**第11讲函数与方程**





1*.*函数的零点

(1)函数零点的定义

对于函数*y=f*(*x*)(*x*∈*D*),把使的实数*x*叫作函数*y=f*(*x*)(*x*∈*D*)的零点*.*

(2)等价关系

方程*f*(*x*)*=*0有实数根⇔函数*y=f*(*x*)的图像与有交点⇔函数*y=f*(*x*)有*.*

(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

如果函数*y=f*(*x*)在区间[*a*,*b*]上的图像是连续不断的一条曲线,并且有,那么函数*y=f*(*x*)在区间内有零点,即存在*c*∈(*a*,*b*),使得,这个也就是方程*f*(*x*)*=*0的根*.*

2*.*二次函数*y=ax*2*+bx+c*(*a>*0)的图像与零点的关系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Δ>*0 | *Δ=*0 | *Δ<*0 |
| 二次函数*y=*  *ax*2*+bx+*  *c*(*a>*0)  的图像 |  |  |  |
| 与*x*轴的交点 |  |  | 无交点 |
| 零点个数 |  |  |  |

常用结论

1*.*在区间*D*上单调的函数在该区间内至多有一个零点*.*

2*.*周期函数如果存在零点,则必有无穷个零点*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=*ln *x+*2*x-*6的零点的个数是*.*

2*.***[**教材改编**]** 如果函数*f*(*x*)*=*e*x-*1*+*4*x-*4的零点在区间(*n*,*n+*1)(*n*为整数)内,则*n=　　　　.*

3*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=x*3*-*2*x*2*+x*的零点是*.*

4*.***[**教材改编**]** 若函数*f*(*x*)*=x*2*-*4*x+a*存在两个不同的零点,则实数*a*的取值范围是*.*

题组二常错题

◆索引:错用零点存在性定理;误解函数零点的定义;忽略限制条件;二次函数在R上无零点的充要条件(判别式小于零)*.*

5*.*函数*f*(*x*)*=x+*的零点个数是*.*

6*.*函数*f*(*x*)*=x*2*-*3*x*的零点是*.*

7*.*若二次函数*f*(*x*)*=x*2*-*2*x+m*在区间(0,4)上存在零点,则实数*m*的取值范围是*.*

8*.*若二次函数*f*(*x*)*=x*2*+kx+k*在R上无零点,则实数*k*的取值范围是*.*



id:2147498802;FounderCES探究点一函数零点所在区间的判断

例1 (1)函数*f*(*x*)*=*e*x-x-*2在下列哪个区间上必有零点 ()

A*.*(*-*1,0) B*.*(0,1)

C*.*(1,2) D*.*(2,3)

(2)已知函数*f*(*x*)*=*lg *x+x-*5在区间(*n*,*n+*1)(*n*∈Z)上存在零点,则*n=　　　　.*

[总结反思] 判断函数零点所在区间的方法:(1)解方程法,当对应方程易解时,可直接解方程;(2)零点存在性定理;(3)数形结合法,画出相应函数图像,观察与*x*轴交点来判断,或转化为两个函数的图像在所给区间上是否有交点来判断*.*

变式题 **[**2018·南昌模拟**]** 函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)*-*的零点所在的区间为()

A*.*(0,1) B*.*(1,2) C*.*(2,3) D*.*(3,4)

id:2147498816;FounderCES探究点二函数零点个数的讨论

例2 (1)已知*f*(*x*)是定义在R上的奇函数,且满足*f**-+x**=f*,当*x*∈时,*f*(*x*)*=*ln(*x*2*-x+*1),则函数*f*(*x*)在区间[0,6]上的零点个数是 ()

A*.*3 B*.*5 C*.*7 D*.*9

(2)**[**2018·河南中原名校模拟**]** 函数*f*(*x*)*=*sin2*x+**-*log3π*x*的零点个数为*.*

[总结反思] 函数零点个数的讨论,基本解法有:(1)直接法,令*f*(*x*)*=*0,有多少个解则有多少个零点;(2)定理法,利用定理时往往还要结合函数的单调性、奇偶性等;(3)图像法,一般是把函数分拆为两个简单函数,依据两函数图像的交点个数得出函数的零点个数*.*

