**第8讲指数与指数函数**





1*.*根式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n*次  方根 | 概念 | 如果*xn=a*,那么*x*叫作*a*的,其中*n>*1,*n*∈N*\** |
| 性质 | 当*n*是时,*a*的*n*次方根为*x=* |
| 当*n*是时,正数*a*的*n*次方根为*x=±*,负数的偶次方根 |
| 0的任何次方根都是0,记作*=*0 |
| 根式 | 概念 | 式子叫作,其中*n*叫作,*a*叫作 |
| 性质 | 当*n*为奇数时,*=* |
| 当*n*为偶数时,*=|a|=* |

2*.*有理数指数幂

(1)幂的有关概念

*①*正数的正分数指数幂:*=*(*a>*0,*m*,*n*∈N*\**,且*n>*1)*.*

*②*正数的负分数指数幂:*==*(*a>*0,*m*,*n*∈N*\**,且*n>*1)*.*

*③*0的正分数指数幂等于,0的负分数指数幂*.*

(2)有理数指数幂的性质

*①aras=*(*a>*0,*r*,*s*∈Q);

*②*(*ar*)*s=*(*a>*0,*r*,*s*∈Q);

*③*(*ab*)*r=*(*a>*0,*b>*0,*r*∈Q)*.*

3*.*指数函数的图像与性质

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *y=ax*(*a>*0  且*a*≠1) | *a>*1 | 0*<a<*1 |
| 图像 |  |  |
| 定义域 | R | |
| 值域 |  | |
| 性质 | 过定点 | |
| 当*x>*0时,;  当*x<*0时, | 当*x>*0时,;  当*x<*0时, |
| 在R上是 | 在R上是 |

常用结论

1*.*函数*y=ax+b*(*a>*0且*a*≠1)的图像恒过定点(0,1*+b*)*.*

2*.*指数函数*y=ax*(*a>*0且*a*≠1)的图像以*x*轴为渐近线*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 若*x+x-*1*=*3,则*x*2*-x-*2*=　　　　.*

2*.***[**教材改编**]** 已知2*x-*1*<*23*-x*,则*x*的取值范围是*.*

3*.***[**教材改编**]** 函数*y=ax-*1*+*2(*a>*0且*a*≠1)的图像恒过定点*.*

4*.***[**教材改编**]** 下列所给函数中值域为(0,*+∞*)的是*.*

*①y=-*5*x*;*②y=*;*③y=*;*④y=.*

题组二常错题

◆索引:忽略*n*的范围导致式子(*a*∈R)化简出错;不能正确理解指数函数的概念致错;指数函数问题时刻注意底数的两种情况;复合函数问题容易忽略指数函数的值域致错*.*

5*.*计算*+=　　　　.*

6*.*若函数*f*(*x*)*=*(*a*2*-*3)·*ax*为指数函数,则*a=　　　　.*

7*.*若函数*f*(*x*)*=ax*在[*-*1,1]上的最大值为2,则*a=　　　　.*

8*.*函数*y=*的值域为*.*



id:2147498271;FounderCES探究点一指数幂的化简与求值

例1 (1)计算:*-++*[(*-*2)6*=　　　　.*

(2)已知*+=*,则的值为*.*

[总结反思] 指数幂运算的一般原则:

(1)指数幂的运算首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂,以便利用法则计算*.*

(2)先乘除后加减,负指数幂化成正指数幂的倒数*.*

(3)底数是负数,先确定符号;底数是小数,先化成分数;底数是带分数的,先化成假分数*.*

(4)运算结果不能同时含有根号和分数指数,也不能既有分母又含有负指数*.*

变式题 (1)计算:2*=* ()

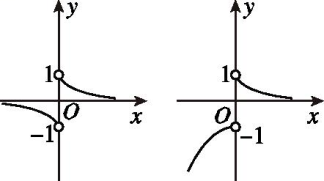
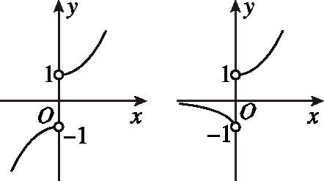
A*.*3 B*.*2

