为*f'*(*x*0)或*y'*,即*f'*(*x*0)*==* |
| 区间  (*a*,*b*) | 当*x*∈(*a*,*b*)时,*f'*(*x*)*==*叫作函数在区间(*a*,*b*)内的导数 |
| 几何  意义 | 函数*y=f*(*x*)在点*x=x*0处的导数*f'*(*x*0)就是函数图像在该点处切线的*.*曲线*y=f*(*x*)在点(*x*0,*f*(*x*0))处的切线方程是 | |
| 物理  意义 | 函数*y=f*(*x*)表示变速运动的质点的运动方程,则函数在*x=x*0处的导数就是质点在*x=x*0时的速度,在(*a*,*b*)内的导数就是质点在(*a*,*b*)内的方程 | |

2*.*导数的运算

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 常用导数公式 | 原函数 | 导函数 | 特例或推广 |
| 常数  函数 | *C'=*0(*C*为常数) |  |
| 幂函数 | (*xn*)*'=*(*n*∈Z) | *'=-* |
| 三角  函数 | (sin *x*)*'=*,(cos *x*)*'=* | 偶(奇)函数的导数是  奇(偶)函数,周期函数  的导数是周期函数 |
| 指数  函数 | (*ax*)*'=*(*a>*0,且*a*≠1) | (e*x*)*'=*e*x* |
| 对数  函数 | (log*ax*)*'=*(*a>*0,且*a*≠1) | (ln *x*)*'=*,(ln*|x|*)*'=* |
| 四则运算法则 | 加减 | [*f*(*x*)*±g*(*x*)]*'=* | *'=f'i*(*x*) |
| 乘法 | [*f*(*x*)·*g*(*x*)]*'=* | [*Cf*(*x*)]*'=Cf'*(*x*) |
| 除法 | *'=*    (*g*(*x*)≠0) | *'=-* |
| 复合函数求导 | | 复合函数*y=f*[*g*(*x*)]的导数与函数*y=f*(*u*),*u=g*(*x*)的导数之间具有关系*y'x=*,这个关系用语言表达就是“*y*对*x*的导数等于*y*对*u*的导数与*u*对*x*的导数的乘积” | |



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 向气球中充入空气,当气球中空气的体积*V*(单位:L)从1 L增加到2 L时,气球半径*r*(单位:dm)的平均变化率约为*.*

2*.***[**教材改编**]** 已知将1吨水净化到纯净度为*x*%时所需费用(单位:元)为*c*(*x*)*=*(80*<x<*100),当净化到纯净度为98%时费用的瞬时变化率为*.*

3*.***[**教材改编**]** *y=*ln(*x+*1)的导数是*y'=　　　　.*

4*.***[**教材改编**]** 曲线*y=x*e*x-*1在点(1,1)处切线的斜率等于*.*

题组二常错题

◆索引:平均变化率与导数的区别;求导时不能掌握复合函数的求导法则致错;混淆*f'*(*x*0)与[*f*(*x*0)]*'*,*f'*(*ax+b*)与[*f*(*ax+b*)]*'*的区别*.*

5*.*函数*f*(*x*)*=x*2在区间[1,2]上的平均变化率为,在*x=*2处的导数为*.*

6*.*已知函数*y=*sin 2*x*,则*y'=　　　　.*

7*.*已知*f*(*x*)*=x*2*+*3*xf'*(2),则*f*(2)*=　　　　.*

8*.*已知*f*(*x*)*=x*3,则*f'*(2*x+*3)*=*,[*f*(2*x+*3)]*'=　　　　.*



id:2147498982;FounderCES探究点一导数的运算

例1 (1)若函数*f*(*x*)*=x*·e*x+f'*(1)·*x*2,则*f'*(1)*=　　　　.*

(2)函数*y=*sin(*x+*1)*-*cos的导数为*y'=　　　　　　　.*

[总结反思] (1)对于复杂函数的求导,首先应利用代数、三角恒等变换等变形规则对函数解析式进行化简,之后再求导,这样可以减少运算量,提高运算速度*.*(2)利用公式求导时要特别注意除法公式中分子的符号,不要与求导的乘法公式混淆*.*

变式题 (1)已知函数*f*(*x*)*=*sin,则*f'=*()

A*.* B*.*

C*.* D*.*1

(2)已知函数*f*(*x*)*=*ln(*ax-*1)的导函数是*f'*(*x*),且*f'*(2)*=*2,则实数*a*的值为 ()

