**第20讲函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像及三角函数模型的简单应用**



id:2147499699;FounderCES

1*.y=A*sin(*ωx+φ*)的有关概念

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 振幅 | 周期 | 频率 | 相位 | 初相 |
| *y=A*sin(*ωx+φ*)  (*A>*0,*ω>*0),  *x*∈[0,*+∞*) | *A* | *T=* | *f==* |  |  |

2*.*用五点法画*y=A*sin(*ωx+φ*)一个周期内的简图时,要找五个特征点,如下表所示:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |  |  |
| *ωx+φ* |  |  |  |  |  |
| *y=A*sin(*ωx+φ*) | 0 | *A* | 0 | *-A* | 0 |

3*.*函数*y=*sin *x*的图像经变换得到*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像的步骤

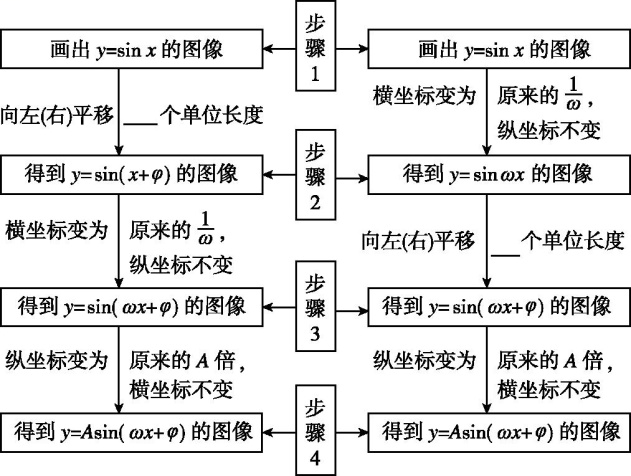


图3*-*20*-*1

id:2147499729;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 函数*y=*sin *x*的图像上所有点的横坐标不变,纵坐标伸长为原来的2倍得到的图像对应的函数解析式是*.*

2*.***[**教材改编**]** 某函数的图像向右平移个单位长度后得到的图像对应的函数解析式是*y=*sin,则原函数的解析式是*.*

3*.***[**教材改编**]** 函数*y=*cos的周期为,单调递增区间为*.*

4*.***[**教材改编**]** 已知简谐运动*f*(*x*)*=*2sin*x+φ*的图像经过点(0,1),则该简谐运动的初相*φ*为*.*

题组二常错题

◆索引:图像平移多少单位长度容易搞错;不能正确理解三角函数图像对称性的特征;三角函数的单调区间把握不准导致出错;确定不了函数解析式中*φ*的值*.*

5*.*为得到函数*y=*cos的图像,只需将函数*y=*sin 2*x*的图像向平移个单位长度*.*

6*.*设*ω>*0,若函数*f*(*x*)*=*sin *ωx*在区间上单调递增,则*ω*的取值范围是*.*

7*.*若*f*(*x*)*=*2sin(*ωx+φ*)*+m*对任意实数*t*都有*f=f*,且*f=-*3,则实数*m=　　　　.*

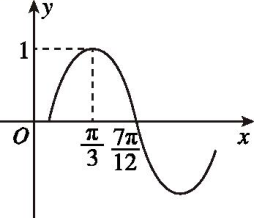


图3*-*20*-*2

8*.*已知函数*f*(*x*)*=*sin(*ωx+φ*)*ω>*0,*|φ|<*的部分图像如图3*-*20*-*2所示,则*φ=　　　　.*



id:2147499750;FounderCES探究点一函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像变换

例1 (1)将函数*f*(*x*)*=*sin的图像沿*x*轴向左平移个单位长度后所得图像对应的函数解析式为 ()

A*.y=*cos 2*x* B*.y=-*cos 2*x*

C*.y=*sin D*.y=*sin

(2)若由函数*y=*sin的图像变换得到*y=*sin*+*的图像,则可以通过以下两个步骤完成:第一步,把*y=*sin2*x+*图像上所有点的横坐标变为原来的4倍,纵坐标不变;第二步,把所得图像沿*x*轴 ()

A*.*向右平移个单位长度

B*.*向右平移个单位长度

C*.*向左平移个单位长度

D*.*向左平移个单位长度

[总结反思] 由*y=*sin *x*的图像变换到*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像,两种变换中平移的量的区别:先平移再伸缩,平移的量是*|φ|*个单位长度;而先伸缩再平移,平移的量是(*ω>*0)个单位长度*.*特别提醒:平移变换和伸缩变换都是针对*x*而言,即*x*本身加减多少值,而不是依赖于*ωx*加减多少值*.*

