**第19讲三角函数的图像与性质**



id:2147499621;FounderCES

正弦函数、余弦函数、正切函数的图像和性质(下表中*k*∈Z)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数 | *y=*sin *x* | *y=*cos *x* | *y=*tan *x* |
| 图像 |  |  |  |
| 定义域 | R | R | *xx*∈R,且*x*≠  *k*π*+*,*k*∈Z |
| 值域 |  |  |  |
| 周期性 | 2π | 2π | π |
| 奇偶性 |  |  | 奇函数 |
| 单调性 | 2*k*π*-*,2*k*π*+*上为增函数;上为减函数 | [2*k*π,2*k*π*+*π]上为减函数;上为增函数 | *k*π*-*,*k*π*+*上为增函数 |
| 对称  中心 |  | *k*π*+*,0 | ,0 |
| 对称轴 | *x=k*π*+* |  | 无 |

常用结论

1*.*函数*y=A*sin(*ωx+φ*)和*y=A*cos(*ωx+φ*)的最小正周期*T=*,函数*y=*tan(*ωx+φ*)的最小正周期*T=.*

2*.*正弦曲线、余弦曲线相邻两对称中心、相邻两对称轴之间的距离是半周期,相邻的对称中心与对称轴之间的距离是周期*.*正切曲线相邻两对称中心之间的距离是半周期*.*

3*.*三角函数中奇函数一般可化为*y=A*sin *ωx*或*y=A*tan *ωx*的形式,偶函数一般可化为*y=A*cos *ωx+b*的形式*.*

id:2147499643;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 函数*y=*2sin(2*x-*1)的最小正周期是*.*

2*.***[**教材改编**]** 若函数*y=A*sin *x+*1(*A>*0)的最大值是3,则它的最小值是*.*

3*.***[**教材改编**]** 函数*y=*2cos *x*在[*-*π,0]上是函数,在[0,π]上是函数*.*

4*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=*的定义域为*.*

题组二常错题

◆索引:忽视*y=A*sin *x*(或*y=A*cos *x*)中*A*对函数单调性的影响;忽视函数的定义域;忽视正、余弦函数的有界性;忽视正切函数的周期性*.*

5*.*函数*y=*1*-*2cos *x*的单调递减区间是*.*

6*.*函数*y=*cos *x*tan *x*的值域是*.*

7*.*函数*y=-*cos2*x+*3cos *x-*1的最大值为 *.*

8*.*函数*y=*tan图像的对称中心是*.*



id:2147499657;FounderCES探究点一三角函数的定义域

例1 (1)函数*f*(*x*)*=+*tan的定义域为*.*

(2)函数*y=*ln(2cos *x+*1)*+*的定义域为*.*

[总结反思] 求三角函数的定义域实际上是解简单的三角函数不等式(组),常借助三角函数线或三角函数的图像来求解*.*

变式题 (1)函数*y=*的定义域为*.*

(2)函数*f*(*x*)*=*的定义域是*.*

id:2147499664;FounderCES探究点二三角函数的值域或最值

例2 (1)函数*y=*2cos 2*x-*sin *x+*1的最大值是*.*

(2)**[**2018·沧州质检**]** 已知*x*∈,则函数*f*(*x*)*=*2cos *x*sin*x+**-*sin2*x+*sin *x*cos *x*的最大值与最小值之和为*.*

[总结反思] 求解三角函数的值域(最值)的几种方法:

*①*形如*y=a*sin *x+b*cos *x+c*的三角函数,化为*y=A*sin(*ωx+φ*)*+k*的形式,再求值域(最值);

*②*形如*y=a*sin2*x+b*sin *x+c*的三角函数,可设*t=*sin *x*,化为关于*t*的二次函数求值域(最值);

*③*形如*y=a*sin *x*cos *x+b*(sin *x±*cos *x*)*+c*的三角函数,可设*t=*sin *x±*cos *x*,化为关于*t*的二次函数求值域(最值)*.*

变式题 (1)函数*f*(*x*)*=*sin*-*cos的最大值为 ()

A*.*2 B*.*

C*.*2 D*.*

(2)函数*y=*cos *x-*sin *x+*4sin *x*cos *x*的值域是*.*

id:2147499671;FounderCES探究点三三角函数性质的有关问题id:2147499678;FounderCES

微点1三角函数的周期性

例3 (1)在函数*①y=*cos*|*2*x|*,*②y=|*cos *x|*,*③y=*cos,*④y=*tan中,最小正周期为π的所有函数为 ()