A*.* B*.* C*.* D*.*1

id:2147498989;FounderCES探究点二导数的几何意义

角度1求切线方程

例2 **[**2018·南昌模拟**]** 曲线*y=*3sin *x+x*3*+*1在点(0,1)处的切线方程为*.*

[总结反思] (1)曲线*y=f*(*x*)在点(*x*0,*f*(*x*0))处的切线方程为*y-f*(*x*0)*=f'*(*x*0)(*x-x*0);(2)求解曲线切线问题的关键是求切点的横坐标,在使用切点横坐标求切线方程时应注意其取值范围;(3)注意曲线过某点的切线和曲线在某点处的切线的区别*.*

变式题 已知*f*(*x*)*=x*3*-*3*x*,过点*P*(*-*2,*-*2)作函数*y=f*(*x*)图像的切线,则切线方程为*.*

角度2求切点坐标

例3 设*a*∈R,函数*f*(*x*)*=*e*x+*是偶函数,若曲线*y=f*(*x*)的一条切线的斜率是,则切点的横坐标为*.*

[总结反思] (1)*f'*(*x*)*=k*(*k*为切线斜率)的解即为切点的横坐标;(2)切点既在曲线上也在切线上,这个点对于与切点有关的问题非常重要*.*

变式题 曲线*y=*e*x*在点*A*处的切线与直线*x-y+*1*=*0平行,则点*A*的坐标为 ()

A*.*(*-*1,e*-*1) B*.*(0,1)

C*.*(1,e) D*.*(0,2)

角度3求参数的值或范围

例4 (1)若*f*(*x*)*=*2e*x+*3*ax+b*的图像在点(0,1)处的切线*l*与直线*x+*2*y-*5*=*0垂直,则*a+b=* ()

A*.*1 B*.-*1

C*.*2 D*.-*2

(2)**[**2018·莆田模拟**]** 已知定义在(0,*+∞*)上的函数*f*(*x*)*=x*2*-m*,*h*(*x*)*=*6ln *x-*4*x*,设曲线*y=f*(*x*)与*y=h*(*x*)在公共点处的切线相同,则*m=* ()

A*.-*3 B*.*1

C*.*3 D*.*5

[总结反思] (1)利用导数的几何意义求参数的基本方法:利用切点的坐标、切线的斜率、切线方程等得到关于参数

的方程(组)或者参数满足的不等式(组),进而求出参数的值或取值范围*.*

(2)注意曲线上点的横坐标的取值范围*.*

变式题 已知函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)·cos *x-ax*的图像在点(0,*f*(0))处的切线的倾斜角为45°,则*a=* ()

A*.-*2 B*.-*1

C*.*0 D*.*3

第13讲变化率与导数、导数的运算

考试说明 1*.*导数概念及其几何意义

*①*了解导数概念的实际背景*.*

*②*理解导数的几何意义*.*

2*.*导数的运算

*①*能根据导数定义求函数*y=C*(*C*为常数),*y=x*,*y=x*2,*y=x*3,*y=*,*y=*的导数*.*

*②*能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数,能求简单的复合函数(仅限于形如*f*(*ax+b*)的复合函数)的导数*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)平均斜率平均(2)*x=x*0斜率*y-f*(*x*0)*=f'*(*x*0)(*x-x*0)瞬时速度

2*.nxn-*1cos *x　-*sin *x　ax*ln *a　　f'*(*x*)*±g'*(*x*)*f'*(*x*)·*g*(*x*)*+f*(*x*)·*g'*(*x*)*y'u*·*u'x*

对点演练

1*.*0*.*16 dm/L[解析] 易知*r*(*V*)*=*,故气球中空气的体积从1 L增加到2 L时,气球半径*r*(单位:dm)的平均变化率为≈0*.*16(dm/L)*.*

2*.*1321元*/*吨[解析] *c'*(*x*)*=*,代入*x=*98计算可得*.*

3*.*[解析] *y'=×*(*x+*1)*'=.*

4*.*2[解析] *y'=x'*e*x-*1*+x*e*x-*1·(*x-*1)*'=*(*x+*1)e*x-*1,所以*y'|x=*1*=*2,即曲线在点(1,1)处切线的斜率为2*.*

5*.*34[解析] 函数*f*(*x*)*=x*2在区间[1,2]上的平均变化率为*=*3*.*因为*f'*(*x*)*=*2*x*,所以*f*(*x*)在*x=*2处的导数为2*×*2*=*4*.*

6*.*2cos 2*x*[解析] 方法一:*y'=*(2sin *x*cos *x*)*'=*2(sin *x*)*'*cos *x+*2sin *x*(cos *x*)*'=*2cos2*x-*2sin2*x=*2cos 2*x.*

方法二:*y'=*cos 2*x*·(2*x*)*'=*2cos 2*x.*

7*.-*8[解析] 因为*f'*(*x*)*=*2*x+*3*f'*(2),令*x=*2,得*f'*(2)*=-*2,所以*f*(*x*)*=x*2*-*6*x*,于是*f*(2)*=-*8*.*

