**第21讲两角和与差的正弦、余弦和正切**



id:2147499834;FounderCES

两角和与差的正弦、余弦、正切公式

(1)公式S(*α±β*):sin(*α±β*)*=　　　　　　　　　　　.*

(2)公式C(*α±β*):cos(*α±β*)*=* *.*

(3)公式T(*α±β*):tan(*α±β*)*=　　　　　　　　　.*

常用结论

1*.*两角和与差的正切公式的变形:

tan *α±*tan *β=*tan(*α±β*)(1∓tan *α*tan *β*)*.*

2*.*二倍角余弦公式的变形:

sin2*α=*,cos2*α=.*

3*.*一般地,函数*f*(*α*)*=a*sin *α+b*cos *α*(*a*,*b*为常数)可以化为*f*(*α*)*=*sin(*α+φ*)或*f*(*α*)*=*cos(*α-φ*)*.*

id:2147499848;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** sin 75°的值为*.*

2*.***[**教材改编**]** 已知cos *α=-*,*α*∈,则sin*α+*的值是*.*

3*.***[**教材改编**]** cos 65°cos 115°-cos 25°sin 115°*=　　　　.*

4*.***[**教材改编**]** 已知tan *α=*,tan *β=-*2,则tan(*α-β*)的值为*.*

题组二常错题

◆索引:忽略角的取值范围;公式的结构套用错误;混淆两角和与差的正切公式中分子、分母上的符号;方法选择不当致误*.*

5*.*已知tan*+α**=*,*α*∈,π,则cos *α*的值是*.*

6*.*化简:sin *x-*cos *x=　　　　.*

7*.*计算:*=　　　　.*

8*.*若*α+β=*,则[1*+*tan(π*-α*)](1*-*tan *β*)的值为*.*



id:2147499869;FounderCES探究点一两角和与差的三角函数公式

例1 (1)**[**2018·湘潭模拟**]** 若sin(2*α-β*)*=*,sin(2*α+β*)*=*,则sin 2*α*cos *β=* ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

(2)**[**2018·晋城一模**]** 已知cos*=*cos *α*,tan *β=*,则tan(*α+β*)*=　　　　.*

[总结反思] 两角和与差的三角函数公式可看作是诱导公式的推广,可用*α*,*β*的三角函数表示*α±β*的三角函数,在使用两角和与差的三角函数公式时,特别要注意角与角之间的关系,完成统一角和角与角转换的目的*.*

变式题 (1)**[**2018·佛山质检**]** 已知cos *α=*,*α*∈,则cos*=* ()

A*.-* B*.*

C*.* D*.*

(2)**[**2018·唐山三模**]** 已知tan*α+**=*1,则tan*α-**=* ()

A*.*2*-*

B*.*2*+*

C*.-*2*-*

D*.-*2*+*

id:2147499876;FounderCES探究点二两角和与差公式的逆用与变形

例2 (1)**[**2018·烟台一模**]** 已知cos*=*,则cos *x+*cos*=* ()

A*.-*1 B*.*1

C*.* D*.*

(2)已知sin *α+*cos *β=*,sin *β-*cos *α=*,则sin(*α-β*)*=　　　　.*

[总结反思] 常见的公式变形:(1)两角正切的和差公式的变形,即tan *α±*tan *β=*tan(*α±β*)(1∓tan *α*tan *β*);(2) *a*sin *α+b*cos *α=*sin(*α+φ*)tan *φ=**.*

变式题 (1)**[**2018·河南中原名校联考**]** cos 375°*+*sin 375°的值为 ()

A*.* B*.* C*.-* D*.-*

(2)(1*+*tan 20°)(1*+*tan 21°)(1*+*tan 24°)(1*+*tan 25°)*=　　　　.*

id:2147499883;FounderCES探究点三角的变换问题

例3 (1)已知*α*∈,cos*-*sin *α=*,则sin*α+*的值是 ()

A*.-* B*.-*

C*.* D*.-*

(2)**[**2018·莆田二模**]** 已知sin *α=*,sin(*β-α*)*=-*,*α*,*β*均为锐角,则*β=* ()

A*.* B*.* C*.* D*.*

[总结反思] 常见的角变换:*±*2*α=*2*±α*,2*α=*(*α+β*)*+*(*α-β*),*α=+*,*+α=-**-α*等*.*

变式题 (1)**[**2018·榆林模拟**]** 若0*<α<*,*-<β<*0,cos*=*,cos*=*,则cos*=* ()