A*.①②③* B*.①③④*

C*.②④* D*.①③*

(2)若函数*f*(*x*)*=*1*+a*sin*ax+*(*a>*0)的最大值为3,则*f*(*x*)的最小正周期为*.*

[总结反思] (1)公式法:函数*y=A*sin(*ωx+φ*)或*y=A*cos(*ωx+φ*)的最小正周期*T=*,*y=A*tan(*ωx+φ*)的最小正周期*T=*;(2)图像法:利用三角函数图像的特征求周期*.*

微点2三角函数的对称性

例4 (1)**[**2018·广西贺州联考**]** 若函数*f*(*x*)与*g*(*x*)的图像有一条相同的对称轴,则称这两个函数互为同轴函数*.*下列四个函数中,与*f*(*x*)*=x*2*-x*互为同轴函数的是()

A*.g*(*x*)*=*cos(2*x-*1) B*.g*(*x*)*=*sin π*x*

C*.g*(*x*)*=*tan *x* D*.g*(*x*)*=*cos π*x*

(2)**[**2018·重庆合川区三模**]** 函数*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+φ*)*A>*0,*ω>*0,*|φ|<*的图像关于直线*x=*对称,它的最小正周期为π,则函数*f*(*x*)的图像的一个对称中心是()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

[总结反思] (1)对于函数*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+φ*),其图像的对称轴一定经过函数图像的最高点或最低点,对称中心一定是函数的零点,因此在判断直线*x=x*0或点(*x*0,0)是否是函数图像的对称轴或对称中心时,可通过检验*f*(*x*0)的值进行判断*.*

(2)函数图像的对称性与周期*T*之间有如下结论:*①*若函数图像相邻的两条对称轴分别为*x=a*与*x=b*,则最小正周期*T=*2*|b-a|*;*②*若函数图像相邻的两个对称中心分别为(*a*,0),(*b*,0),则最小正周期*T=*2*|b-a|*;*③*若函数图像相邻的对称中心与对称轴分别为(*a*,0)与*x=b*,则最小正周期*T=*4*|b-a|.*

微点3三角函数的单调性

例5 (1)**[**2018·乌鲁木齐一检**]** 已知为函数*f*(*x*)*=*sin(2*x+φ*)0*<φ<*的一个零点,则函数*f*(*x*)的单调递增区间是 ()

A*.*(*k*∈Z)

B*.*(*k*∈Z)

C*.*(*k*∈Z)

D*.*(*k*∈Z)

(2)**[**2018·合肥一中月考**]** 已知*ω>*0,函数*f*(*x*)*=*cos*ωx+*在上单调递增,则*ω*的取值范围是()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

[总结反思] (1)形如*y=A*sin(*ωx+φ*)的函数的单调性问题,一般是将*ωx+φ*看成一个整体,再结合图像利用*y=*sin *x*的单调性求解;(2)如果函数中自变量的系数为负值,要根据诱导公式把自变量系数化为正值,再确定其单调性*.*

应用演练

1*.*【微点3】**[**2018·西安八校联考**]** 已知函数*f*(*x*)*=*cos(*x+θ*)(0*<θ<*π)在*x=*处取得最小值,则*f*(*x*)在[0,π]上的单调递增区间是 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

2*.*【微点3】**[**2018·浙江余姚中学月考**]** 设*f*(*x*)*=*cos *x*,若*a=f*(ln 2),*b=f*(ln π),*c=f*,则下列关系式正确的是 ()

A*.a>b>c*

B*.b>c>a*

C*.a>c>b*

D*.b>a>c*

3*.*【微点2】**[**2019·九江一中月考**]** 已知函数*f*(*x*)*=A*sin的图像上相邻两个对称中心之间的距离为2,则函数的对称轴方程可能是 ()

A*.x=*1 B*.x=*

C*.x=* D*.x=-*1

4*.*【微点1】**[**2018·上海金山区二模**]** 函数*y=*3sin2*x+*的最小正周期*T=　　　　.*

第19讲三角函数的图像与性质

考试说明 1*.*能画出函数*y=*sin *x*,*y=*cos *x*,*y=*tan *x*的图像,了解三角函数的周期性*.*

2*.*理解正弦函数、余弦函数在区间[0,2π]上的性质(如单调性、最大值和最小值、图像与*x*轴的交点等),理解正切函数在区间*-*,内的单调性*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*[*-*1,1][*-*1,1]R奇函数偶函数2*k*π*+*,2*k*π*+*[2*k*π*-*π,2*k*π](*k*π,0)*x=k*π