变式题 (1)**[**2018·江西八所重点中学联考**]** 将函数*y=*sin*x-*的图像上所有的点向右平移个单位长度,再把所得图像上各点的横坐标扩大到原来的2倍(纵坐标不变),则所得图像对应的函数解析式为 ()

A*.y=*sin B*.y=*sin

C*.y=*sin D*.y=*sin

(2)为了得到函数*y=*sin 3*x*的图像,可以将*y=*cos 3*x*的图像 ()

A*.*向右平移个单位长度

B*.*向左平移个单位长度

C*.*向右平移个单位长度

D*.*向左平移个单位长度

id:2147499764;FounderCES探究点二函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像与解析式

例2 (1)已知函数*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+θ*)(*A>*0,*|θ|<*π)的部分图像如图3*-*20*-*3所示,将函数*y=f*(*x*)的图像向右平移个单位长度得到函数*y=g*(*x*)的图像,则函数*g*(*x*)的解析式为 ()

A*.g*(*x*)*=*2sin 2*x* B*.g*(*x*)*=*2sin

C*.g*(*x*)*=*2sin D*.g*(*x*)*=*2sin

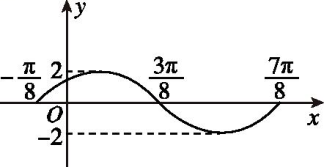


图3*-*20*-*3

(2)已知函数*y=*sin(*ωx+φ*)(*ω>*0,*-*π≤*φ<*π)的部分图像如图3*-*20*-*4所示,则*φ=　　　　.*

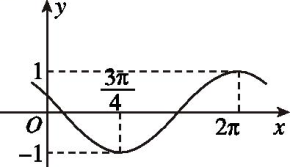


图3*-*20*-*4

[总结反思] 利用图像求函数*y=A*sin(*ωx+φ*)(*A>*0,*ω>*0)的解析式主要从以下三个方面考虑:

(1)根据最大值或最小值求出*A*的值*.*

(2)根据周期求出*ω*的值*.*

(3)求*φ*的常用方法如下:*①*代入法:把图像上的一个已知点代入(此时要注意该点在上升区间上还是在下降区间上)或把图像的最高点或最低点代入*.②*五点法:确定*φ*的值时,往往以寻找“五点法”中的特殊点作为突破口*.*

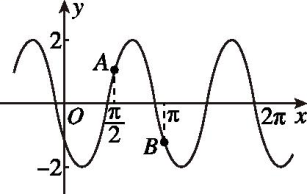


图3*-*20*-*5

变式题 已知函数*f*(*x*)*=*2sin(*ωx+φ*)(*ω>*0,*|φ|<*π)的部分图像如图3*-*20*-*5所示,且*A*,1,*B*(π,*-*1),则*φ*的值为*.*

id:2147499792;FounderCES探究点三函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像与性质

例3 **[**2018·湖北八市联考**]** 函数*f*(*x*)*=*sin(*ωx+φ*)*ω>*0,*|φ|<*在它的某一个周期内的单调递减区间是*.*将*y=f*(*x*)的图像先向左平移个单位长度,再将所得图像上所有点的横坐标变为原来的(纵坐标不变),所得到的图像对应的函数记为*g*(*x*)*.*

(1)求*g*(*x*)的解析式;

(2)求*g*(*x*)在区间上的最大值和最小值*.*

[总结反思] 三角函数图像与性质综合问题的求解思路:(1)将函数整理成*y=A*sin(*ωx+φ*)*+B*(*ω>*0)的形式;(2)把*ωx+φ*看成一个整体;(3)借助正弦函数*y=*sin *x*的图像与性质(如定义域、值域、最值、周期性、对称性、单调性等)解决相关问题*.*

变式题 (1)**[**2018·益阳调研**]** 将函数*f*(*x*)*=*cos(2*x+θ*)的图像向右平移个单位长度后得到函数*g*(*x*)的图像,若*g*(*x*)的图像关于直线*x=*对称,则*θ=* ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

(2)**[**2018·葫芦岛二模**]** 已知函数*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+φ*)*A>*0,*ω>*0,*<φ<*π的部分图像如图3*-*20*-*6所示,则下列说法正确的是()

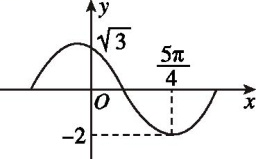


图3*-*20*-*6

A*.*函数*f*(*x*)的周期为π

B*.*函数*y=f*(*x-*π)为奇函数

C*.*函数*f*(*x*)在上单调递增

D*.*函数*f*(*x*)的图像关于点,0对称

id:2147499806;FounderCES探究点四三角函数模型的简单应用

例4 如图3*-*20*-*7所示,制图工程师要用两个同中心且边长均为4的正方形合成一个八角形图形,由对称性知,图中8个三角形都是全等的三角形,设∠*AA*1*H*1*=α.*