A*.* B*.-*

C*.* D*.-*

(2)已知*<β<α<*π,cos(*α-β*)*=*,sin(*α+β*)*=-*,则sin 2*α=* ()

A*.* B*.-*

C*.* D*.-*

第21讲两角和与差的正弦、余弦和正切

考试说明 1*.*会用向量的数量积推导出两角差的余弦公式*.*

2*.*能利用两角差的余弦公式导出两角差的正弦、正切公式*.*

3*.*会用两角差的余弦公式导出两角和的正弦、余弦、正切公式和二倍角的正弦、余弦、正切公式,了解它们的内在联系*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

(1)sin *α*cos *β±*cos *α*sin *β*(2)cos *α*cos *β*∓sin *α*sin *β*(3)

对点演练

1*.*[解析] sin 75°*=*sin(45°*+*30°)*=*sin 45°cos 30°*+*cos 45°sin 30°*=×+×=.*

2*.*[解析] *∵*cos *α=-*,*α*∈,*∴*sin *α=*,*∴*sin*=*sin *α*cos*+*cos *α*sin*=×+×=.*

3*.-*1[解析] 原式*=*cos 65°cos 115°-sin 65°sin 115°*=*cos(65°+115°)=cos 180°*=-*1*.*

4*.*7[解析] tan(*α-β*)*==*7*.*

5*.-*[解析] 因为tan*+α**=*tan*+α**=*,所以*=*,所以tan *α=-*,又*α*∈,π,所以cos *α=-=-.*

6*.*sin[解析] sin *x-*cos *x=*cossin *x-*sincos *x=*sin*.*

7*.*[解析] *==*tan(45°*-*15°)*=*tan 30°*=.*

8*.*2[解析] 因为*α+β=*,所以tan(*α+β*)*=-*1,即*=-*1,整理得(1*-*tan *α*)(1*-*tan *β*)*=*2,所以[1*+*tan(π*-α*)](1*-*tan *β*)*=*(1*-*tan *α*)(1*-*tan *β*)*=*2*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)利用两角和与差的正弦公式展开已知条件,进而求解;(2)先利用已知条件求出tan *α*,再根据两角和的正切公式求解*.*

(1)B(2)*-*[解析] (1)由sin(2*α-β*)*=*,sin(2*α+β*)*=*,

可得sin 2*α*cos *β-*cos 2*α*sin *β=①*,

sin 2*α*cos *β+*cos 2*α*sin *β=②*,

由*①+②*得2sin 2*α*cos *β=*,所以sin 2*α*cos *β=.*故选B*.*

(2)*∵*cos*=*cos *α-*sin *α=*cos *α*,

*∴-*sin *α=*cos *α*,故tan *α=-*,

*∴*tan(*α+β*)*====-.*

变式题(1)D(2)D[解析] (1)*∵*cos *α=*,*α*∈,*∴*sin *α===*,

*∴*cos*=*cos *α*cos*+*sin *α*sin*=×+×=.*故选D*.*

(2)由题意知,tan*=*tan

*=*

*==-*2*+.*故选D*.*

例2[思路点拨] (1)首先利用两角差的余弦公式展开cos,整理后再逆用两角差的余弦公式即可;(2)将两个条件等式分别平方相加即可*.*

(1)B(2)*-*[解析] (1)由题可知,cos *x+*cos*=*cos *x+*cos *x*cos*+*sin *x*sin*=*cos *x+*sin *x==*cos*=×=*1*.*故选B*.*

(2)*∵*sin *α+*cos *β=*,sin *β-*cos *α=*,*∴*(sin *α+*cos *β*)2*=*,(sin *β-*cos *α*)2*=*,即sin2*α+*2sin *α*cos *β+*cos2*β=①*,sin2*β-*2sin *β*cos *α+*cos2*α=②*,

由*①+②*得sin2*α+*2sin *α*cos *β+*cos2*β+*sin2*β-*2sin *β*cos *α+*cos2*α=*(sin2*α+*cos2*α*)*+*(cos2*β+*sin2*β*)*+*2(sin *α*cos *β-*sin *β*cos *α*)*=*1*+*1*+*2sin(*α-β*)*=*2*+*2sin(*α-β*)*=*,则sin(*α-β*)*=-.*

变式题(1)A(2)4[解析] (1)cos 375°*+*sin 375°*=*cos 15°*+*sin 15°*=*cos(45°*-*15°)*=*cos 30°*=.*故选A*.*

