

集合的概念与集合的表示



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **集**  **合** | **概 念** | 把研究对象的总体称为集合，把研究对象统称为元素。 | |
| **元素的性质** | （1）确定性；（2）互异性；（3）无序性 | |
| **表**  **示**  **方**  **法** | 列  举  法 | ①元素不重复 |
| ②元素无顺序 |
| ③元素间用“，”隔开 |
| 描  述  法 | ①写清楚集合中元素的代号，如{x∈R|x>0}，不能写成{x>2}； |
| ②说明该集合中元素的性质； |
| ③所有描述的内容都写在大括号内。 |
| **元素与集合的关系** | | 一般地，用大写拉丁字母如A、B、C表示集合，用小写拉丁字母a、b、c表示集合中的元素，如果a是集合A中的元素就说a属于集合A，记作a∈A；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作aA。 | |
| **常用数集及其记法** | | N为零和正整数组成的集合，即自然数集，N\*或N+为正整数组成的集合；Z为整数组成的集合；Q为有理数组成的集合，R为实数组成的集合。 | |



**例题1** 判断下列命题是否正确，并说明理由。

（1）{R}=R；

（2）方程组的解集为{x=1，y=2}；

（3）{x|y=x2－1}={y|y=x2－1}={（x，y）|y=x2－1}；

（4）平面内线段MN的垂直平分线可表示为{P|PM=PN}。

**答案：**（1）{R}=R是不正确的，R通常为R={x|x为实数}，即R本身可表示为全体实数的集合，而{R}则表示含有一个字母R的集合，它不能为实数的集合。

（2）方程组的解集为{x=1，y=2}是不对的，因为解集的元素是有序实数对（x，y），正确答案应为{（x，y）|}={（1，2）}。

（3）{x|y=x2－1}={y|y=x2－1}={（x，y）|y=x2－1}是不正确的。

{x|y=x2－1}表示的是函数自变量的集合，它可以为{x|y=x2－1}={x|x∈R}=R。

{y|y=x2－1}表示的是函数因变量的集合，它可以为{y|y=x2－1}={y|y≥－1}。

{（x，y）|y=x2－1}表示点的集合，这些点在二次函数y=x2－1的图象上。

（4）平面上线段MN的垂直平分线可表示为{P|PM=PN}，该命题是正确的。

**知识点拨：**正确理解集合的表示方法对以后的学习有极大帮助。特殊数集用特定字母表示有特别规定，不能乱用；二元一次方程组的解集必须为{（x，y）|}的形式；对描述法表示的集合一定要认清竖杠前面的元素是谁，竖杠后其特征又是什么。

**例题2** 已知a∈{1，－1，a2}，则a的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

**答案：**∵a∈{1，－1，a2}，

∴a可以等于1，－1，a2。

（1）当a=1时，集合则为{1，－1，1}，不符合集合元素的互异性。故a≠1。

（2）同上，a=－1时也不成立。

（3）a=a2时，得a=0或1，a=1不满足，舍去，a=0时集合为{1，－1，0}。

综上，a=0。

**知识点拨：**集合元素的互异性指集合中的元素必须互不相同，无序性指集合中的元素与顺序无关。因此在处理元素为字母的集合问题时，既要注意对字母进行讨论，又要自觉注意集合元素的互异性、确定性。

**随堂练习：**下列各组对象中不能构成集合的是……（ ）

A. 高一（1）班全体女生 B. 高一（1）班全体学生的家长

C. 高一（1）班开设的所有课程 D. 高一（1）班身高较高的男同学

**知识点拨：**根据集合的概念进行判断。因为A、B、C中所给对象都是确定的，从而可以构成集合；而D中所给对象不确定，原因是找不到衡量学生身高较高的标准，故不能构成集合。若将D中“身高较高的男同学”改为“身高175 cm以上的男同学”，则能构成集合。

**答案：**D



判断某组对象是否为集合必须同时满足三个特征：（1）确定性，（2）互异性，（3）无序性，特别是确定性比较难理解，是指元素和集合的关系是非常明确的，要么该元素属于集合，要么该元素不属于集合，而不是模棱两可。

**例题** 判断以下对象能否组成集合。

（1）高一（1）班的身高大于1.75 m的学生；

（2）高一（1）班的高个子学生。

**答案：**（1）高一（1）班中身高大于1.75 m的学生是确定的，因此身高大于1.75 m的学生可以组成集合。

（2）高一（1）班中的高个子学生没有具体身高标准，因此高个子学生不能组成集合。



**（答题时间：15分钟）**

1. 下列集合表示法正确的是（ ）

A. {1，2，3，3}

B. {全体有理数}

C. 0＝{0}

D. 不等式*x*－3>2的解集是{*x*|*x*>5}

2. 下列语句

①集合{*x*|0<*x*<1}可以用列举法表示；

②集合{1，2，1}含有三个元素；

③正整数集可以表示为{1，2，3，4，…}；

④由1，2，3组成的集合可表示为{1，2，3}或{3，2，1}。

正确的是（ ）

A. 只有①和④ B. 只有②和③

C. 只有③ D. 只有③和④

3. 集合{1，3，5，7，9}用描述法表示应是（ ）

A. {*x*|*x*是不大于9的非负奇数}

B. {*x*|*x*≤9，*x*∈**N**}

C. {*x*|1≤*x*≤9，*x*∈**N**}

D. {*x*|0≤*x*≤9，*x*∈**Z**}

4. 下列集合中，不同于另外三个集合的是（ ）

A. {*x*|*x*＝1} B. {*y*|（*y*－1）2＝0}

C. {*x*＝1} D. {1}

5. 集合*M*＝{（*x*，*y*）|*xy*<0，*x*∈**R**，*y*∈**R**}是指（ ）

A. 第一象限内的点集

B. 第三象限内的点集

C. 第一、三象限内的点集

D. 第二、四象限内的点集

6. {（*x*，*y*）|*x*＋*y*＝6，*x*，*y*∈**N**}用列举法表示为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。



