**第22讲二倍角公式与简单的三角恒等变换**



id:2147499904;FounderCES

1*.*二倍角的正弦、余弦、正切公式

(1)公式S2*α*:sin 2*α=　　　　　　.*

(2)公式C2*α*:cos 2*α=　　　　　　=　　　　　　=　　　　　　.*

(3)公式T2*α*:tan 2*α=　　　　　　.*

2*.*常用的部分三角公式

(1)1*-*cos *α=*,1*+*cos *α=　　　　　.*(升幂公式)

(2)1*±*sin *α=　　　　　　　　　　.*(升幂公式)

(3)sin2*α=*,cos2*α=*,

tan2*α=　　　　　.*(降幂公式)

(4)sin *α=*,cos *α=*,tan *α=　　　　　　　　.*(万能公式)

(5)*a*sin *α+b*cos *α=*,其中sin *φ=*,cos *φ=.*(辅助角公式)

3*.*三角恒等变换的基本技巧

(1)变换函数名称:使用诱导公式*.*

(2)升幂、降幂:使用倍角公式*.*

(3)常数代换:如1*=*sin2*α+*cos2*α=*tan*.*

(4)变换角:使用角的代数变换、各类三角函数公式*.*

常用结论

半角公式:

sin *=±*,cos *=±*,tan *=±==.*

id:2147499925;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** sin 15°*-*cos 15°的值是*.*

2*.***[**教材改编**]** 已知*f*(*x*)*=*sin2*x-*(*x*∈R),则*f*(*x*)的最小正周期是*.*

3*.***[**教材改编**]** 已知cos(*α+β*)*=*,cos(*α-β*)*=*,则tan *α*tan *β*的值为*.*

4*.***[**教材改编**]** 已知sin *θ=*,*θ*为第二象限角,则sin 2*θ*的值为*.*

题组二常错题

◆索引:已知角与待求角之间关系不清致误;已知三角函数值求角时范围不清致误;*a*sin *α+b*cos *α=*sin(*α+φ*)中*φ*值的确定错误;求三角函数值时符号选取错误(根据求解目标的符号确定)*.*

5*.*已知sin*=*,则cos*=　　　　.*

6*.*已知*α*,*β*均为锐角,且tan *α=*7,tan *β=*,则*α+β=　　　　.*

7*.*sin *α-*cos *α=*sin(*α+φ*)中的*φ=　　　　.*

8*.*已知sin 2*α=*,2*α*∈,则sin *α-*cos *α=　　　　.*



id:2147499939;FounderCES探究点一三角函数式的化简

例1 **[**2018·东莞考前冲刺**]** 化简:cos2*x-**+*sin2*x+**=* ()

A*.*1*+*cos 2*x* B*.*1*+*sin 2*x*

C*.*1*+*cos 2*x* D*.*1*+*sin 2*x*

(2)化简:tan *α+=* ()

A*.*cos *α* B*.*sin *α* C*.* D*.*

[总结反思] (1)化简标准:函数种类尽可能少、次数尽可能低、项数尽可能少、尽量不含根式、尽量不含绝对值等*.*(2)余弦的二倍角公式、正弦的二倍角公式都能起到升(降)幂的作用*.*

变式题 *+=* ()

A*.*2sin 3 B*.-*2sin 3

C*.*2cos 3 D*.-*2cos 3

id:2147499946;FounderCES探究点二三角函数式的求值

角度1给值求值

例2 (1)已知sin(*α-β*)cos *α-*cos(*α-β*)sin *α=*,则cos 2*β*的值为 ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

(2)**[**2018·厦门外国语学校月考**]** 已知tan *θ+=*4,则cos2*=* ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

[总结反思] 给值求值是指已知某个角的三角函数值,求与该角相关的其他三角函数值的问题,解题的基本方法是通过角的三角函数的变换把求解目标用已知条件表达出来*.*

变式题 (1)**[**2018·菏泽模拟**]** 已知*α*∈,sin*=*,则tan(π*+*2*α*)*=* ()