(2)(1*+*tan 20°)(1*+*tan 25°)*=*1*+*tan 20°*+*tan 25°*+*tan 20°tan 25°*=*1*+*tan(20°*+*25°)(1*-*tan 20°tan 25°)*+*tan 20°tan 25°*=*2,同理可得(1*+*tan 21°)(1*+*tan 24°)*=*2,所以原式*=*4*.*

例3[思路点拨] (1)对条件整理可得cos*=*,又*α+=-*,利用两角差的正弦公式求解;(2)根据角的变换得*β=α+*(*β-α*),利用已知条件先求出sin *β*的值,再求角*β.*

(1)B(2)C[解析] (1)由cos*-*sin *α=*,

得cos *α*cos*-*sin *α*sin*-*sin *α=*,即cos *α-*sin *α=*,

*∴*cos *α-*sin *α=*,即cos*=.*

*∵α*∈,*∴α+*∈,

*∴*sin*==*,

*∴*sin*=*sin*=*sin*-*cos*=×=-*,故选B*.*

(2)因为sin *α=*,sin(*β-α*)*=-*,且*α*,*β*均为锐角,所以cos *α=*,cos(*β-α*)*=*,所以sin *β=*sin[*α+*(*β-α*)]*=*sin *α*cos(*β-α*)*+*cos *α*sin(*β-α*)*=×+×==*,所以*β=.*故选C*.*

变式题(1)A(2)B[解析] (1)由题可知,0*<+α<*,*<-<*,所以sin*=*,sin*=*,

所以cos*=*cos*-**=*coscos*+*sinsin*=×+×=.*故选A*.*

(2)因为*<β<α<*,所以0*<α-β<*,π*<α+β<*,由cos(*α-β*)*=*,得sin(*α-β*)*=*,由sin(*α+β*)*=-*,得cos(*α+β*)*=-*,则sin 2*α=*sin[(*α-β*)*+*(*α+β*)]*=*sin(*α-β*)cos(*α+β*)*+*cos(*α-β*)sin(*α+β*)*=×+×=-*,故选B*.*

id:2147507781;FounderCES

【备选理由】 例1考查两角差的正切公式、基本不等式、正切函数的单调性,考查综合分析与运算的能力;例2主要考查三角函数中的恒等变换的应用,熟练运用相关公式和特殊角的关系是解题的关键;例3考查两角和与差的正弦公式的运用,关键是角的配凑,然后化简求值*.*

例1[配合例1使用] **[**2018·南充模拟**]** 若tan *α=*3tan *β*,则*α-β*的最大值为*.*

[答案]

[解析] *∵*tan *α=*3tan *β*,

*∴*tan *β>*0,

*∴*tan(*α-β*)*===.*

*∵*tan *β>*0,

*∴+*3tan *β*≥2*=*2,*∴*tan(*α-β*)≤,当且仅当3tan2*β=*1,即tan *β=*时取等号,此时*β=*,tan *α=*3tan *β*,即tan *α=*,*α=.*

又0*<β<α<*,*∴*0*<α-β<*,

*∴*0*<*tan(*α-β*)≤,

又*y=*tan *x*在上单调递增,

*∴*当tan(*α-β*)取得最大值时,*α-β*的值最大,*∴*当*α=*,*β=*时,*α-β*的值最大,*∴α-β*的最大值为*-=.*

例2[配合例3使用] **[**2018·安徽皖江八校联考**]** 的值为*.*

[答案] 1

[解析] *===*1*.*

例3[配合例3使用] **[**2018·安阳模拟**]** 已知*m=*,若sin 2(*α+γ*)*=*3sin 2*β*,则*m=* ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*2

[解析] D*∵*sin 2(*α+γ*)*=*3sin 2*β*,

*∴*sin[(*α+β+γ*)*+*(*α+γ-β*)]*=*3sin[(*α+β+γ*)*-*(*α+γ-β*)],

*∴*sin(*α+β+γ*)cos(*α+γ-β*)*+*cos(*α+β+γ*)sin(*α+γ-β*)

*=*3sin(*α+β+γ*)cos(*α+γ-β*)*-*3cos(*α+β+γ*)sin(*α+γ-β*),

*∴-*2sin(*α+β+γ*)cos(*α+γ-β*)*=-*4cos(*α+β+γ*)sin(*α+γ-β*),

即*==*2,

*∴m=*2*.*故选D*.*