1. D

2. D 解析：①表示无限集，不能一一列举，故①不正确；②含有相同的元素，②不正确；③、④正确。

3. A

4. C 解析：A、B、D三项表示的集合都是{1}，而C选项表示含有一个方程的集合。

5. D 解析：*xy*<0表示*x*>0且*y*<0或*x*<0且*y*>0。因此集合*M*表示第二、四象限内的点集。

6. {（0，6），（1，5），（2，4），（3，3），（4，2），（5，1），（6，0）}



集合的运算



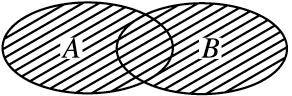
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **子 集** | **真 子 集** |
| **定 义** | 对于两个集合A、B，如果集合A中的任意一个元素都是集合B中的元素，称集合A为集合B的子集 | 若集合AB，但存在元素x∈B，且xA，称集合A是集合B的真子集 |
| **符号语言** | 若任意x∈A，有x∈B，则AB。 | 若集合AB，但存在元素x∈B，且xA，则ABDB |
| **表示方法** | A为集合B的子集，记作AB或BA。  A不是B的子集时，记作A1B或B5A。 | 若集合A是集合B的真子集，记作ABDB或BBBDA。 |
| **性 质** | ①AA ②A  ③AB，BCAC | ABDB，且BBDCABDC |
| **子集个数** | 含n个元素的集合A的子集个数为 | 含n个元素的集合A的真子集个数为－1 |
| **空 集** | 不含任何元素的集合，记为。空集是任何集合的子集，用符号语言表示为A；若A非空（即A≠），则有BDA。 | |

集合的运算：

1. 并集的概念

（1）自然语言表示：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，称为集合A与B的并集。

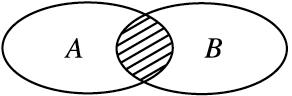
（2）符号语言表示：A∪B={x|x∈A，或x∈B}。

（3）图形语言（Venn图）表示：。

2. 交集的概念

（1）自然语言表示：由属于集合A且属于集合B的所有元素所组成的集合，称为集合A与B的交集。

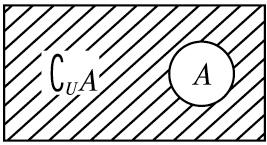
（2）符号语言表示：A∩B={x|x∈A，且x∈B}。

（3）图形语言表示（Venn图）：。

3. 补集的概念

（1）自然语言表示：对于集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素所组成的集合，称为集合A相对于全集U的补集，简称为集合A的补集。

（2）符号语言表示：UA={x|x∈U，且xA}。

（3）图形语言表示（Venn图）：，阴影部分表示UA。



**例题1** 判断下列说法是否正确，如果不正确，请加以改正。

（1）{}表示空集；

（2）空集是任何集合的真子集；

（3）{1，2，3}不是{3，2，1}；

（4）{0，1}的所有子集是{0}，{1}，{0，1}；

（5）如果AB且A≠B，那么B必是A的真子集；

（6）AB与BA不能同时成立。

**思路导航：**对每个说法按照相关的定义进行分析，认真地与定义中的要素进行对比，即

**答案：**（1）不正确。应该改为：{}，表示这个集合的元素是。

（2）不正确。空集是任何非空集合的真子集，也就是说空集不能是它自身的真子集。这是因为空集与空集相等，而两个相等的集合不能说其中一个是另一个的真子集。由此也发现了，如果一个集合是另一个集合的真子集，那么这两个集合必不相等。

（3）不正确。{1，2，3}与{3，2，1}表示同一集合。

（4）不正确。{0，1}的所有子集是{0}，{1}，{0，1}，。

（5）正确。

（6）不正确。A=B时，AB与BA能同时成立

**知识点拨：**结合本题，要注意以下几点：

（1）{}不表示空集，它表示以空集为元素的集合，所以（1）不正确。空集有专用的符号“”，不能写成{}，也不能写成{ }。

（2）分析空集、子集、真子集的区别与联系。

（3）不正确。两个集合是不是相同，要看其中一个集合的每个元素在另一个集合中是不是都有相同的元素与之对应，而不必考虑各元素的顺序。

（4）不正确。注意到是每个集合的子集。所以这个说法不正确。

（5）正确。AB包括两种情形：AB和A=B。

（6）不正确。A=B时，AB与BA能同时成立。

**例题2** 已知集合A={x|ax2－3x+2=0，a∈**R**}，若A中元素至多只有一个，求a的取值范围。

**知识点拨：**对于方程ax2－3x+2=0，a∈**R**的解，要看这个方程左边的二次项的系数，a=0或a≠0时，方程的根的情况是不一样的。则集合A的元素也不相同，所以首先要分类讨论。

**答案：**（1）a=0时，原方程为－3x+2=0x=，符合题意；

（2）a≠0时，方程ax2－3x+2=0为一元二次方程，Δ=9－8a≤0a≥。

∴当a≥时，方程ax2－3x+2=0无实根或有两个相等实数根，这都符合题意。

综合（1）（2），知a=0或a≥。

**例题3** 设集合*A*＝{*x*||*x*－*a*|<1，*x*∈**R**}，*B*＝{*x*|1<*x*<5，*x*∈**R**}。若*A*∩*B*＝∅，则实数*a*的取值范围是（ ）

A. {*a*|0≤*a*≤6} B. {*a*|*a*≤2或*a*≥4}

C. {*a*|*a*≤0或*a*≥6} D. {*a*|2≤*a*≤4}

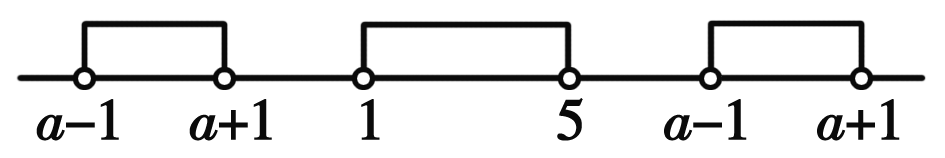
**知识点拨：**本题主要考查绝对值不等式的基本解法与集合交集的运算，属于中等题。