C*.*2*+x* D*.*1*+*2*x*

(2)已知*a*,*b*是方程*x*2*-*6*x+*4*=*0的两根,且*a>b>*0,则*=　　　　.*

id:2147498285;FounderCES探究点二指数函数的图像及应用

例2 (1)函数*y=*(*a>*1)的图像大致是 ()



A　　　　　 B　　　　　C　　　　　 D

图2*-*8*-*1

(2)**[**2018·辽阳一模**]** 设函数*f*(*x*)*=*若互不相等的实数*a*,*b*,*c*满足*f*(*a*)*=f*(*b*)*=f*(*c*),则2*a+*2*b+*2*c*的取值范围是 ()

A*.*(16,32) B*.*(18,34)

C*.*(17,35) D*.*(6,7)

[总结反思] (1)研究指数函数*y=ax*(*a>*0,*a*≠1)的图像要抓住三个特殊点:(1,*a*),(0,1),*.*

(2)与指数函数有关的函数图像问题的研究,往往利用相应指数函数的图像,通过平移、对称变换得到其图像*.*

(3)一些指数方程、不等式问题的求解,往往结合相应的指数型函数图像,利用数形结合求解*.*

变式题 (1)已知函数*f*(*x*)*=*(*x-a*)(*x-b*)(*a>b*)的图像如图2*-*8*-*2所示,则函数*g*(*x*)*=ax+b*的图像大致是()

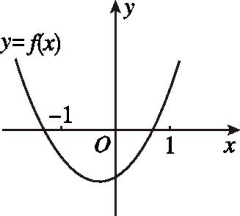
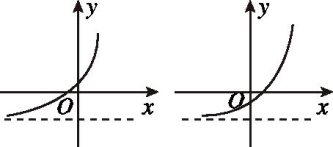
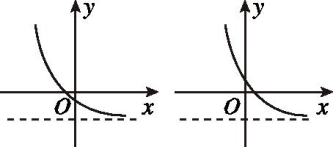


图2*-*8*-*2



A　　　　　B　　　　　　C　　　　　D

图2*-*8*-*3

(2)函数*f*(*x*)*=|ax+b|*(*a>*0,*a*≠1,*b*∈R)的图像如图2*-*8*-*4所示,则*a+b*的取值范围是*.*

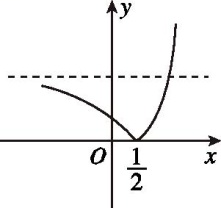


图2*-*8*-*4

id:2147498334;FounderCES探究点三利用指数函数的性质解决有关问题

id:2147498341;FounderCES

微点1比较指数式的大小

例3 (1)**[**2018·凯里一中二模**]** 已知*a=*0*.*5*-*2*.*1,*b=*20*.*5,*c=*0*.*22*.*1,则*a*,*b*,*c*的大小关系是 ()

A*.c<b<a* B*.b<c<a*

C*.b<a<c* D*.c<a<b*

(2)**[**2018·杭州一中模拟**]** 已知0*<a<b<*1,则 ()

A*.*(1*-a>*(1*-a*)*b*

B*.*(1*-a*)*b>*(1*-a*

C*.*(1*+a*)*a>*(1*+b*)*b*

D*.*(1*-a*)*a>*(1*-b*)*b*

[总结反思] 指数式的大小比较,依据的就是指数函数的单调性,原则上化为同底的指数式,并要注意底数范围是(0,1)还是(1,*+∞*),若不能化为同底,则可化为同指数,或利用中间变量比较*.*

微点2解简单的指数方程或不等式

例4 (1)已知函数*f*(*x*)*=a+*的图像过点1,*-*,若*-*≤*f*(*x*)≤0,则实数*x*的取值范围是*.*

(2)方程4*x+|*1*-*2*x|=*11的解为*.*

[总结反思] (1)*af*(*x*)*=ag*(*x*)⇔*f*(*x*)*=g*(*x*)*.*(2)*af*(*x*)*>ag*(*x*),当*a>*1时,等价于*f*(*x*)*>g*(*x*);当0*<a<*1时,等价于*f*(*x*)*<g*(*x*)*.*(3)有些含参指数不等式,需要分离变量,转化为求有关函数的最值问题*.*