对点演练

1*.*π[解析] 最小正周期*T===*π*.*

2*.-*1[解析] 依题意得*A+*1*=*3,所以*A=*2,所以函数*y=*2sin *x+*1的最小值为1*-*2*=-*1*.*

3*.*增减[解析] 由余弦函数的单调性,得函数*y=*2cos *x*在[*-*π,0]上是增函数,在[0,π]上是减函数*.*

4*.*(*k*∈Z)[解析] 由题意知tan *x*≥1,所以*+k*π≤*x<+k*π(*k*∈Z)*.*

5*.*[2*k*π*-*π,2*k*π](*k*∈Z)[解析] 函数*y=*1*-*2cos *x*的单调递减区间即函数*y=-*cos *x*的单调递减区间,即函数*y=*cos *x*的单调递增区间,即为[2*k*π*-*π,2*k*π](*k*∈Z)*.*

6*.*(*-*1,1)[解析] *∵x*≠*+k*π(*k*∈Z),*y=*cos *x*tan *x=*sin *x*,*∴y=*sin *x*∈(*-*1,1),即函数*y=*cos *x*tan *x*的值域是(*-*1,1)*.*

7*.*1[解析] 设*t=*cos *x*,则*-*1≤*t*≤1,所以*y=-t*2*+*3*t-*1*=-**t-*2*+*,当*t=*1时,函数取得最大值1*.*

8*.*(*k*∈Z)[解析] 由*x+=*(*k*∈Z),得*x=-*(*k*∈Z),所以函数*y=*tan图像的对称中心为(*k*∈Z)*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] 根据偶次根式和对数函数的性质以及正切函数、正弦函数、余弦函数的性质列出关于*x*的不等式组求解*.*

(1)*x*0*<x*≤4且*x*≠且*x*≠(2)*x*2*k*π≤*x<*2*k*π*+*,*k*∈Z[解析] (1)依题意得得0*<x*≤4且*x*≠*k*π*+*,*k*∈Z,所以函数*f*(*x*)的定义域是*x*0*<x*≤4且*x*≠且*x*≠*.*

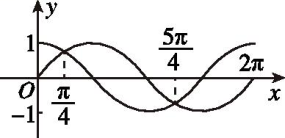
(2)由题意得即解得所以2*k*π≤*x<*2*k*π*+*,*k*∈Z,

所以函数的定义域为*x*2*k*π≤*x<*2*k*π*+*,*k*∈Z*.*

变式题(1)*x*2*k*π*+*≤*x*≤2*k*π*+*,*k*∈Z

(2)*x*2*k*π*-<x<*2*k*π*+*,*k*∈Z

[解析] (1)由题意知sin *x-*cos *x*≥0*.*作出函数*y=*sin *x*和*y=*cos *x*的图像,如图所示*.*



在[0,2π]内,满足sin *x=*cos *x*的*x*的值为,,再结合正弦、余弦函数的周期是2π,得原函数的定义域为*x*2*k*π*+*≤*x*≤2*k*π*+*,*k*∈Z*.*

(2)依题意知,*+*2sin *x>*0,即sin *x>-*,结合函数*y=*sin *x*的图像(图略),可得函数*f*(*x*)的定义域为*x*2*k*π*-<x<*2*k*π*+*,*k*∈Z*.*

例2[思路点拨] (1)将函数转化为以sin *x*为自变量的二次函数求最值;(2)将函数化为*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+φ*)*+k*的形式,再利用函数的单调性求最值*.*

(1)(2)1[解析] (1)由题知,*y=*2cos 2*x-*sin *x+*1*=*2*-*4sin2*x-*sin *x+*1*=-*4*+*,当sin *x=-*时,函数取得最大值,最大值为*.*

(2)由题可知,*f*(*x*)*=*2cos *x-*sin2*x+*sin *x*cos *x=*2sin *x*cos *x+*cos2*x-*sin2*x=*sin 2*x+*cos 2*x=*2sin*.*

因为*x*∈,所以2*x+*∈,所以当2*x+=*,即*x=*时,函数取得最大值,即为2sin*=*2;当2*x+=-*,即*x=-*时,函数取得最小值,即为2sin*=-*1*.*所以最大值与最小值之和为2*-*1*=*1*.*

变式题(1)B(2)[解析] (1)*∵f*(*x*)*=*sin*-*cos*=*sin*x-**-**=*sin*x-**=-*cos *x*,*∴*当*x=*(2*k+*1)π(*k*∈Z)时,*f*(*x*)取得最大值*.*

(2)令*t=*cos *x-*sin *x*,则*t=*cos∈[*-*,],又*t*2*=*1*-*2sin *x*cos *x*,所以sin *x*cos *x=*,所以*y=t+*4·*=-*2*t*2*+t+*2*=-*2*+.*因为*t*∈[*-*,],所以当*t=*时,*y*取得最大值;当*t=-*时,*y*取得最小值*-*2*-.*所以函数的值域是*.*