由|*x*－*a*|<1得－1<*x*－*a*<1，即*a*－1<*x*<*a*＋1。

∵*A*∩*B*＝∅

∴可以分两种情况来讨论，一种是A集合在B集合的左边，一种是A集合在B集合的右边。

如图，由图可知*a*＋1≤1或*a*－1≥5，所以*a*≤0或*a*≥6。



**答案：**C

**随堂练习：**满足{1，3}∪A={1，3，5}的所有集合A的个数是（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

**知识点拨：**根据A∪B的定义可知，集合{1，3，5}应该是集合{1，3}和A的元素并在一起构成的集合，所以A中必有元素5，且其他元素只能从1，3中选出一个或两个或不选，因此A有四种可能：{5}，{1，5}，{3，5}，{1，3，5}。

**答案：**D



**（答题时间：15分钟）**

1. 集合*A*＝{2，3，5}，当*x*∈*A*时，若*x*－1∉*A*，*x*＋1∉*A*，则称*x*为*A*的一个“孤立元”，则*A*中孤立元的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_个。

2. 设－5∈{*x*|*x*2－*ax*－5＝0}，则集合{*x*|*x*2－4*x*－*a*＝0}中所有元素之和为\_\_\_\_\_\_\_\_。

3. 用另一种方法表示下列集合。

（1）{绝对值小于2的整数}；

（2）{能被3整除，且小于10的正数}；

（3）{*x*|*x*＝|*x*|，*x*<5且*x*∈**Z**}；

（4）{－3，－1，1，3，5}。

4. 下面三个集合①{*x*|*y*＝*x*2＋1}；②{*y*|*y*＝*x*2＋1}；③{（*x*，*y*）|*y*＝*x*2＋1}。

（1）它们是不是相同的集合？

（2）它们各自的含义是什么？

5. 已知M{1，2，3，…，9}，若a∈M且10－a∈M，则集合M的个数为（ ）

A. 29 B.30 C.32 D.31

6. 设集合S＝{A0，A1，A2，A3}，在S上定义运算为:AiAj＝Ak，其中k为i+j被4除的余数，i，j＝0，1，2，3，则满足关系式（xx）A2＝A0的x（x∈S）的个数为

（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

7. 设全集I＝{1，2，3，…，9}，A，B是I的子集，若A∩B＝{1，2，3}，就称集对（A，B）为“好集”，那么所有“好集”的个数为（ ）

A. 6！ B. 62 C. 26 D. 36



1. 1

解析：当*x*＝2时，*x*－1＝1∉*A*，*x*＋1＝3∈*A*，

∴2不是孤立元；

当*x*＝3时，*x*－1＝2∈*A*，*x*＋1＝4∉*A*，

∴3不是孤立元；

当*x*＝5时，*x*－1＝4∉*A*，*x*＋1＝6∉*A*，

∴5是孤立元。

2. 2

解析：∵－5∈{*x*|*x*2－*ax*－5＝0}，

∴－5是方程*x*2－*ax*－5＝0的根。

∴（－5）2＋5*a*－5＝0，*a*＝－4。

∴*x*2－4*x*－*a*＝0即*x*2－4*x*＋4＝0，

∴*x*1＝*x*2＝2。

又∵集合中的元素是互异的，

∴{*x*|*x*2－4*x*－*a*＝0}＝{2}。

3. 解：（1）列举法表示为{－1，0，1}。

（2）列举法表示为{3，6，9}。

（3）列举法表示为{0，1，2，3，4}。

（4）描述法表示为{*x*|*x*＝2*n*－1，－1≤*n*≤3，*n*∈Z}。

4.

解：（1）是互不相同的集合。

（2）集合①{*x*|*y*＝*x*2＋1}的代表元素是*x*，满足条件*y*＝*x*2＋1中的*x*∈R，

∴{*x*|*y*＝*x*2＋1}＝R；

集合②{*y*|*y*＝*x*2＋1}的代表元素是*y*，满足条件*y*＝*x*2＋1的*y*的取值范围是*y*≥1。

∴{*y*|*y*＝*x*2＋1}＝{*y*|*y*≥1}；

集合③{（*x*，*y*）|*y*＝*x*2＋1}的代表元素是（*x*，*y*），是满足*y*＝*x*2＋1的数对（*x*，*y*）的集合；也可以认为是坐标平面内的点（*x*，*y*），由于这些点的坐标满足*y*＝*x*2＋1，

∴{（*x*，*y*）|*y*＝*x*2＋1}＝{抛物线*y*＝*x*2＋1上的点}。

5. D

解析：由题意，知M≠且1与9，2与8，3与7，4与6这4组数都要满足：每组数的某一个数在集合M中，这组数的另一个也必定在集合M中，所以集合M的个数为。

6.B

解析：本题考查学生阅读理解能力与根据信息解决问题的能力。x＝A0时，（xx）A2＝A2≠A0；

x＝A1时，（xx）A2＝A2A2＝A0；

x＝A2时，（xx）A2＝A0A2＝A2≠A0；

x＝A3时，（xx）A2＝A2A2＝A0；

所以选B。

7. D 解析：要使A∩B＝{1，2，3}，必须满足集合A，B中都含有元素1，2，3，且对全集中的其他6个元素中的每一个，要么在集合A中，要么在集合B中，或既不在A中也不在B中，于是这6个元素所在集合的不同情况有3×3×3×3×3×3＝36种。而这6个元素所在集合的不同情况种数即为“好集”的个数。故选D。