微点3指数函数性质的综合问题

例5 (1)**[**2018·遵义联考**]** 函数*f*(*x*)*=a+*(*a*,*b*∈R)是奇函数,且图像经过点,则函数*f*(*x*)的值域为 ()

A*.*(*-*1,1) B*.*(*-*2,2)

C*.*(*-*3,3) D*.*(*-*4,4)

(2)已知*f*(*x*)*=*(*a*∈R)的图像关于坐标原点对称,若存在*x*∈[0,1],使不等式*f*(*x*)*+*2*x-<*0成立,则实数*b*的取值范围为*.*

[总结反思] 指数函数的综合问题,主要涉及单调性、奇偶性、最值问题,应在有关性质的基础上,结合指数函数的性质进行解决,而指数函数性质的重点是单调性,注意利用单调性实现问题的转化*.*

应用演练

1*.*【微点1】已知*a=*20*.*2,*b=*0*.*40*.*2,*c=*0*.*40*.*6,则 ()

A*.a>b>c*

B*.a>c>b*

C*.c>a>b*

D*.b>c>a*

2*.*【微点1】**[**2018·河南八市联考**]** 设函数*f*(*x*)*=x*2*-a*与*g*(*x*)*=ax*(*a>*1且*a*≠2)在区间(0,*+∞*)上具有不同的单调性,则*M=*(*a-*1)0*.*2与*N=*的大小关系是()

A*.M=N* B*.M*≤*N*

C*.M<N* D*.M>N*

3*.*【微点2】当*x*∈(*-∞*,*-*1]时,不等式(*m*2*-m*)·4*x-*2*x<*0恒成立,则实数*m*的取值范围是 ()

A*.*(*-*1,2)

B*.*(*-*4,3)

C*.*(*-*3,4)

D*.*(*-*2,1)

4*.*【微点2】若关于*x*的方程*|ax-*1*|=*2*a*(*a>*0且*a*≠1)有两个不等实根,则*a*的取值范围是 ()

A*.*(0,1)∪(1,*+∞*)

B*.*(0,1)

C*.*(1,*+∞*)

D*.*

5*.*【微点3】已知函数*f*(*x*)*=b*·*ax*(其中*a*,*b*为常数,且*a>*0,*a*≠1)的图像经过点*A*(1,6),*B*(3,24)*.*若不等式*+-m*≥0,*x*∈(*-∞*,1]恒成立,则实数*m*的取值范围为*.*

第8讲指数与指数函数

考试说明 1*.*理解有理数指数幂的含义,了解实数指数幂的意义,掌握幂的运算*.*

2*.*指数函数

(1)了解指数函数模型的实际背景*.*

(2)理解指数函数的概念,理解指数函数的单调性,掌握指数函数图像通过的特殊点,会画底数为2,3,10,,的指数函数的图像*.*

(3)知道指数函数是一类重要的函数模型*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.n*次方根奇数偶数没有意义根式根指数被开方数*a*

2*.*(1)0没有意义(2)*ar+s　ars　arbr*

3*.*(0,*+∞*)(0,1)*y>*10*<y<*10*<y<*1*y>*1增函数减函数

对点演练

1*.±*3[解析] 把*x+x-*1*=*3两边平方,可得*x*2*+x-*2*=*7,则(*x-x-*1)2*=x*2*-*2*+x-*2*=*5,所以*x-x-*1*=±*,所以*x*2*-x-*2*=*(*x+x-*1)(*x-x-*1)*=±*3*.*

2*.*(*-∞*,2)[解析] 根据指数函数性质,得*x-*1*<*3*-x*,解得*x<*2,所以*x*的取值范围是(*-∞*,2)*.*

3*.*(1,3)[解析] 令*x-*1*=*0,得*x=*1,此时*y=a*0*+*2*=*3,所以函数图像恒过定点(1,3)*.*

4*.②*[解析] 对于*②*,*∵*1*-x*∈R,*∴y=*的值域是(0,*+∞*);*①*的值域为(*-∞*,0);*③*的值域为[0,*+∞*);*④*的值域为[0,1)*.*