例3[思路点拨] (1)根据三角函数的周期性,求出各个函数的最小正周期,从而得出结论;(2)首先求出参数*a*,再求最小正周期*.*

(1)A(2)π[解析] (1)对于*①*,*y=*cos*|*2*x|=*cos 2*x*,则它的最小正周期为*=*π;

对于*②*,*y=|*cos *x|*的最小正周期为*×=*π;

对于*③*,*y=*cos的最小正周期为*=*π;

对于*④*,*y=*tan的最小正周期为*.*

故选A*.*

(2)*∵*函数*f*(*x*)*=*1*+a*sin(*a>*0)的最大值为1*+a*,*∴*1*+a=*3,*∴a=*2,

因此*f*(*x*)的最小正周期为*=*π*.*

例4[思路点拨] (1)函数*f*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=*1,逐一验证各选项,可得符合条件的函数;(2)由周期求出*ω=*2,再由图像关于直线*x=*对称,求得*φ=-*,进而可求得*f*(*x*)的图像的对称中心*.*

(1)D(2)B[解析] (1)易知*f*(*x*)*=x*2*-x*的图像关于直线*x=*1对称*.*对于选项A,函数*g*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=+*(*k*∈Z);对于选项B,函数*g*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=+k*(*k*∈Z);对于选项C,函数*g*(*x*)的图像不存在对称轴;对于选项D,函数*g*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=k*(*k*∈Z),当*k=*1时,其中有一条对称轴为直线*x=*1,符合题意*.*故选D*.*

(2)由题意可得*=*π,*∴ω=*2,*∴f*(*x*)*=A*sin(2*x+φ*)*.*

*∵*函数*f*(*x*)的图像关于直线*x=*对称,*∴f=A*sin*=±A*,即sin*=±*1*.∵|φ|<*,*∴φ=-*,故函数*f*(*x*)*=A*sin*.*令2*x-=k*π,*k*∈Z,可得*x=+*,*k*∈Z,故函数*f*(*x*)的图像的对称中心为*+*,0,*k*∈Z*.*结合选项可知,

函数*f*(*x*)的图像的一个对称中心是*.*故选B*.*

例5[思路点拨] (1)由条件求出*φ*,根据正弦函数的单调性求解;(2)先求出函数*f*(*x*)的单调递增区间,由是所求单调递增区间的子集得出*ω*的取值范围*.*

(1)C(2)C[解析] (1)*∵*为函数*f*(*x*)*=*sin(2*x+φ*)0*<φ<*的一个零点,

*∴f=*sin*=*0,

*∴+φ=k*π(*k*∈Z),解得*φ=k*π*-*(*k*∈Z)*.*

*∵*0*<φ<*,*∴φ=*,

*∴f*(*x*)*=*sin,令*-+*2*k*π≤2*x+*≤*+*2*k*π(*k*∈Z),则*k*π*-*≤*x*≤*k*π*+*(*k*∈Z),

故选C*.*

(2)令2*k*π*-*π≤*ωx+*≤2*k*π,*k*∈Z,*∵ω>*0,*∴-*≤*x*≤*-*,*k*∈Z,

*∴*函数*f*(*x*)*=*cos的单调递增区间为,*k*∈Z*.*

*∵f*(*x*)在上单调递增,

*∴k*∈Z,

解得6*k-*4≤*ω*≤4*k-*,*k*∈Z*.*由题意知,*-*≤*×*,*∴*0*<ω*≤6,*∴*2≤*ω*≤*.*

应用演练

1*.*A[解析] *∵*函数*f*(*x*)*=*cos(*x+θ*)(0*<θ<*π)在*x=*处取得最小值,*∴*cos*=-*1,*∴+θ=*π*+*2*k*π,*k*∈Z,又*∵*0*<θ<*π,*∴θ=*,即*f*(*x*)*=*cos*.*令*-*π*+*2*k*π≤*x+*≤2*k*π,*k*∈Z,解得*-+*2*k*π≤*x*≤*-+*2*k*π,*k*∈Z,又*∵x*∈[0,π],*∴k=*1,*∴f*(*x*)在[0,π]上的单调递增区间是,故选A*.*

2*.*C[解析] 因为函数*f*(*x*)*=*cos *x*是偶函数,所以*c=f=f*(ln 3)*.*因为0*<*ln 2*<*ln 3*<*ln π*<*π,且函数*f*(*x*)在[0,π]上单调递减,所以*f*(ln 2)*>f*(ln 3)*>f*(ln π),即*a>c>b.*故选C*.*