集合的应用



有关集合运算的性质

（1）A∪B=B∪A；A∪A=A；A∪=A。



（2）A∩B=B∩A；A∩A=A；A∩=。



（3）（RA）∪A=R；（RA）∩A=；R（RA）=A。

（4）A∩B=AAB；A∪B=BAB；A∩B=AA∪B=B。

（5）U（A∪B）=（UA）∩（UB），U（A∩B）=（UA）∪（UB）。

**例题1**  设A、B、I均为非空集合，且满足ABI，则下列各式中错误的是（ ）

A. （IA）∪B=I B. （IA）∪（IB）=I

C. A∩（IB）=  D. （IA）∩（IB）=IB

**答案：**对A选项，（IA）∪B=I（A∩（IB））=I；

对B选项，（IA）∪（IB）=I（A∩B）=IA；

对C选项，A∩（IB）=I（IA∪B）=；

对D选项，（IA）∩（IB）=I（A∪B）=IB。

综上所述，应选B。

**知识点拨：**（1）可根据题意画出韦恩图，借助于图形的直观性，对照选项A、B、C、D即可求解。

（2）根据题意ABI构造集合A、B、I，不妨设A=｛1｝，B=｛1，2｝，I=｛1，2，3｝，利用特殊值代入法可求解。

（3）根据集合的反演律求解，即I（A∪B）=（IA）∩（IB）；I（A∩B）=（IA）∪（IB）。

**例题2** 已知集合A={a，b}，B={x|x∈A，}C={x|xA}，试判断A、B、C之间的关系。

**知识点拨：**B中元素x的取值来源于A，C中元素是A的子集。集合B中的代表元素是x，x满足的条件是x∈A，因此x=a或x=b，即B={a，b}=A，而集合C则不然，集合C的代表元素虽然也是x，但x代表的是集合，xA，因此，x={a}或x={b}或x={a，b}或x=，即C={，{a}，{b}，{a，b}}，此时集合C中的元素是集合，故B∈C，A∈C。

∴A=B，B∈C，A∈C。

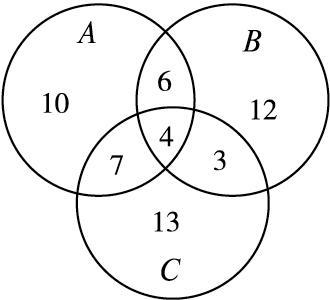
**答案：**A=B，B∈C，A∈C。

**知识点拨：**对于元素与集合、集合与集合之间的∈、关系要理解透彻，“∈”用于描述元素与集合之间的关系，即只要元素a是构成集合A的一个元素，则a∈A，如{1}与{{1}，{2}}，尽管{1}是一个集合，但{1}是构成集合{{1}，{2}}的一个元素，故{1}∈{{1}，{2}}，“”用于描述集合与集合之间的关系，如{1，2，3}{1，2，3，4}。

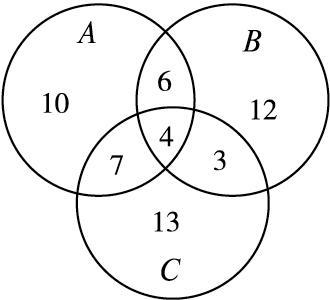
**例题3** 某班举行数理化竞赛，每人至少参加一科，已知参加数学竞赛的有27人，参加物理竞赛的有25人，参加化学竞赛的有27人，其中参加数学、物理两科的有10人，参加物理、化学两科的有7人，参加数学、化学两科的有11人，而参加数、理、化三科的有4人，画出集合关系图，并求出全班人数。

**思路导航：**本题考查集合的运算，解题的关键是把文字语言转化成符号语言，借助于韦恩图的直观性把它表示出来，再根据集合中元素的互异性求出问题的解。

设参加数学、物理、化学三科竞赛的同学组成的集合分别为A、B、C，由题意可知A、B、C三集合中元素的个数分别为27、25、27，A∩B、B∩C、A∩C、A∩B∩C的元素个数分别为10、7、11、4。画出韦恩图：



可知全班人数为10+13+12+6+4+7+3=55（人）。

**答案：** 全班人数55人。

**点评：**能正确使用一些集合符号把文字语言转化成符号语言、图形语言，是我们把实际问题转化成数学问题的关键，它实现了实际问题向数学问题的转化。



1. 解有关集合的交、并、补集时，可根据题设条件构造出一些新的数学形式（韦恩图或符合题设条件的集合A、B、I），并借助它认识和解决原问题，这种构造法对解好选择题有很大的帮助。

2. 一般来说，元素与集合之间应该用“”或“∈”；而“，BD”应该出现于集合与集合之间；作为特殊集合应遵从A，BDA（非空）。但这不是绝对的，选择的关键在于具体分析二者的关系。例{1，2}∈{{1，2}，{1}}，而∈{，1}，BD{，1}都是对的。



**（答题时间：15分钟）**

1. 若A、B、C为三个集合，A∪B＝B∩C，则一定有（ ）

A. AC B. CA C. A≠C D. A＝

2. 若集合A＝{1，2，x，4}，B＝{x2，1}，A∩B＝{1，4}，则满足条件的实数x的值为（ ）

A. 4 B. 2或－2 C. －2 D. 2

3. 设集合S＝{－2，－1，0，1，2}，T＝{x∈**R**|x+1≤2}，则（S∩T）等于（ ）

A.  B. {2} C. {1，2} D. {0，1，2}

4. 设U为全集，M、P是U的两个子集，且（M）∩P＝P，则M∩P等于（ ）

A. M B. P C. P D. 

5. 设集合M＝{x|x∈**R**且－1＜x＜2}，N＝{x|x∈**R**且|x|≥a，a＞0}，若M∩N＝，那么实数a的取值范围是（ ）

A. a＜1 B. a≤－1 C. a＞2 D. a≥2

6. 设满足y≥|x－1|的点（x，y）的集合为A，满足y≤－|x|+2的点（x，y）的集合为B，则A∩B所表示图形的面积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

