**第18讲同角三角函数的基本关系式与诱导公式**



id:2147499550;FounderCES

1*.*同角三角函数的基本关系式

(1)平方关系:*.*

(2)商数关系:*.*

2*.*诱导公式

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 公式一 | 公式二 | 公式三 | 公式四 | 公式五 | 公式六 |
| 角 | *α+*2*k*π  (*k*∈Z) | π*+α* | *-α* | π*-α* | *-α* | *+α* |
| 正弦 | sin *α* |  |  | sin *α* | cos *α* | cos *α* |
| 余弦 | cos *α* |  | cos *α* |  | sin *α* |  |
| 正切 | tan *α* |  |  | *-*tan *α* |  |  |
| 口诀 | 函数名不变,符号看象限 | | | | 函数名改变,符号看象限 | |
| 记忆  规律 | 奇变偶不变,符号看象限 | | | | | |

常用结论

1*.*sin(*k*π*+α*)*=*(*-*1)*k*sin *α.*

2*.*在△*ABC*中:

(1)sin(*A+B*)*=*sin *C*,cos(*A+B*)*=-*cos *C*,tan(*A+B*)*=-*tan *C*;

(2)sin *=*cos ,cos *=*sin *.*

id:2147499572;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 已知cos *α=*,且*α*是第四象限角,则sin *α*的值为*.*

2*.***[**教材改编**]** 已知*=-*5,那么tan *α*的值为*.*

3*.***[**教材改编**]** 已知sin *α=*,则cos*=　　　　.*

4*.***[**教材改编**]** 求值:sin(*-*1200°)·cos 1290°*=　　　　.*

题组二常错题

◆索引:平方关系没有考虑角的象限导致出错;扩大角的范围导致出错;不会运用消元的思想;*k*π*±α*的形式没有把*k*按奇数和偶数进行分类讨论导致出错*.*

5*.*已知△*ABC*中,*=-*,则cos *A*等于*.*

6*.*已知cosπ*+α**=-*,且*α*是第四象限角,则cos(*-*3π*+α*)*=　　　　.*

7*.*已知*=*5,则sin2*α-*sin *α*cos *α=　　　　.*

8*.*已知*A=+*(*k*∈Z),则*A*的值构成的集合是*.*



id:2147499586;FounderCES探究点一三角函数的诱导公式

例1 (1)**[**2018·遵义联考**]** 若sin*=-*,则cos(2π*-α*)*=* ()

A*.-* B*.*

C*.-* D*.*

(2)**[**2018·桂林模拟**]** 已知*f*(*α*)*=*,则*f*的值为 ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

[总结反思] (1)已知角求值问题,关键是利用诱导公式把任意角的三角函数值转化为锐角的三角函数值求解*.*转化过程中注意口诀“奇变偶不变,符号看象限”的应用*.*

(2)对给定的式子进行化简或求值时,要注意给定的角之间存在的特定关系,充分利用给定的关系结合诱导公式将角进行转化*.*特别要注意每一个角所在的象限,防止符号及三角函数名出错*.*

变式题 (1)**[**2018·广东名校联考**]** 若cos*α+**=*,则sin*=* ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

(2)**[**2018·江西六校联考**]** 若点(*a*,32)在函数*y=*2*x*的图像上,则tan的值为 ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

id:2147499593;FounderCES探究点二同角三角函数的基本关系

id:2147499600;FounderCES

微点1切弦互化

例2 (1)**[**2018·南充模拟**]** 已知tan *α=*2,则的值为 ()

A*.-*3 B*.*3 C*.* D*.-*

(2)**[**2018·贵阳模拟**]** 已知sin(π*-α*)*=-*,且*α*∈,则tan(2π*-α*)*=* ()

A*.* B*.-*

C*.* D*.-*

[总结反思] (1)同角三角函数的基本关系式的功能是根据角的一个三角函数值求其他三角函数值,主要利用商数关系*=*tan *α*和平方关系1*=*sin2*α+*cos2*α*;(2)在弦切互化时,要注意判断角所在的象限,不要弄错切、弦的符号*.*

微点2“1”的变换

例3 (1)**[**2018·广东六校三联**]** 已知sin*+θ**+*3cos(π*-θ*)*=*sin(*-θ*),则sin *θ*cos *θ+*cos2*θ=* ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

(2)**[**2018·武汉调研**]** 已知sin *α*cos *α=*,则tan *α=　　　　.*

[总结反思] 对于含有sin2*x*,cos2*x*,sin *x*cos *x*的三角函数求值问题,一般可以考虑添加分母1,再将1用“sin2*x+*cos2*x*”代替,然后用分子分母同除以角的余弦的平方的方式将其转化为关于tan *α*的式子,从而求解*.*