A*.* B*.±*

C*.±* D*.*

(2)**[**2018·广州七校联考**]** 若sin*-α**=*,则cos的值为 ()

A*.-* B*.-*

C*.* D*.*

角度2给角求值

例3 **[**2019·重庆南州中学月考**]** *-*tan 20°*=*()

A*.*1 B*.*

C*.* D*.*

[总结反思] 该类问题中给出的角一般都不是特殊角,需要通过三角恒等变换将其变为特殊角,或者能够正负相消,或者能够约分相消,最后得到具体的值*.*

变式题 tan 70°cos 10°(tan 20°*-*1)*=* ()

A*.*1 B*.*2

C*.-*1 D*.-*2

角度3给值求角

例4 若sin 2*α=*,sin(*β-α*)*=*,且*α*∈,*β*∈,则*α+β*的值是 ()

A*.* B*.*

C*.*或 D*.*或

[总结反思] 通过求角的某种三角函数值来求角,在选取函数时,有以下原则:

*①*已知正切函数值,则选正切函数*.*

*②*已知正、余弦函数值,则选正弦或余弦函数*.*若角的范围是0,,则选正、余弦皆可;若角的范围是(0,π),则选余弦较好;若角的范围为*-*,,则选正弦较好*.*

变式题 已知*α*,*β*∈(0,π),且tan(*α-β*)*=*,tan *β=-*,则2*α-β*的值为*.*

id:2147499953;FounderCES探究点三三角恒等变换的综合应用

例5 已知函数*f*(*x*)*=*4cos *x*·sin*+a*的最大值为3*.*

(1)求*a*的值及*f*(*x*)的单调递减区间;

(2)若*α*∈,*f=*,求cos *α*的值*.*

[总结反思] (1)求三角函数解析式*y=A*sin(*ωx+φ*)(*A>*0,*ω>*0)时要注意*φ*的取值范围*.*(2)根据二倍角公式进行计算时,如果涉及开方,则要注意开方后三角函数值的符号*.*

变式题 设函数*f*(*x*)*=*sin *x+*cos *x+*1*.*

(1)求函数*f*(*x*)的值域和单调递增区间;

(2)当*f*(*α*)*=*,且*<α<*时,求sin的值*.*

第22讲二倍角公式与简单的三角恒等变换

考试说明 能运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式以及二倍角的正弦、余弦、正切公式,进行简单的恒等变换(包括导出积化和差、和差化积、半角公式,但对这三组公式不要求记忆)*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)2sin *α*cos *α*(2)cos2*α-*sin2*α*2cos2*α-*11*-*2sin2*α*(3)

2*.*(1)2sin22cos2(2)sin*±*cos2

(3)(4)(5)sin(*α+φ*)

对点演练

1*.-*[解析] sin 15°*-*cos 15°*=*2sin 15°*-*cos 15°*=*2(sin 30°sin 15°*-*cos 30°cos 15°)*=-*2cos(30°*+*15°)*=-*2cos 45°*=-.*

2*.*π[解析] *f*(*x*)*=*sin2*x-=-*,故*f*(*x*)的最小正周期*T==*π*.*

3*.-*[解析] 由cos(*α+β*)*=*,cos(*α-β*)*=*,

得 解得 所以tan *α*tan *β==-.*

4*.-*[解析] *∵*sin *θ=*,*θ*为第二象限角,*∴*cos *θ=-*,*∴*sin 2*θ=*2sin *θ*cos *θ=*2*××=-.*

5*.*[解析] 由题意知,cos*=*1*-*2sin2*=*1*-=.*

6*.*[解析] tan(*α+β*)*===-*1,又0*<α+β<*π,所以*α+β=.*

7*.*2*k*π*-*,*k*∈Z[解析] sin *α-*cos *α=*sin *α-*cos *α*,则cos *φ=*,sin *φ=-*,

所以*φ=*2*k*π*-*,*k*∈Z*.*

8*.-*[解析] 因为2*α*∈0,,所以*α*∈0,,所以sin *α-*cos *α<*0,所以sin *α-*cos *α=-=-=-=-.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)先根据余弦的二倍角公式降幂,再根据两角和与差的余弦公式化简得结果;(2)先化切为弦,再通分,然后利用两角差的余弦公式求解*.*