7. 设A＝{x|x2+4x＝0}，B＝{x|x2+2（a+1）x+a2－1＝0}，若A∩B＝B，求a的值。



1. A 解析：由A∪B＝B∩C，知A∪BB，A∪BC，∴ABC。故选A。

2. C 解析：由A∩B＝{1，4}，B＝{x2，1}，得x2＝4，得x＝±2，又由于集合元素互异，∴x＝－2。

3. B 解析：由题意，知T＝{x|x≤1}，∴S∩T＝{－2，－1，0，1}，∴（S∩T）＝{2}。

4. D 解析：由（M）∩P＝P，知PM，于是P∩M＝。故选D。

5. D 解析：M＝{x|－1＜x＜2}，N＝{x|x≤－a或x≥a}。若M∩N＝，则－a≤－1且a≥2，即a≥1且a≥2，综上a≥2。

6.  解析：画出y≥|x－1|及y≤－|x|+2的图象，则A∩B表示的图形为矩形；由交点坐标及图象与坐标轴的交点坐标简单计算即得。

7.a≤－1或a＝1。

解：A＝{x|x2+4x＝0}＝{0，－4}。

（1）由A∩B＝B，得BA。

∴B＝或B＝{0}或B＝{－4}或B＝{0，－4}。

若B＝，则4（a+1）2－4（a2－1）＜0，则a＜－1。

若B＝{0}，则

∴a＝－1。

若B＝{－4}，则无解。

若B＝{0，－4}，则

解得a＝1。

∴所求a的范围是a≤－1或a＝1。



函数概念及函数的表示



|  |  |
| --- | --- |
| **函数的定义** | 设A、B是两个非空的数集，如果按照某种确定的对应关系f，使对于集合A中的任意一个数x，在集合B中都有唯一确定的数f（x）和它对应，那么就称f：A→B为集合A到集合B的一个函数，记作y=f（x） |
| **函数的三要素** | 函数的定义域、值域、对应关系，符号表示为f：A→B，A为定义域，B为值域C的一个扩集，（即C为B的子集）f为对应关系 |
| **y=f（x）的内涵** | 当自变量为x时，经过f对应的函数值为f（x），即y=f（x）不一定有具体解析式 |
| **两个函数相等** | 两个函数的三要素相同定义域、对应关系、值域相同定义域、对应关系相同 |



**例题1** 下列对应是从集合M到集合N的函数的是（ ）

A. M=R，N=R，f：x→y=

B. M=R，N=R+（正实数组成的集合），f：x→y=

C. M={x|x≥0}，N=R，f：x→y2=x

D. M=R，N={y|y≥0}，f：x→y=x2

**思路导航：**本题主要考查函数的定义。A. 对于M中的元素－1，N中没有元素与之对应，故该对应不是从M到N的函数。B. 对于M中任意值为负数的元素，N中没有元素与之对应，该对应f：M→N不是函数。C. 对于M中的任一元素，如x=4，通过对应法则f：x→y2=x得到N中有两个元素±2与之对应，故f：x→y2=x不是从M到N的函数。

**答案：**D

**点评：**判断一个对应法则是否构成函数，关键是看给出定义域内的任意一个值，通过给出的对应法则，看是否有且只有一个元素与之对应。

**例题2** 下列四组函数中，有相同图象的一组是（ ）

A. y=x－1，y= B. y=，y=

C. y=2，y= D. y=1，y=x0

**思路导航：**A. y=x－1与y==|x－1|的对应法则不同；B. y=的定义域为［1，+∞），y=的定义域为（1，+∞），两函数的定义域不同；D. y=1的定义域为R，y=x0的定义域为（－∞，0）∪（0，+∞），两函数定义域不同；C. y=2与y=是两相等的函数，所以图象相同。选C。

**答案：**C

**点评：**1. 定义域、对应关系、值域分别相同的函数有相同的图象，三要素中只要有一项不同，两个函数就不相等。由于值域由定义域与对应关系所确定，所以判断函数是否相等，只要判断定义域与对应关系是否相同即可。

2. 判断对应法则是否相同，可以化简以后再判断，但是必须通过原函数解析式求函数的定义域。

**例题3** 如图，有一块半径为R的半圆形钢板，计划剪裁成等腰梯形ABCD的形状，其下底AB是⊙O的直径，上底CD的端点在圆周上，梯形周长y是否是腰长x的函数？如果是，写出函数关系式，并求出定义域。



**思路导航：**判定两个变量是否构成函数，关键看两个变量之间的对应关系是否满足函数定义。该题中的每一个腰长都能对应唯一的周长值，因此周长y是腰长x的函数。若要用腰长表示周长的关系式，应知等腰梯形各边长，已知下底长为2R，两腰长为2x，因此只需用已知量（半径R）和腰长x把上底表示出来，即可写出周长与腰长的函数关系式。

如上图，AB=2R，C、D在⊙O的半圆周上，设腰长AD=BC=x，作DE⊥AE，垂足为E，连结BD，那么∠ADB是直角，由此Rt△ADE∽Rt△ABD。

∴AD2=AE·AB，即AE=。

∴CD=AB－2AE=2R－。

∴周长y满足关系式

y=2R+2x+（2R－）=－+2x+4R，

即周长y和腰长x间的函数关系式y=－+2x+4R。

∵ABCD是圆内接梯形，∴AD>0，AE>0，CD>0，即解不等式组，得函数y的定义域为{x|0<x<R}。

**答案：**函数关系式为y=，y的定义域为{x|0<x<R}。

**点评：**该题是实际应用问题，解题过程是从实际问题出发，利用函数概念的内涵，判断是否构成函数关系，进而引进数学符号，建立函数关系式，再研究函数关系式的定义域，并结合问题的实际意义作出回答。这个过程实际上就是建立数学模型的最简单的情形。









**（答题时间：15分钟）**

1. 下列四组中f（x），g（x）表示相等函数的是（　　）

A. f（x）＝x，g（x）＝（）2　　　B. f（x）＝x，g（x）＝

C. f（x）＝1，g（x）＝ D. f（x）＝x，g（x）＝|x|

2. 下列函数中，定义域不是**R**的是（　　）

A. y＝kx＋b B. y＝

C. y＝x2－c D. y＝

3. 已知函数f（x）＝2x－3，x∈{1，2，3}，则f（x）的值域为\_\_\_\_\_\_\_\_。

4. 已知函数f（x）＝x2＋x－1.

（1）求f（2），f（），f（a）。

（2）若f（x）＝5，求x.