8*.*3(2*x+*3)26(2*x+*3)2[解析] *f'*(*x*)*=*3*x*2,所以*f'*(2*x+*3)*=*3(2*x+*3)2,[*f*(2*x+*3)]*'=*[(2*x+*3)3]*'=*3(2*x+*3)2(2*x+*3)*'=*6(2*x+*3)2*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)对函数*f*(*x*)*=x*·e*x+f'*(1)·*x*2求导,令*x=*1,即可求得*f'*(1)的值;(2)根据导数的四则运算法则及复合函数的求导法则求解*.*

(1)*-*2e(2)cos(*x+*1)*+*sin[解析] (1)*∵f*(*x*)*=x*·e*x+f'*(1)·*x*2,

*∴f'*(*x*)*=*e*x+x*·e*x+*2*f'*(1)*x*,

*∴f'*(1)*=*e*+*e*+*2*f'*(1),解得*f'*(1)*=-*2e*.*

(2)将函数*y=*sin(*x+*1)看作*y=*sin *u*和*u=x+*1的复合函数,

则*y'x=y'u*·*u'x=*(sin *u*)*'*·(*x+*1)*'=*cos *u=*cos(*x+*1)*.*同理可以求出*y=*cos的导数为*y'=-*sin*.*所以所求函数的导数为*y'=*cos(*x+*1)*+*sin*.*

变式题(1)D(2)B[解析] (1)*∵*函数*f*(*x*)*=*sin,

*∴f'*(*x*)*=*2cos,

*∴f'=*2cos*=*2cos*=*1,故选D*.*

(2)因为*f'*(*x*)*=*,所以*f'*(2)*==*2,解得*a=*,故选B*.*

例2[思路点拨] 先求导,从而得切线的斜率,再由点斜式求得切线方程*.*

3*x-y+*1*=*0[解析] 求导得*y'=*3cos *x+x*2,

当*x=*0时,可得切线斜率*k=*3,

所以切线方程为*y=*3*x+*1,即3*x-y+*1*=*0*.*

变式题*y=-*2或*y=*9*x+*16[解析] 对函数求导,得*f'*(*x*)*=*3*x*2*-*3*.*

当点*P*(*-*2,*-*2)为切点时,切线斜率*k=*3*×*(*-*2)2*-*3*=*9,

根据点斜式得切线方程为*y=*9*x+*16*.*

当点*P*(*-*2,*-*2)不是切点时,设切点坐标为(*m*,*n*),

则可得*m=*1,

所以切点为(1,*-*2),此时切线方程为*y=-*2*.*

综上,切线方程为*y=*9*x+*16或*y=-*2*.*

例3[思路点拨] 先根据*f*(*x*)为偶函数求得*a=*1,再建立方程,解得切点的横坐标*.*

ln 2[解析] 由题意可得*f*(*x*)*=f*(*-x*),即e*x+=*e*-x+*,即(1*-a*)*=*0对任意*x*∈R都成立,所以*a=*1,所以*f*(*x*)*=*e*x+*e*-x*,*f'*(*x*)*=*e*x-*e*-x.*设切点为(*x*0,*y*0),

则*f'*(*x*0)*=-=*,由于*f'*(*x*)是R上的增函数,且*f'*(ln 2)*=*,所以*x*0*=*ln 2,

即切点的横坐标为ln 2*.*

变式题B[解析] 设点*A*的坐标为(*x*0,)*.*因为*y'=*e*x*,

所以曲线在点*A*处的切线斜率*k=y'=*,

又切线与直线*x-y+*1*=*0平行,所以*=*1,解得*x*0*=*0,

所以切点*A*的坐标为(0,1)*.*

例4[思路点拨] (1)求出原函数的导函数,根据题意列出关于*a*,*b*的方程(组),计算即可得到结果;(2)先设两曲线的公共切点为(*a*,*b*)(*a>*0),再根据两函数在*x=a*处的导数相等及切点在两曲线上列方程组,即可解得*m*的值*.*

(1)B(2)D[解析] (1)*∵f*(*x*)*=*2e*x+*3*ax+b*,*∴f'*(*x*)*=*2e*x+*3*a.*

由题意得*f'*(0)*=*2*+*3*a=*2,解得*a=*0*.*

*∵*点(0,1)在*f*(*x*)*=*2e*x+*3*ax+b*的图像上,*∴*2*+b=*1,解得*b=-*1*.*

*∴a+b=*0*+*(*-*1)*=-*1*.*

(2)设两曲线在公共点(*a*,*b*)处的切线相同(*a>*0)*.*

由题得*f'*(*x*)*=*2*x*,*h'*(*x*)*=-*4,

则解得

变式题C[解析] *f'*(*x*)*=-*ln(*x+*1)·sin *x-a.*

*∵*函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)·cos *x-ax*的图像在点(0,*f*(0))处的切线的倾斜角为45°,