微点3和积转换

例4 **[**2018·潍坊模拟**]** 若*α*∈(0,π),sin(π*-α*)*+*cos *α=*,则sin *α-*cos *α*的值为 ()

A*.* B*.-*

C*.* D*.-*

[总结反思] 对于sin *α+*cos *α*,sin *α-*cos *α*,sin *α*cos *α*这三个式子,利用(sin *α±*cos *α*)2*=*1*±*2sin *α*cos *α*可以达到转换、知一求二的目的*.*

应用演练

1*.*【微点1】**[**2018·南昌模拟**]** 已知sin *θ=*,*θ*∈,则tan *θ=* ()

A*.-*2 B*.-*

C*.-* D*.-*

2*.*【微点1】已知tan *x=-*,*x*∈,则cos*-x+**=* ()

A*.* B*.-*

C*.* D*.-*

3*.*【微点2】**[**2018·遵义模拟**]** 若点(2,tan *θ*)在直线*y=*2*x-*1上,则*=* ()

A*.*2 B*.*3

C*.*4 D*.*6

4*.*【微点3】若sin *θ*,cos *θ*是方程4*x*2*+*2*mx+m=*0的两根,则*m*的值为*.*

第18讲同角三角函数的基本关系式与诱导公式

考试说明 1*.*理解同角三角函数的基本关系式:sin2*x+*cos2*x=*1,*=*tan *x.*

2*.*能利用单位圆中的三角函数线推导出*±α*,π*±α*的正弦、余弦、正切的诱导公式*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)sin2*α+*cos2*α=*1(2)*=*tan *α*,*α*≠*k*π*+*(*k*∈Z)

2*.-*sin *α　-*sin *α　-*cos *α　-*cos *α　-*sin *α*tan *α　-*tan *α*

对点演练

1*.-*[解析] 由于*α*是第四象限角,故sin *α=-=-.*

2*.-*[解析] 由*=-*5,知cos *α*≠0,等式左边分子分母同时除以cos *α*,可得*=-*5,得tan *α=-.*

3*.*[解析] cos*=*cos*=-*cos*=*sin *α=.*

4*.*[解析] 原式*=-*sin(120°*+*3*×*360°)cos(210°*+*3*×*360°)*=-*sin 120°·cos 210°*=-*sin(180°-60°)·cos(180°*+*30°)*=*sin 60°·cos 30°*=×=.*

5*.-*[解析] *∵=-*,*∴*sin *A=-*cos *A*,*∵A*为△*ABC*的内角,*∴*sin *A>*0,*∴*cos *A<*0*.*又sin2*A+*cos2*A=*1,*∴*cos *A=-.*

6*.-*[解析] cosπ*+α**=*sin *α=-*,且*α*是第四象限角,所以cos *α=*,所以cos(*-*3π*+α*)*=-*cos *α=-.*

7*.*[解析] 由*=*5,知cos *α*≠0,等式左边分子分母同时除以cos *α*,得*=*5,得tan *α=*2,所以sin2*α-*sin *α*cos *α===.*

8*.*{2,*-*2}[解析] 当*k*为偶数时,*A=+=*2;当*k*为奇数时,*A=-=-*2*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)利用诱导公式进行计算;(2)根据诱导公式整理函数*f*(*α*),再将*α=-*代入求值*.*

(1)A(2)B[解析] (1)*∵*sin*=*cos *α=-*,*∴*cos(2π*-α*)*=*cos *α=-.*故选A*.*

(2)由题可知,*f*(*α*)*==-*sin *α*,

则*f=-*sin*=*sin*=*sin*=*sin*=*sin*=.*

变式题(1)D(2)C[解析] (1)*∵*cos*=*,

*∴*sin*=*sin*=-*cos*=-*,故选D*.*

(2)*∵*点(*a*,32)在函数*y=*2*x*的图像上,*∴*32*=*2*a*,*∴a=*5,

则tan*=*tan*=*tan*=-*tan*=-*,

故选C*.*

例2[思路点拨] (1)利用*=*tan *α*直接将待求式转化成只含tan *α*的式子,再求值;(2)由题设条件可得sin *α*,再根据同角三角函数基本关系式可得cos *α*,tan *α*,然后根据诱导公式化简即可得解*.*

(1)A(2)A[解析] (1)*∵*tan *α=*2,*∴*cos *α*≠0,*∴===-*3*.*故选A*.*

(2)*∵*sin(π*-α*)*=-*,*∴*sin *α=-*,

又*∵α*∈,*∴*cos *α==*,则tan *α==-.*

*∵*tan(2π*-α*)*=-*tan *α*,*∴*tan(2π*-α*)*=.*故选A*.*

例3[思路点拨] (1)根据诱导公式及已知等式得出tan *θ*,将待求式添加分母1(利用1*=*sin2*α+*cos2*α*),转化为含tan *θ*的式子,代入求值;(2)sin *α*cos *α*可变形为,利用1*=*sin2*α+*cos2*α*,从而把已知等式化为关于tan *α*的等式,解出tan *α*即可*.*