(1)B(2)C[解析] (1)cos2*+*sin2*=+=*1*+*cos 2*x*cos*+*sin 2*x*sin*-*cos 2*x*cos*-*sin 2*x*sin*=*1*+*sin 2*x*sin*=*1*+*sin 2*x*,故选B*.*

(2)tan *α+=+*

*=*

*==*

*==.*故选C*.*

变式题D[解析] *+======-*2cos 3*.*

例2[思路点拨] (1)根据两角差的正弦公式进行化简,求得sin *β*的值,再根据二倍角公式,即可得到答案;(2)由已知条件求得sin *θ*cos *θ*的值,再由二倍角的正、余弦公式及诱导公式求值*.*

(1)A(2)B[解析] (1)由题意得sin(*α-β*)cos *α-*cos(*α-β*)sin *α=*sin(*-β*)*=-*sin *β=*,

所以sin *β=-*,所以cos 2*β=*1*-*2sin2*β=*,故选A*.*

(2)由tan *θ+=*4,

得*+=*4,即*=*4,

*∴*sin *θ*cos *θ=*,

*∴*cos2*=====.*

变式题(1)A(2)B[解析] (1)*∵α*∈,sin*=*cos *α=*,*∴*sin *α=-*,tan *α=-*2,

*∴*tan(π*+*2*α*)*=*tan 2*α===.*

(2)cos*=*cos*=-*cos*=-*cos 2*=-*1*-*2sin2*=-=-.*

例3[思路点拨] 首先利用同角三角函数关系式,将切化弦,之后利用诱导公式化简,借助于两角差的正弦公式及辅助角公式求得结果*.*

C[解析] *-*tan 20°*=-====*,故选C*.*

变式题C[解析] 原式*=*·cos 10°*=*·*=×*2sin(20°*-*30°)*=-=-*1*.*

例4[思路点拨] 转化为求cos(*α+β*)的值,再求角*α+β*的值*.*

A[解析] *∵α*∈,*∴*2*α*∈,

又0*<*sin 2*α=<*,

*∴*2*α*∈,即*α*∈,*∴*cos 2*α=-=-.∵β*∈,*∴β-α*∈,

又sin(*β-α*)*=*,

*∴β-α*∈,*∴*cos(*β-α*)*=-=-*,

*∴*cos(*α+β*)*=*cos[2*α+*(*β-α*)]*=*cos 2*α*cos(*β-α*)*-*sin 2*α*sin(*β-α*)*=-×-×=.*

又*α*∈,*β*∈,*∴α+β*∈,*∴α+β=*,故选A*.*

变式题*-*[解析] *∵α*∈(0,π),tan *α=*tan[(*α-β*)*+β*]*===>*0,*∴*0*<α<.*

又*∵*tan 2*α===>*0,

*∴*0*<*2*α<*,

*∴*tan(2*α-β*)*===*1*.*

*∵β*∈(0,π),tan *β=-<*0,*∴<β<*π,*∴-*π*<*2*α-β<*0,

*∴*2*α-β=-.*

例5[思路点拨] (1)利用两角差的正弦公式和倍角公式对函数解析式化简整理,利用函数的最大值求得*a*,进而根据正弦函数的单调性得到*f*(*x*)的单调递减区间;(2)由题意易得sin*=*,进而得到cos*=*,利用配角法可得cos *α=*cos*α-**+*,从而得到结果*.*

解:(1)由题意知,*f*(*x*)*=*4cos *x*·sin*+a=*4cos *x*·*+a=*2sin *x*cos *x-*2cos2*x+a=*sin 2*x-*cos 2*x-*1*+a=*2sin*-*1*+a.*