5*.*2[解析] *+=*1*++|*1*-|=*2*.*

6*.*2[解析] 由指数函数的定义可得解得*a=*2*.*

7*.*2或[解析] 若*a>*1,则*f*(*x*)max*=f*(1)*=a=*2;若0*<a<*1,则函数*f*(*x*)max*=f*(*-*1)*=a-*1*=*2,得*a=.*

8*.*{*y|y>*0且*y*≠1}[解析] 函数的定义域为{*x|x*≠1},因为≠0,所以*y*≠1,又指数函数*y=*2*x*的值域为(0,*+∞*),故所求函数的值域为{*y|y>*0且*y*≠1}*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)直接利用指数幂的运算法则求解即可,解答过程中注意避免符号错误;(2)由已知平方得*x+x-*1的值,再平方可得*x*2*+x-*2的值,最后代入求值*.*

(1)π*+*8(2)*-*[解析] (1)*-++*[(*-*2)6*=-*1*+*(π*-*3)*+=*22*-*1*+*π*-*3*+*23*=*4*+*π*-*4*+*8*=*π*+*8*.*

(2)由已知可得*x+x-*1*=*(*+*)2*-*2*=*3,

则*x*2*+x-*2*=*(*x+x-*1)2*-*2*=*7,

故原式*==-.*

变式题(1)D(2)[解析] (1)原式*=*2·*+*2·*=*1*+*2*x.*

(2)由已知得,*a+b=*6,*ab=*4,所以*===.*

因为*a>b>*0,所以*>*,所以*=.*

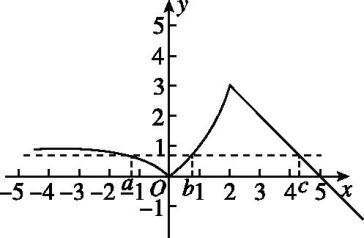
例2[思路点拨] (1)化简所给的解析式,然后结合选项进行判断;(2)作出函数图像,结合图像可知2*a+*2*b=*2,再分析2*c*的范围求解*.*

(1)B(2)B[解析] (1)由题意得*y==*

*∵a>*1,*∴*当*x>*0时,函数为增函数;当*x<*0时,函数为减函数*.*

结合各选项可得B满足题意*.*故选B*.*

(2)画出函数*f*(*x*)的图像如图所示*.*



不妨令*a<b<c*,则1*-*2*a=*2*b-*1,则2*a+*2*b=*2*.*

结合图像可得4*<c<*5,故16*<*2*c<*32,

*∴*18*<*2*a+*2*b+*2*c<*34*.*故选B*.*

变式题(1)A(2)(0,*+∞*)[解析] (1)由函数*f*(*x*)*=*(*x-a*)(*x-b*)的图像可得0*<a<*1,*b<-*1,故*g*(*x*)*=ax+b*的大致图像为选项A中的图像*.*

(2)根据图像得*a>*1,*f=*0,*b<*0,

所以*+b=*0,所以*a+b=a->*1*-=*0*.*

例3[思路点拨] (1)将*a*,*b*化为同底的指数式,利用指数函数*y=*2*x*的单调性比较*a*,*b*的大小,再估算*c*,从而得*a*,*b*,*c*的大小关系;(2)根据指数函数的单调性,即当底数大于1时单调递增,当底数大于0小于1时单调递减,对选项逐一验证即可得到正确答案*.*

(1)A(2)D[解析] (1)因为*a=*0*.*5*-*2*.*1*=*22*.*1*>*20*.*5*>*1,所以*a>b>*1,又因为*c=*0*.*22*.*1*<*0*.*20*=*1,所以*a>b>c*,故选A*.*

(2)因为0*<a<*1,所以0*<*1*-a<*1,所以*y=*(1*-a*)*x*是减函数,

又因为0*<b<*1,所以*>b*,*b>*,

所以(1*-a<*(1*-a*)*b*,(1*-a*)*b<*(1*-a*,所以A,B均错误;