5. 下列式子中不能表示函数y＝f（x）的是（　　）

A. x＝y2＋1 B. y＝2x2＋1

C. x－2y＝6 D. x＝



1. B 解析：对于A、C，函数定义域不同；对D，两函数对应关系不同。

2. B 解析：选项A、C都是整式函数，符合题意，选项D中，对任意实数x都成立。

3. {－1，1，3} 解析：　当x＝1时，

f（1）＝2×1－3＝－1，

当x＝2时，f（2）＝2×2－3＝1，

当x＝3时，f（3）＝2×3－3＝3，

∴f（x）的值域为{－1，1，3}。

4. 解：（1）f（2）＝22＋2－1＝5，

f（）＝＋－1＝，f（a）＝a2＋a－1.

（2）∵f（x）＝x2＋x－1＝5，

∴x2＋x－6＝0，∴x＝2或x＝－3.

5. A 解析：对于A，

由x＝y2＋1得y2＝x－1.

当x＝5时，

y＝±2，故y不是x的函数；

对B，y＝2x2＋1是二次函数；

对C，x－2y＝6⇒y＝x－3是一次函数；

对D，由x＝得y＝x2（x≥0）是二次函数。故选A.



函数的单调性



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **性 质** | **图 象** | **定 义** |
| **增**  **函**  **数** |  | 设函数f（x）的定义域为I。如果对于定义域I内某个区间D上的任意两个自变量的值x1、x2，当x1＜x2时，都有f（x1）＜f（x2），那么就说函数f（x）在区间D上是增函数。 |
| **减**  **函**  **数** |  | 设函数f（x）的定义域为I。如果对于定义域I内某个区间D上的任意两个自变量的值x1、x2，当x1＜x2时，都有f（x1）＞f（x2），那么就说函数f（x）在区间D上是减函数。 |
| **单调性与单调区间** | | 如果一个函数在某个区间M上是增函数或是减函数，就说这个函数在这个区间M上具有单调性，区间M称为单调区间。 |



**例题1** 利用单调性定义证明：函数f（x）=在其定义域内是增函数。

**思路导航：**本题是利用单调性定义证明函数单调性的一个典型例子，由于函数的定义域没有给出，证明前要先求出定义域，然后证明。

**答案：**证明：证法一：函数f（x）=的定义域是x∈［1，+∞），任取x1、x2∈［1，+∞）且x1＜x2，则f（x2）－f（x1）=－

=。

∵x1、x2∈［1，+∞），且x1＜x2，∴+＞0，x2－x1＞0。

∴f（x1）＜f（x2），即函数f（x）=在其定义域上是增函数。

证法二：函数f（x）=的定义域是x∈［1，+∞］，任取x1、x2∈［1，+∞）且x1＜x2，则，

∵x1、x2∈［1，+∞），且x1＜x2，∴0≤x1－1＜x2－1。

∴0≤＜1。∴＜1。∵f（x2）=＞0，∴f（x1）＜f（x2）。

∴函数f（x）=在其定义域［1，+∞）上是增函数。

**点评：**函数的单调性是在某指定区间上而言的，自变量x的取值必须是连续的。用定义证明函数的单调性的基本步骤是“取值——作差（或作商）——变形——定号——判断”。当函数在给定区间上恒正或恒负时，也常用“作商判1”的方法来解决，特别是函数中含有指数式时常用此法。解决带根号的问题，常用的方法就是将分子、分母有理化。从形式上看是由“－”变成“+”。

**例题2** *f*（*x*）是定义在（ 0，＋∞）上的增函数，且*f*（）= *f*（*x*）－*f*（*y*）

（1）求*f*（1）的值。

（2）若*f*（6）= 1，解不等式 *f*（ *x*＋3 ）－*f*（）＜2。

**思路导航：**（1）利用赋值法，在等式中令x=y=1，则*f*（1）=0。

（2）在等式中令x=36，y=6，则。

故原不等式为：即*f*[*x*（*x*＋3）]＜*f*（36），又*f*（*x*）在（0，＋∞）上为增函数，

故不等式等价于。

**答案**：（1）0 （2）

**点评：**对于这种抽象函数问题，常利用赋值法解题。

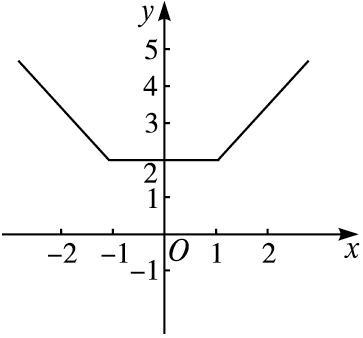
**例题3** 作出函数f（x）=的图象，并指出函数f（x）的单调区间。

**思路导航：**由于所给的函数是两个被开方数和的形式，而被开方数恰能写成完全平方的形式，因此可先去掉根号，转化成分段函数的形式，再作图写出单调区间。

原函数可化为

f（x）==|x+1|+|x－1|=

**答案**：函数的图象如图所示：



所以函数的递减区间是（－∞，－1］，函数的递增区间是［1，+∞）。

**点评：**若所给的函数解析式较为复杂，可先化简函数解析式，作出草图，再根据函数的定义域和图象的直观性写出单调区间。去绝对值的关键是令每一个绝对值等于0，找到分界点，再讨论去绝对值。



**（答题时间：15分钟）**

1. 设f（x）、g（x）都是单调函数，有如下四个命题，其中正确的命题为（ ）

①若f（x）单调递增，g（x）单调递增，则f（x）－g（x）单调递增 ②若f（x）单调递增，g（x）单调递减，则f（x）－g（x）单调递增 ③若f（x）单调递减，g（x）单调递增，则f（x）－g（x）单调递减 ④若f（x）单调递减，g（x）单调递减，则f（x）－g（x）单调递减

A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

2. 已知函数f（x）在［－2，3］上单调，且f（－2）·f（3）<0，则方程f（x）=0在［－2，3］内（ ）

A. 至少有一实根 B. 至多有一实根 C. 没有实根 D. 必有唯一实根

3. 设函数f（x）是（－∞，+∞）上的减函数，则（ ）

A. f（a）>f（2a） B. f（a2）<f（a）

C. f（a2+a）<f（a） D. f（a2+1）<f（a）

4. f（x）是定义在R上的增函数，有下列函数：①y=［f（x）］2是增函数；②y=是减函数；③y=－f（x）是减函数；④y=|f（x）|是增函数。其中错误的结论是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