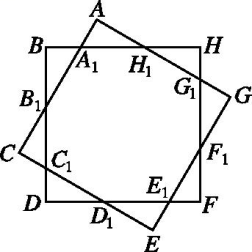


图3*-*20*-*7

(1)试用*α*表示△*AA*1*H*1的面积;

(2)求八角形所覆盖面积的最大值,并指出此时*α*的大小*.*

[总结反思] 三角函数模型在实际问题中的应用体现在两个方面:(1)已知函数模型,利用三角函数的有关性质解决问题,其关键是准确理解自变量的含义及自变量与函数之间的对应法则;(2)把实际问题抽象转化成三角函数模型问题,关键是利用三角函数表示实际问题中的有关量,建立模型*.*

变式题 某城市一年12个月的月平均气温与月份的关系可近似地用函数*y=a+A*cos(*x-*6)(*x=*1,2,3,…,12)来表示,已知6月份的平均气温最高,为28 ℃,12月份的平均气温最低,为18 ℃,则10月份的平均气温为℃*.*

第20讲函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像及三角函数模型的简单应用

考试说明 1*.*了解函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的物理意义;能画出函数*y=A*sin(*ωx+φ*)的图像,了解参数*A*,*ω*,*φ*对函数图像变化的影响*.*

2*.*会用三角函数解决一些简单实际问题,体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.　　ωx+φ　φ*

2*.*0π2π

3*.|φ|*

对点演练

1*.y=*2sin *x*[解析] 根据函数图像变换法则可得*.*

2*.y=*sin[解析] 函数*y=*sin的图像向左平移个单位长度后得到*y=*sin*=*sin的图像,即原函数的解析式为*y=*sin*x+**.*

3*.*π(*k*∈Z)[解析] *y=*cos*=*sin 2*x*,所以函数的周期*T==*π*.*由*-+*2*k*π≤2*x*≤*+*2*k*π(*k*∈Z),得*-+k*π≤*x*≤*+k*π(*k*∈Z),故函数的单调递增区间为(*k*∈Z)*.*

4*.*[解析] 将点(0,1)代入函数解析式,可得2sin *φ=*1,即sin *φ=.∵|φ|<*,*∴φ=.*

5*.*左[解析] *y=*cos*=*sin*+**=*sin*.*

故要得到*y=*sin*=*sin 2的图像,只需将函数*y=*sin 2*x*的图像向左平移个单位长度*.*

6*.*(0,1][解析] 因为函数*f*(*x*)*=*sin *ωx*在区间上单调递增,所以*=*≥*+=*π,所以*ω*≤1,又因为*ω>*0,所以*ω*∈(0,1]*.*

7*.-*5或*-*1[解析] 由*f=f*得,函数*f*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=.*故当*x=*时,函数取得最大值或最小值,于是有*-*2*+m=-*3或2*+m=-*3,即*m=-*1或*m=-*5*.*

8*.-*[解析] 由图像可知,*T=*4*×**-**=*π,所以*ω==*2*.*因为*f=*sin*+φ**=*1,所以*+φ=+*2*k*π(*k*∈Z),即*φ=-+*2*k*π(*k*∈Z),又*|φ|<*,所以*φ=-.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] 根据图像平移“左加右减”的规则以及平移量确定结果*.*

(1)A(2)A[解析] (1)由题意知,将*f*(*x*)*=*sin的图像向左平移个单位长度后,得到*y=*sin*=*sin*=*cos 2*x*的图像,故选A*.*

(2)把*y=*sin图像上所有点的横坐标变为原来的4倍,得到函数*y=*sin的图像,再把所得图像沿*x*轴向右平移个单位长度,可以得到*y=*sin*=*sin的图像*.*故选A*.*

变式题(1)C(2)A[解析] (1)将函数*y=*sin的图像向右平移个单位长度,得到*y=*sin的图像,再把所得图像上各点的横坐标扩大到原来的2倍(纵坐标不变),得到*y=*sin的图像,故选C*.*

(2)由题意知,*y=*cos 3*x=*sin*=*sin 3,将函数*y=*sin 3的图像向右平移个单位长度,得到*y=*sin 3*=*sin 3*x*的图像,故选A*.*

例2[思路点拨] (1)先根据图像确定*A*,*T*,*ω*,*θ*,再根据平移得函数*g*(*x*)的解析式;(2)结合函数的图像首先确定*ω*的值,然后确定*φ*的值即可*.*