3*.*C[解析] 由题可知,函数的最小正周期*T=*2*×*2*=*4,所以*ω==.*令*x+=k*π*+*,*k*∈Z,解得*x=*2*k+*,*k*∈Z,结合选项可知,*x=*满足条件*.*故选C*.*

4*.*π[解析] 易知*T==*π*.*

id:2147507753;FounderCES

【备选理由】 例1考查余弦函数的有界性、二次函数在指定区间上的值域问题;例2考查根据函数在所给区间内无最值求参数范围的问题;例3考查抽象函数比较大小的问题,考查函数的单调性和对称性以及三角函数的知识,是较好的综合题;例4综合考查正弦函数与余弦函数的单调性,并结合充要条件进行考查*.*

例1[配合例2使用] 已知函数*f*(*x*)*=*1*+*4cos *x-*4sin2*x*,*x*∈*-*,,则*f*(*x*)的值域为*.*

[答案] [*-*4,5]

[解析] *f*(*x*)*=*1*+*4cos *x-*4sin2*x=*1*+*4cos *x-*4(1*-*cos2*x*)*=*4cos2*x+*4cos *x-*3*=*4*-*4,因为*x*∈,所以cos *x*∈,所以4*-*4∈[*-*4,5],故函数*f*(*x*)的值域为[*-*4,5]*.*

例2[配合例2使用] 若函数*f*(*x*)*=*sin(*ω>*0)在区间(π,2π)内没有最值,则*ω*的取值范围是 ()

A*.*∪ B*.*∪

C*.* D*.*

[解析] B由正弦函数的单调性可知,函数*y=*sin *x*的单调区间为*k*π*+*,*k*π*+*,*k*∈Z*.*

由*k*π*+*≤*ωx+*≤*k*π*+*,*k*∈Z,

得≤*x*≤,*k*∈Z*.*

*∵*函数*f*(*x*)*=*sin(*ω>*0)在区间(π,2π)内没有最值,

*∴*函数*f*(*x*)在区间(π,2π)内单调,

*∴*(π,2π)⊆,*k*∈Z,

即*k*∈Z,解得*k+*≤*ω*≤*+*,*k*∈Z*.*

由*k+<+*,*k*∈Z,得*k<*,*k*∈Z,

*∴*当*k=*0时,得≤*ω*≤;

当*k=-*1时,得*-*≤*ω*≤,又*ω>*0,故0*<ω*≤*.*

综上得,*ω*的取值范围是∪*.*

故选B*.*

例3[配合例4使用] **[**2018·豫西南示范性高中联考**]** 已知定义在R上的函数*f*(*x*)在区间(*-*1,0)上单调递减,*f*(*x+*1)的图像关于直线*x=-*1对称,若*α*,*β*是钝角三角形中的两个锐角,则*f*(sin *α*)和*f*(cos *β*)的大小关系为 ()

A*.f*(sin *α*)*>f*(cos *β*) B*.f*(sin *α*)*<f*(cos *β*)

C*.f*(sin *α*)*=f*(cos *β*) D*.*以上情况均有可能

[解析] B已知*f*(*x+*1)的图像关于直线*x=-*1对称,可得到*f*(*x*)的图像关于直线*x=*0对称,故函数*f*(*x*)是偶函数*.*因为*α*,*β*为钝角三角形中的两个锐角,所以*α+β<*,所以*α<-β*,故得到sin *α<*sin*=*cos *β*,且sin *α*∈(0,1),cos *β*∈(0,1)*.*因为函数*f*(*x*)在区间(*-*1,0)上单调递减,所以函数*f*(*x*)在(0,1)上单调递增,故*f*(sin *α*)*<f*(cos *β*)*.*故选B*.*

例4[配合例5使用] **[**2018·四川双流中学一模**]** “*φ=*”是“函数*y=*cos 2*x*与函数*y=*sin(2*x+φ*)在区间上的单调性相同”的 ()

A*.*充分不必要条件 B*.*必要不充分条件

C*.*充要条件 D*.*既不充分也不必要条件

[解析] A由题意可得,函数*y=*cos 2*x*在区间上单调递减*.*

当*φ=*时,函数*y=*sin,*x*∈,可得2*x+*∈,

*∴*函数*y=*sin在区间上单调递减,*∴*充分性成立;

易知当*φ=*时,函数*y=*sin(2*x+φ*)在区间上也单调递减,*∴*必要性不成立*.*

*∴*“*φ=*”是“函数*y=*cos 2*x*与函数*y=*sin(2*x+φ*)在区间上的单调性相同”的充分不必要条件*.*