5. 已知函数f（x）=x2+mx在（－∞，－1）上递减，在［－1，+∞］上递增，则f（x）在［－2，2］上的值域为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

6. 函数y=的单调递减区间是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。

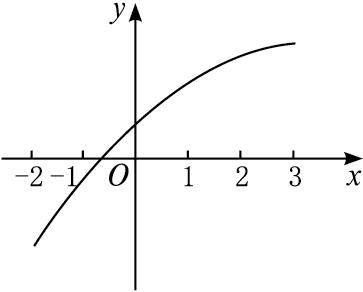
7. 用定义证明y=－x3+1在（－∞，+∞）是递减函数。

8. 求函数y=2x－1－的最大值。



1. C 解析：由函数单调性定义可得：②③正确，也可举反例否定①④命题。

2. D 解析：由于f（x）在［－2，3］上单调，又f（－2）·f（3）<0，∴y=f（x）在［－2，3］上必与x轴有一交点，如下图。故选D。



3. D 解析：∵a2+1－a=（a－）2+>0，

∴a2+1>a。

∵f（x）在（－∞，+∞）上为减函数，

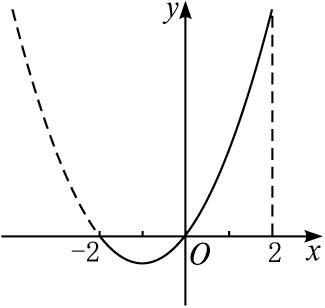
∴f（a2+1）<f（a），选D。

4. ①②④

解析：利用函数的单调性定义判断。

5. ［－1，8］

解析：由条件知：－=－1，∴m=2。



∴f（x）=x2+2x，∴ymin=－1，ymax=f（2）=8。

6. （－∞，－1）和（－1，+∞）

解析：解y==－1+，可得单调递减区间是（－∞，－1）和（－1，+∞）。

7. 证明：设x1<x2∈R，则Δx=x2－x1>0，

Δy=f（x2）－f（x1）=（－x23+1）－（－x13+1）

=x13－x23=（x1－x2）（x12+x1x2+x22）

=（x1－x2）［（x1+）2+x22］。

∵x1－x2=－Δx<0，

（x1+）2≥0，x22≥0且x1≠x2，

∴（x1+）2+x22>0，

∴Δy<0，即函数f（x）=－x3+1在（－∞，+∞）上是递减函数。

8. 解法一：∵令t=（t≥0），则x=，∴y=－1－t=－－t+=－（t+1）2+6。

∵t≥0，∴y=－（t+1）2+6在［0，+∞］上为减函数，

∴当t=0时，y有最大值。

解法二：函数的定义域为（－∞，）。

∵2x－1在（－∞，）上递增，在（－∞，）上递减，

∴y=2x－1－在（－∞，）上为增函数。

∴当x=时，y有最大值。



函数的奇偶性



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **性 质** | **定 义** |
| **偶函数** | 图象关于y轴对称；  定义域关于原点对称。 | 如果对于函数f（x）的定义域内任意一个x，都有f（－x）=f（x），那么函数f（x）就叫偶函数 |
| **奇函数** | 图象关于原点对称；定义域关于原点对称；定义域中有零，则其图象必过原点，即f（0）=0。 | 如果对于函数f（x）的定义域内任意一个x，都有f（－x）=－f（x），那么函数f（x）就叫奇函数 |