(1)D(2)[解析] (1)由题图得,*A=*2,*T=-=*π,*∴ω==*2*.*

*∵*当*x==*时,*y=*2,*∴*2*×+θ=+*2*k*π(*k*∈Z),*∴θ=+*2*k*π(*k*∈Z),又*∵|θ|<*π,*∴θ=*,*∴f*(*x*)*=*2sin,

*∴g*(*x*)*=*2sin*=*2sin,故选D*.*

(2)由题意可知,函数的最小正周期*T=*2*×=*π,

则*ω===.*当*x=*2π时,*ωx+φ=×*2π*+φ=*2*k*π*+*(*k*∈Z),

则*φ=*2*k*π*-*π(*k*∈Z),由于*-*π≤*φ<*π,故*φ=.*

变式题*-*[解析] 根据函数*f*(*x*)*=*2sin(*ωx+φ*)(*ω>*0,*|φ|<*π)的图像,且*A*,1,*B*(π,*-*1),可得从点*A*到点*B*正好经过了半个周期,即*×=*π*-*,*∴ω=*2*.*再把点*A*,*B*的坐标代入函数解析式,可得2sin2*×+φ**=-*2sin *φ=*1,2sin(2*×*π*+φ* )*=*2sin *φ=-*1,*∴*sin *φ=-*,*∴φ=*2*k*π*-*或*φ=*2*k*π*-*,*k*∈Z*.*再结合“五点作图法”,可得*φ=-.*

例3[思路点拨] (1)根据已知求得*ω*的值,然后求出*φ*的值,从而可求出*f*(*x*)的解析式,进而得到*g*(*x*)的解析式;(2)确定*g*(*x*)的单调性,然后求出最值*.*

解:(1)由题意可知,*=-=*,*∴ω=*2,又sin*=*1,*|φ|<*,*∴φ=-*,

*∴f*(*x*)*=*sin,

*∴g*(*x*)*=*sin*.*

(2)由(1)可知,*g*(*x*)在上为增函数,在上为减函数,*∴g*(*x*)max*=g=*1,又*∵g*(0)*=*,*g=-*,*∴g*(*x*)min*=g=-*,故函数*g*(*x*)在上的最大值和最小值分别为1和*-.*

变式题(1)A(2)B[解析] (1)由题意知,*g*(*x*)*=*cos2*+θ**=*cos2*x-+θ*,令2*x-+θ=k*π(*k*∈Z),则函数*g*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=-+*(*k*∈Z),令*-+=*(*k*∈Z),则*θ=+k*π(*k*∈Z),又*|θ|<*,所以*θ=.*故选A*.*

(2)观察图像可得,函数的最小值为*-*2,所以*A=*2*.*由图像可知函数过点(0,),

所以*=*2sin *φ*,又因为*<φ<*π,所以*φ=.*由图像可知,·*ω+=+*2*k*π,*k*∈Z,解得*ω=+k*,*k*∈Z,又*=>*,所以0*<ω<*,所以*ω=*,则*f*(*x*)*=*2sin*.*显然A选项错误;

对于B,*f*(*x-*π)*=*2sin(*x-*π)*+**=*2sin*x*,是奇函数,故B选项正确;

对于C,观察图像可知,*f*(*x*)在上不单调,故C选项错误;

对于D,*f=*2sin*×+**=*2sin≠0,故D选项错误*.*

故选B*.*

例4[思路点拨] (1)注意到*BA*1*=AA*1,*AH*1*=H*1*H*,从而知△*AA*1*H*1的周长为4,设*AH*1*=x*,从而可求得;(2)令*t=*sin *α+*cos *α*,用*t*表示,根据*t*∈(1,]可求得最大值*.*

解:(1)设*AH*1*=x*,由题意知,*x++=*4,

*∴x=*,*∴=*·*=*,*α*∈*.*

(2)令*t=*sin *α+*cos *α*,*∵α*∈,*∴t*∈(1,]*.*

当八角形所覆盖的面积最大时,取得最大值*.*由(1)可知,*==*4*-*,

*∴*当*t=*,即*α=*时,取得最大值,此时八角形所覆盖的面积最大,设为*S*,则*S=*16*+*4*×=*64*-*32,*∴*八角形所覆盖面积的最大值为64*-*32*.*

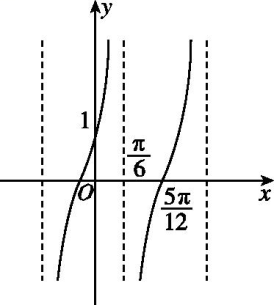
变式题20*.*5[解析] 因为当*x=*6时,*y=a+A=*28,当*x=*12时,*y=a-A=*18,所以*a=*23,*A=*5,