又1*<*1*+a<*1*+b*,所以(1*+a*)*a<*(1*+b*)*a<*(1*+b*)*b*,所以C错误;

对于D,(1*-a*)*a>*(1*-a*)*b>*(1*-b*)*b*,所以(1*-a*)*a>*(1*-b*)*b*,所以D正确*.*故选D*.*

例4[思路点拨] (1)先确定*a*的值,再结合指数函数的单调性求解;(2)分情况讨论去掉绝对值,解相应的指数方程*.*

(1)0≤*x*≤(2)*x=*log23[解析] (1)由题意知*f*(1)*=a+=a+=-*,则*a=-.*因为*-*≤*f*(*x*)≤0,所以*-*≤*-*≤0,所以≤≤,所以2≤4*x+*1≤3,所以1≤4*x*≤2,解得0≤*x*≤*.*

(2)当*x*≤0时,1*-*2*x*≥0,

原方程即为4*x-*2*x-*10*=*0,可得2*x=+*,此时*x>*0,故舍去*.*

当*x>*0时,1*-*2*x<*0,

原方程即为4*x+*2*x-*12*=*0,可得2*x=*3,则*x=*log23,即为原方程的解*.*

例5[思路点拨] (1)根据条件先确定*a*,*b*的值,再依据指数函数的单调性及值域确定函数*f*(*x*)的值域;(2)由函数*f*(*x*)为奇函数,确定*a*的值,将不等式分离变量,转化成*b>g*(*x*)的形式,从而转化为考查函数*g*(*x*)的最小值问题*.*

(1)A(2)*b>*2[解析] (1)函数*f*(*x*)为奇函数,则*f*(0)*=a+=*0,*①*

函数图像过点,则*f*(ln 3)*=a+=.②*

结合*①②*可得*a=*1,*b=-*2,

则*f*(*x*)*=*1*-.*因为e*x>*0,所以e*x+*1*>*1,所以0*<<*2,所以*-*1*<*1*-<*1,

即函数*f*(*x*)的值域为(*-*1,1)*.*

(2)由题意知*f*(*x*)是R上的奇函数,所以*f*(0)*=*0,得*a=*1,所以*f*(*x*)*=.*设*h*(*x*)*=+*2*x-=*,由题设知*h*(*x*)*<*0在[0,1]内有解,即不等式(2*x*)2*+*2*x+*1*-*1*-b<*0在[0,1]内有解,即*b>*(2*x*)2*+*2*x+*1*-*1在[0,1]内有解*.*设*g*(*x*)*=*(2*x*)2*+*2*x+*1*-*1,*x*∈[0,1],而函数*y=*2*x*,*y=*2*x+*1在定义域内均单调递增,所以*g*(*x*)*=*(2*x*)2*+*2*x+*1*-*1在[0,1]上单调递增,所以*g*(*x*)min*=g*(0)*=*2,所以*b>*2*.*

应用演练

1*.*A[解析] 因为函数*f*(*x*)*=*0*.*4*x*在R上为减函数,所以0*.*40*.*6*<*0*.*40*.*2*<*0*.*40*=*1,

又因为20*.*2*>*20*=*1,所以20*.*2*>*0*.*40*.*2*>*0*.*40*.*6,即*a>b>c.*

故选A*.*

2*.*D[解析] 因为*f*(*x*)*=x*2*-a*与*g*(*x*)*=ax*(*a>*1且*a*≠2)在区间(0,*+∞*)上具有不同的单调性,所以*a>*2,所以*M=*(*a-*1)0*.*2*>*1,*N=<*1,所以*M>N*,故选D*.*

3*.*A[解析] 由题意知当*x*∈(*-∞*,*-*1]时,*m*2*-m<=*恒成立,

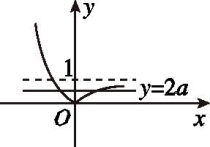
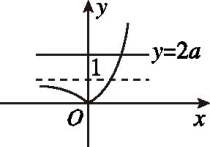
当*x*∈(*-∞*,*-*1]时,∈[2,*+∞*),