当sin*=*1时,*f*(*x*)取得最大值,此时*f*(*x*)*=*2*-*1*+a=*3,*∴a=*2*.*

由*+*2*k*π≤2*x-*≤*+*2*k*π,*k*∈Z,得*+k*π≤*x*≤*+k*π,*k*∈Z,

*∴f*(*x*)的单调递减区间为*+k*π,*+k*π,*k*∈Z*.*

(2)由(1)可知,*f*(*x*)*=*2sin*+*1,*∵f=*,*∴*sin*=*,

又*α*∈,*∴α-*∈,*∴*cos*=*,

*∴*cos *α=*cos*=*cos*-*sin*=.*

变式题解:(1)依题意得*f*(*x*)*=*sin *x+*cos *x+*1*=*2sin*+*1*.*

因为*-*2≤2sin≤2,所以*-*1≤2sin*+*1≤3,

即函数*f*(*x*)的值域是[*-*1,3]*.*

令*-+*2*k*π≤*x+*≤2*k*π*+*,*k*∈Z,解得*-+*2*k*π≤*x*≤*+*2*k*π,*k*∈Z,所以函数*f*(*x*)的单调递增区间为,*k*∈Z*.*

(2)由*f*(*α*)*=*2sin*+*1*=*,得sin*=.*

因为*<α<*,所以*<α+<*π,所以cos*=-*,

所以sin*=*sin 2*=*2sincos*=-*2*××=-.*

id:2147507788;FounderCES

【备选理由】 例1考查三角函数式的化简;例2是给值求值问题;例3是给角求值问题的补充,给出的是非特殊角;例4是给值求角问题,选择相应的三角函数求值是解题的关键*.*

例1[配合例1使用] 化简:sin(*α+β*)cos *α-*[sin(2*α+β*)*-*sin *β*]*=　　　　.*

[答案] sin *β*

[解析] 原式*=*sin(*α+β*)cos *α-*[sin(*α+β+α*)*-*sin *β*]

*=*sin(*α+β*)cos *α-*[sin(*α+β*)cos *α+*cos(*α+β*)sin *α-*sin *β*]

*=*[sin(*α+β*)cos *α-*cos(*α+β*)sin *α*]*+*sin *β*

*=*sin *β+*sin *β=*sin *β.*

例2[配合例2使用] **[**2018·资阳三诊**]** 已知角*α*的顶点与原点*O*重合,始边与*x*轴的正半轴重合,若它的终边经过点*P*(2,1),则tan*=* ()

A*.-*7 B*.-*

C*.* D*.*7

[解析] A由角*α*的顶点与原点*O*重合,始边与*x*轴的正半轴重合,且它的终边经过点*P*(2,1),可得tan *α=*,*∴*tan 2*α===*,*∴*tan*===-*7*.*故选A*.*

例3[配合例3使用] 若*a=*(cos216°*-*sin216°),*b=*sin 15°*+*cos 15°,*c=*,则*a*,*b*,*c*的大小关系为 ()

A*.c<b<a* B*.b<c<a*

C*.a<b<c* D*.b<a<c*

[解析] C*a=*(cos216°*-*sin216°)*=*cos 32°,

*b=*sin 15°*+*cos 15°*=*cos 30°,

*c===*cos 28°,

又*∵y=*cos *x*在(0°,90°)上单调递减,

*∴*cos 28°*>*cos 30°*>*cos 32°,

*∴c>b>a.*故选C*.*

例4[配合例4使用] 已知*α*,*β*均为锐角,且sin *α=*,cos *β=*,则*α-β*的值为*.*

[答案] *-*

[解析] *∵α*,*β*均为锐角,sin *α=*,cos *β=*,

*∴*cos *α==*,sin *β==*,

*∴*sin(*α-β*)*=*sin *α*cos *β-*cos *α*sin *β=×-×=-.*

又*∵-<α-β<*,*∴α-β=-.*