所以*y=*23*+*5cos(*x-*6),所以当*x=*10时,*y=*23*+*5cos*=*23*-*5*×=*20*.*5*.*

id:2147507760;FounderCES

【备选理由】 例1考查正切函数的图像,是对例题中正弦、余弦函数图像问题的补充;例2重点考查函数的对称性,对正弦函数图像的对称轴与对称中心加深理解;例3主要考查了三角函数图像与性质的综合应用问题,着重考查了推理与运算能力;例4是实际应用题目,要根据条件转化为数学中的知识*.*

例1[配合例2使用] 已知函数*f*(*x*)*=A*tan(*ωx+φ*)的部分图像如图所示,则*f=* ()



A*.*3

B*.*

C*.*1

D*.*

[解析] A由题可知,*=-=*,*∴T=*,*∴ω==*2*.*由图像可知,*×*2*+φ=k*π(*k*∈Z),得*φ=-+k*π(*k*∈Z),又*|φ|<*,*∴φ=*,

*∴f*(*x*)*=A*tan*.*

又*f*(0)*=A*tan*=*1,*∴A=*,

*∴f*(*x*)*=*tan,

*∴f=*tan*=*tan*=*3*.*故选A*.*

例2[配合例3使用] **[**2018·长沙长郡中学二模**]** 已知函数*f*(*x*)*=*sin(*ωx+φ*)*ω>*0,*|φ|<*,其图像相邻两条对称轴之间的距离为,将函数*y=f*(*x*)的图像向左平移个单位长度后,得到的图像关于*y*轴对称,那么函数*y=f*(*x*)的图像 ()

A*.*关于点对称

B*.*关于点对称

C*.*关于直线*x=*对称

D*.*关于直线*x=-*对称

[解析] B*∵*函数*y=f*(*x*)的图像相邻两条对称轴之间的距离为,

*∴*函数的周期*T=*,*∴ω==*4,*∴f*(*x*)*=*sin(4*x+φ*)*.*

将函数*y=f*(*x*)的图像向左平移个单位长度后,

得到函数*y=*sin的图像,

*∵*所得图像关于*y*轴对称,

*∴*4*×+φ=k*π*+*,*k*∈Z,即*φ=k*π*-*,*k*∈Z,

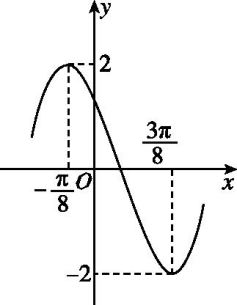
又*|φ|<*,*∴φ=-*,*∴f*(*x*)*=*sin*.*

令4*x-=k*π,*k*∈Z,

解得*x=+*,*k*∈Z,

令*k=*0,得*f*(*x*)的图像关于点对称*.*故选B*.*

例3[配合例3使用] 已知函数*f*(*x*)*=A*sin(*ωx+φ*)(*A>*0,*ω>*0,*|φ|<*π)的部分图像如图所示*.*



(1)求函数*f*(*x*)的单调递增区间;

(2)若*x*∈,求函数*f*(*x*)的值域*.*

解:(1)由图像可知,*=-=*,*∴T=*π,*∴ω==*2*.*又函数的最大值为2,且*A>*0,*∴A=*2*.∵f=*2,*∴*2*×+φ=+*2*k*π,*k*∈Z,*∴φ=+*2*k*π,*k*∈Z,又*∵|φ|<*π,*∴φ=*,*∴f*(*x*)*=*2sin*.*

由*-+*2*k*π≤2*x+*≤*+*2*k*π,*k*∈Z,

得*-+k*π≤*x*≤*-+k*π,*k*∈Z,

*∴*函数*f*(*x*)的单调递增区间为,*k*∈Z*.*

(2)*∵x*∈,*∴*2*x+*∈,

*∴*当2*x+=*,即*x=*时,*f*(*x*)min*=-*,当2*x+=*,即*x=-*时,*f*(*x*)max*=*2,

*∴*函数*f*(*x*)在上的值域为[*-*,2]*.*

例4[配合例4使用] 一根长*a* cm的线一端固定,另一端悬挂一个小球,小球摆动时,离开平衡位置的位移*s*(cm)和时间*t*(s)的函数关系式是*s=*3cos,*t*∈[0,*+∞*),则小球摆动的周期为s*.*

[答案]

[解析] *∵*小球的位移*s*与时间*t*的函数关系式为*s=*3cos,*t*∈[0,*+∞*),*∴*小球摆动的周期*T==.*