则*m*2*-m<*2,解得*-*1*<m<*2,故选A*.*

4*.*D[解析] 方程*|ax-*1*|=*2*a*(*a>*0且*a*≠1)有两个不等实根可转化为函数*y=|ax-*1*|*与*y=*2*a*的图像有两个不同交点*.*

当0*<a<*1时,两函数图像如图*①*,则0*<*2*a<*1,即0*<a<*;

当*a>*1时,两函数图像如图*②*,而*y=*2*a>*1,不符合题意*.*

*① ②*

故0*<a<.*

5*.*[解析] 把*A*(1,6),*B*(3,24)代入*f*(*x*)*=b*·*ax*,得

结合*a>*0且*a*≠1,解得

所以*f*(*x*)*=*3·2*x.*

要使*+*≥*m*,*x*∈(*-∞*,1]恒成立,只需函数*y=+*在(*-∞*,1]上的最小值不小于*m*即可*.*

因为函数*y=+*在(*-∞*,1]上为减函数,

所以当*x=*1时,*y=+*取得最小值,

所以只需*m*≤即可,

即*m*的取值范围为*.*



【备选理由】 例1为指数幂的运算,涉及换元运算和指数运算,技巧性较强;例2为分段函数与函数不等式结合问题,需要分区间处理,考查函数的单调性;例3为含参不等式,进一步熟悉分离变量以及转化与化归思想;例4考查了求解指数方程、指数函数的单调性、不等式恒成立问题,要善于使用分离变量法求解*.*

例1[配合例1使用] 已知*=*2*+*,则的值为*.*

[答案] 3

[解析] 设*=t*,则*t*2*=*2*+*,则*==t*2*+-*1*=*2*++-*1*=*3*.*

例2[配合例4使用] **[**2018·河南林州一中调研**]** 已知函数*f*(*x*)*=*则不等式*f*(*x*)*<f*的解集是*.*

[答案] (0,)

[解析] 当*x*≥2时,≤1,不等式无解;当1*<x<*2时,1*<<*2,结合函数的单调性,由不等式*f*(*x*)*<f*得*x<*,得1*<x<*;当0*<x*≤1时,≥2,不等式恒成立;当*x<*0时,*<*0,不等式无解*.*综上可得,不等式*f*(*x*)*<f*的解集是(0,)*.*

例3[配合例5使用] 若不等式1*+*2*x+*4*x*·*a>*0在*x*∈(*-∞*,1]时恒成立,则实数*a*的取值范围是*.*

[答案]

[解析] 从已知不等式中分离出实数*a*,得*a>-.*

*∵*函数*y=*和*y=*在R上都是减函数,*∴*当*x*∈(*-∞*,1]时,≥,≥,

*∴+*≥*+=*,从而得*-*≤*-.*

故实数*a*的取值范围为*a>-.*

例4[配合例5使用] 已知定义在R上的函数*f*(*x*)*=*2*x-.*

(1)若*f*(*x*)*=*,求*x*的值;

(2)若2*tf*(2*t*)*+mf*(*t*)≥0对任意*t*∈[1,2]恒成立,求实数*m*的取值范围*.*

解:(1)由*f*(*x*)*=*⇒2*x-=*⇒2*·*(2*x*)2*-*3*·*2*x-*2*=*0⇒(2*x-*2)(2*·*2*x+*1)*=*0*.∵*2*x>*0,*∴*2*x=*2,*∴x=*1*.*

(2)由2*tf*(2*t*)*+mf*(*t*)≥0⇒2*t+m*≥0⇒*m*(2*t-*2*-t*)≥*-*2*t*(22*t-*2*-*2*t*)*.*

又*t*∈[1,2],*∴*2*t-*2*-t>*0,*∴m*≥*-*2*t*(2*t+*2*-t*),即*m*≥*-*22*t-*1,

故只需*m*≥(*-*22*t-*1)max*.*

令*y=-*22*t-*1,*t*∈[1,2],可得*y*max*=-*22*-*1*=-*5,

故*m*≥*-*5*.*