*∴*1*-a=*1,*∴a=*0,故选C*.*



【备选理由】 例1考查导数的运算法则等知识,意在考查学生的基本计算能力;例2在知识点的交汇处命题,分别考查了利用函数的奇偶性求函数的解析式,利用导数的几何意义求切线方程等知识;例3是一道导数新概念题,需要依据新定义求解,计算量较大,供学有余力的同学学习;例4是导数几何意义的应用与求参数取值范围的综合问题,并涉及数形结合思想,有一定的综合性*.*

例1[配合例1使用] 设函数*f*(*x*)*=x*(2017*+*ln *x*)*.*若*f'*(*x*0)*=*2018,则*x*0*=* ()

A*.*e B*.*e2

C*.*ln 2 D*.*1

[解析] D因为*f*(*x*)*=x*(2017*+*ln *x*),

所以*f'*(*x*)*=*2018*+*ln *x*,

所以*f'*(*x*0)*=*2018*+*ln *x*0*=*2018,所以*x*0*=*1*.*

例2[配合例2使用] **[**2018·荆州中学月考**]** 函数*f*(*x*)是定义在R上的奇函数,且当*x<*0时,*f*(*x*)*=x*3*-*2*x*2,则曲线*y=f*(*x*)在点(1,*f*(1))处的切线方程为*.*

[答案] 7*x-y-*4*=*0

[解析] *∵*函数*f*(*x*)是定义在R上的奇函数,且当*x<*0时,*f*(*x*)*=x*3*-*2*x*2,

*∴*当*x>*0时,*-x<*0,*f*(*-x*)*=*(*-x*)3*-*2(*-x*)2*=-x*3*-*2*x*2*=-f*(*x*),

*∴*当*x>*0时,*f*(*x*)*=x*3*+*2*x*2*.*

*∴f*(1)*=*1*+*2*=*3,

*f'*(*x*)*=*3*x*2*+*4*x*,*∴f'*(1)*=*7,

*∴*所求切线方程为*y-*3*=*7(*x-*1),

即7*x-y-*4*=*0*.*

例3[配合例4使用] **[**2018·石家庄质检**]** 定义:如果函数*f*(*x*)在区间[*a*,*b*]上存在*x*1,*x*2(*a<x*1*<x*2*<b*)满足*f'*(*x*1)*=*,*f'*(*x*2)*=*,则称函数*f*(*x*)是区间[*a*,*b*]上的一个双中值函数*.*已知函数*f*(*x*)*=x*3*-x*2是区间[0,*t*]上的一个双中值函数,则实数*t*的取值范围是 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

[解析] A由题意知,在区间[0,*t*]上存在*x*1,*x*2(0*<x*1*<x*2*<t*)满足*f'*(*x*1)*=f'*(*x*2)*===t*2*-t.*

*∵f*(*x*)*=x*3*-x*2,*∴f'*(*x*)*=*3*x*2*-x*,*∴*方程3*x*2*-x=t*2*-t*在区间(0,*t*)上有两个不同的实数解*.*令*g*(*x*)*=*3*x*2*-x-t*2*+t*(0*<x<t*),

则需满足

解得*<t<*,*∴*实数*t*的取值范围是,故选A*.*

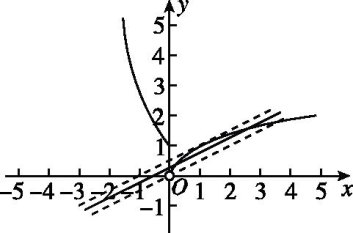
例4[配合例4使用] 已知函数*f*(*x*)*=*若函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-x-b*有且仅有两个零点,则实数*b*的取值范围是*.*

[答案] 0*<b<*

[解析] *∵*函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-x-b*有且仅有两个零点,

*∴*函数*f*(*x*)*=*与函数*y=x+b*的图像有且仅有两个交点,

作出函数*f*(*x*)*=*与函数*y=x+b*的图像,如图所示*.*



当*b=*0时,两函数图像有一个交点,是一个临界值*.*

当直线*y=x+b*与*f*(*x*)*=*(*x>*0)的图像相切时,两函数图像有一个交点,此时*b*的值是另一个临界值*.*

设切点为(*m*,),*m>*0,*∵f'*(*x*)*=·*(*x>*0),*∴·=*,解得*m=*1,

故切点为(1,1),

故*b=*1*-=.*

结合图像可得,0*<b<.*