**注意：**

在公共定义域内，

（1）奇函数与奇函数之积是偶函数；

（2）奇函数与偶函数之积是奇函数；

（3）偶函数与偶函数之积是偶函数；

（4）奇函数与奇函数的和（差）是奇函数；

（5）偶函数与偶函数的和（差）是偶函数。



**例题1** 已知f（x）是偶函数，且在（0，+∞）上是减函数，判断f（x）在（－∞，0）上是增函数还是减函数，并加以证明。

**思路导航**：利用函数奇偶性及图象特征比较容易对函数单调性进行判断，但是证明单调性必须用定义证明。

**答案：**f（x）在（－∞，0）上是增函数。证明如下：

设x1<x2<0，－x1>－x2>0，

∴f（－x1）<f（－x2）。

由于f（x）是偶函数，因此f（－x1）=f（x1），f（－x2）=f（x2）。

∴f（x1）<f（x2），即f（x）在（－∞，0）上是增函数。

**点评：**利用函数的奇偶性研究关于原点对称区间上的问题，需特别注意求解哪个区间的问题，就设哪个区间的变量，然后利用函数的奇偶性转到已知区间上去，进而利用已知去解决问题。

**例题2** 若f（x）是定义在**R**上的奇函数，当x＜0时，f（x）=x（1－x），求当x≥0时，函数f（x）的解析式。

**思路导航：**将x＜0时f（x）的解析式转化到x＞0的区间上，这是解决本题的关键。

由于f（x）是奇函数，当x＞0时，f（x）=－f（x）=－{（－x）［1－（－x）］}=x（1+x）；

当x=0时，f（0）=－f（0），即f（0）=0。

∴当x≥0时，f（x）=x（1+x）。

**答案：**当x≥0时，f（x）=x（1+x）

**点评：**判断分段函数的奇偶性时，应对x在各个区间上分别讨论，由x的取值范围确定相应的函数表达式，最后要综合得出在定义域内总有f（－x）=f（x）或f（－x）=－f（x），从而判定其奇偶性。

**例题3**  设f（x）在**R**上是偶函数，在区间（－∞，0）上递增，且有f（2a2+a+1）＜f（3a2－2a+1），求a的取值范围。

**思路导航：**要求a的取值范围，就要列关于a的不等式（组），因而利用函数的单调性、奇偶性化“抽象的不等式”为“具体的代数式”是关键。

**答案：**由f（x）在**R**上是偶函数，在区间（－∞，0）上递增知f（x）在（0，+∞）上递减。

∵2a2+a+1=2（a+）2+＞0，3a2－2a+1=3（a－）2+＞0，

且f（2a2－2a+1）＜f（3a2－2a+1），

∴2a2+a+1＞3a2－2a+1，

即a2－3a＜0。

解得0＜a＜3。

**点评：**该例题在求解过程中，要注意利用偶函数的对称性，一侧递增，一侧递减。



复合函数的性质与构成它的函数的性质密切相关，其规律可列表如下：

（1）若函数*f*（*x*）、*g*（*x*）、*f*［*g*（*x*）］的定义域都是关于原点对称的，那么由*u*=*g*（*x*），*y*=*f*（*u*）的奇偶性得到*y*=*f*［*g*（*x*）］的奇偶性的规律如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 函数 | 奇偶性 | | | |
| *u*=*g*（*x*） | 奇函数 | 奇函数 | 偶函数 | 偶函数 |
| *y*=*f*（*u*） | 奇函数 | 偶函数 | 奇函数 | 偶函数 |
| *y*=*f*［g（*x*）］ | 奇函数 | 偶函数 | 偶函数 | 偶函数 |

即当且仅当*u*=*g*（*x*）和*y*=*f*（*u*）都是奇函数时，复合函数*y*=*f*［*g*（*x*）］是奇函数。

（2）若函数*u*=*g*（*x*）在区间［*a*，*b*］上是单调函数，函数*y*=*f*（*u*）在［*g*（*a*），*g*（*b*）］或［*g*（*b*），*g*（*a*）］上也是单调函数，那么复合函数*y*=*f*［*g*（*x*）］在区间［*a*，*b*］上是单调函数，其单调性规律如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 函数 | 单调性 | | | |
| *u*=*g*（*x*） | 增函数 | 增函数 | 减函数 | 减函数 |
| *y*=*f*（*u*） | 增函数 | 减函数 | 增函数 | 减函数 |
| *y*=*f*［*g*（*x*）］ | 增函数 | 减函数 | 减函数 | 增函数 |

即当*u*=*g*（*x*），*y*=*f*（*u*）增减性相同时，*y*=*f*［*g*（*x*）］为增函数；增减性相反时，*y*=*f*［*g*（*x*）］为减函数。



**（答题时间：15分钟）**

1. 下列命题中错误的是（　　）

①图象关于原点成中心对称的函数一定为奇函数

②奇函数的图象一定过原点

③偶函数的图象与*y*轴一定相交

④图象关于*y*轴对称的函数一定为偶函数

A. ①②　　　　　　　 B. ③④

C. ①④ D. ②③

2. 已知*f*（*x*）＝*x*7＋*ax*5＋*bx*－5，且*f*（－3）＝5，则*f*（3）＝（　　）

A. －15 B. 15

C. 10 D. －10

3. 已知偶函数*f*（*x*）在区间[0，＋∞）单调递增，则满足*f*（2*x*－1）<*f*的*x*取值范围是（　　）

A. B.

C. ` D.

4. 若*f*（*x*）＝*ax*2＋*bx*＋*c*（*a*≠0）为偶函数，则*g*（*x*）＝*ax*3＋*bx*2＋*cx*的奇偶性为\_\_\_\_\_\_\_\_。

5. 已知*f*（*x*）是偶函数，*g*（*x*）是奇函数，且*f*（*x*）＋*g*（*x*）＝*x*2＋*x*－2，求*f*（*x*），*g*（*x*）的表达式。

6. 函数*f*（*x*）＝是定义在（－1，1）上的奇函数，且*f*＝，求函数*f*（*x*）的解析式。

7. 定义在（－1，1）上的奇函数*f*（*x*）是减函数，且*f*（1－*a*）＋*f*（1－*a*2）<0，求实数*a*的取值范围。



1. D

解析：*f*（*x*）＝为奇函数，其图象不过原点，故②错；*y*＝为偶函数，其图象与*y*轴不相交，故③错。

2. A

解析：解法1：*f*（－3）＝（－3）7＋*a*（－3）5＋（－3）*b*－5＝－（37＋*a*·35＋3*b*－5）－10＝－*f*（3）－10＝5，

∴*f*（3）＝－15.

解法2：设*g*（*x*）＝*x*7＋*ax*5＋*bx*，则*g*（*x*）为奇函数，

∵*f*（－3）＝*g*（－3）－5＝－*g*（3）－5＝5，

∴*g*（3）＝－10，∴*f*（3）＝*g*（3）－5＝－15.

3. A

解析：由题意得|2*x*－1|<，－<2*x*－1<

<2*x*<，<*x*<，∴选A.

4. 奇函数

解析：由*f*（*x*）＝*ax*2＋*bx*＋*c*（*a*≠0）为偶函数得*b*＝0，因此*g*（*x*）＝*ax*3＋*cx*，∴*g*（－*x*）＝－*g*（*x*），

∴*g*（*x*）是奇函数。

5. *f*（*x*）＝*x*2－2，*g*（*x*）＝*x*.

解析：*f*（－*x*）＋*g*（－*x*）＝*x*2－*x*－2，由*f*（*x*）是偶函数，*g*（*x*）是奇函数得，*f*（*x*）－*g*（*x*）＝*x*2－*x*－2

又*f*（*x*）＋*g*（*x*）＝*x*2＋*x*－2，两式联立得：

*f*（*x*）＝*x*2－2，*g*（*x*）＝*x*。

6. *f*（*x*）＝。

解析：因为*f*（*x*）是奇函数且定义域为（－1，1），

所以*f*（0）＝0，即*b*＝0.

又*f*＝，所以＝，

所以*a*＝1，所以*f*（*x*）＝。

7. {*a*|0<*a*<1}

解析：由*f*（1－*a*）＋*f*（1－*a*2）<0及*f*（*x*）为奇函数得，*f*（1－*a*）<*f*（*a*2－1），

∵*f*（*x*）在（－1，1）上单调减，

∴　解得0<*a*<1.

故*a*的取值范围是{*a*|0<*a*<1}。