(1)C(2)3或[解析] (1)由sin*+*3cos(π*-θ*)*=*sin(*-θ*),得cos *θ-*3cos *θ=-*sin *θ*,所以tan *θ=*2,

所以sin *θ*cos *θ+*cos2*θ===.*故选C*.*

(2)由题可知,sin *α*cos *α===*,解得tan *α=*3或tan *α=.*

例4[思路点拨] 根据三角函数的诱导公式和同角三角函数的基本关系式,得2sin *α*cos *α=-<*0,进而求得(sin *α-*cos *α*)2*=*,从而得解*.*

C[解析] 由诱导公式得sin(π*-α*)*+*cos *α=*sin *α+*cos *α=*,两边平方得(sin *α+*cos *α*)2*=*1*+*2sin *α*cos *α=*,则2sin *α*cos *α=-<*0,

所以(sin *α-*cos *α*)2*=*1*-*2sin *α*cos *α=.*

又因为*α*∈(0,π),sin *α*cos *α<*0,所以sin *α-*cos *α>*0,所以sin *α-*cos *α=*,故选C*.*

应用演练

1*.*D[解析] *∵*sin *θ=*,*θ*∈,*∴*cos *θ=-=-*,则tan *θ===-*,故选D*.*

2*.*D[解析] *∵*tan *x=-*,*x*∈,*∴*sin *x=*,*∴*cos*=-*sin *x=-.*

3*.*B[解析] 由题意知,tan *θ=*4*-*1*=*3,*∴==*tan *θ=*3,故选B*.*

4*.*1*-*[解析] 由题意知sin *θ+*cos *θ=-*,sin *θ*cos *θ=*,又(sin *θ+*cos *θ*)2*=*1*+*2sin *θ*cos *θ*,所以*=*1*+*,解得*m=*1*±.*又*Δ=*4*m*2*-*16*m*≥0,所以*m*≤0或*m*≥4,所以*m=*1*-.*

id:2147507739;FounderCES

【备选理由】 例1进一步考查利用诱导公式进行化简与求值;例2考查弦切互化,是平方关系及商数关系的综合应用;例3结合导数的几何意义得出tan *α*,再巧妙使用sin2*α+*cos2*α=*1代换求值;例4考查sin *α+*cos *α*与sin *α-*cos *α*之间的转换,对于sin *α+*cos *α*,sin *α*cos *α*,sin *α-*cos *α*这三个式子,利用(sin *α±*cos *α*)2*=*1*±*2sin *α*cos *α*可以知一求二*.*

例1[配合例1使用] 已知cos *α=*,则的值为*.*

[答案] *-*

[解析] 因为cos *α=*,所以*===-=-.*

例2[配合例2使用] **[**2018·黄山一模**]** 已知*α*∈R,sin *α+*2cos *α=*,则tan *α=　　　　.*

[答案] 3或*-*

[解析] *∵*sin *α+*2cos *α=*,sin2*α+*cos2*α=*1,

*∴*(sin *α+*2cos *α*)2*=*sin2*α+*4sin *α*cos *α+*4cos2*α=*,

*∴*1*+*3cos2*α+*4sin *α*cos *α=*,即3cos2*α+*4sin *α*cos *α=*,*∴=*,

*∴=*,解得tan *α=*3或*-.*

例3[配合例3使用] **[**2018·重庆调研**]** 若曲线*f*(*x*)*=*ln *x-*在点(1,*f*(1))处的切线的倾斜角为*α*,则*=　　　　.*

[答案] 5

[解析] 因为*f*(*x*)*=*ln *x-*,

所以*f'*(*x*)*=+*,所以*f'*(1)*=*2,则tan *α=*2,

所以*====*5*.*

例4[配合例4使用] **[**2018·衡水武邑中学月考**]** 已知*-<α<*0,sin *α+*cos *α=*,则的值为 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

[解析] B因为*-<α<*0,所以cos *α>*0,sin *α<*0,

所以cos *α-*sin *α>*0*.*

因为(sin *α+*cos *α*)2*+*(cos *α-*sin *α*)2*=*2,

所以(cos *α-*sin *α*)2*=*2*-*(sin *α+*cos *α*)2*=*2*-=*,

所以cos *α-*sin *α=*,所以cos2*α-*sin2*α=×=*,

所以的值为,故选B*.*