变式题 (1)**[**2018·重庆巴蜀中学月考**]** 函数*f*(*x*)*=-*2e*-x*的零点个数为 ()

A*.*0 B*.*1 C*.*2 D*.*3

(2)已知函数*f*(*x*)*=*则函数*g*(*x*)*=*[*f*(*x*)]2*-*3*f*(*x*)*+*2的零点个数为*.*

id:2147498823;FounderCES探究点三函数零点的应用

例3 (1)设函数*f*(*x*)*=*e*x+x-*2,*g*(*x*)*=*ln *x+x*2*-*3,若实数*a*,*b*满足*f*(*a*)*=g*(*b*)*=*0,则 ()

A*.f*(*b*)*<*0*<g*(*a*) B*.g*(*a*)*<*0*<f*(*b*)

C*.*0*<g*(*a*)*<f*(*b*) D*.f*(*b*)*<g*(*a*)*<*0

(2)**[**2019·安徽肥东高级中学调研**]** 已知函数*f*(*x*)*=*若函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-m*(*x-*1)有两个零点,则实数*m*的取值范围是 ()

A*.*(*-*2,0) B*.*(*-*1,0)

C*.*(*-*2,0)∪(0,*+∞*) D*.*(*-*1,0)∪(0,*+∞*)

[总结反思] 函数零点的应用主要体现在三类问题中:一是函数中不含参数,零点又不易直接求出,考查各零点的和或范围问题;二是函数中含有参数,根据零点情况求函数中参数的范围;三是函数中有参数,但不求参数,仍是考查零点的范围问题*.*这三类问题一般是通过数形结合或分离参数求解*.*

变式题 (1)**[**2018·山东、湖北部分重点中学二模**]** 若函数*f*(*x*)*=*cos *x+*2*|*cos *x|-m*,*x*∈[0,2π]恰有两个零点,则*m*的取值范围为 ()

A*.*(0,1] B*.*{1}

C*.*{0}∪(1,3] D*.*[0,3]

(2)若*x*1,*x*2分别是函数*f*(*x*)*=x-*2*-x*,*g*(*x*)*=x*log2*x-*1的零点,则下列结论成立的是 ()

A*.x*1*=x*2 B*.x*1*>x*2

C*.x*1*+x*2*=*1 D*.x*1*x*2*=*1

第11讲函数与方程

考试说明 结合二次函数的图像,了解函数的零点与方程根的联系,判断一元二次方程根的存在性及根的个数*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)*f*(*x*)*=*0(2)*x*轴零点(3)*f*(*a*)·*f*(*b*)*<*0(*a*,*b*)*f*(*c*)*=*0*c*

2*.*(*x*1,0),(*x*2,0)(*x*1,0)210

对点演练

1*.*1[解析] 函数*f*(*x*)单调递增,且*f*(2)*<*0,*f*(3)*>*0,故存在唯一零点*.*

2*.*0[解析] 函数*f*(*x*)单调递增,且*f*(0)*<*0,*f*(1)*>*0,故其零点在区间(0,1)内,则*n=*0*.*

3*.*0,1[解析] 由*f*(*x*)*=x*3*-*2*x*2*+x=*0,解得*x*1*=*0,*x*2*=*1,所以函数的零点是0,1*.*

4*.*(*-∞*,4)[解析] *Δ=*16*-*4*a>*0,解得*a<*4*.*

5*.*0[解析] 函数的定义域为{*x|x*≠0},当*x>*0时,*f*(*x*)*>*0,当*x<*0时,*f*(*x*)*<*0,所以函数没有零点*.*

6*.*0,3[解析] 由*f*(*x*)*=x*2*-*3*x=*0,得*x=*0或*x=*3*.*

7*.*(*-*8,1][解析] 二次函数*f*(*x*)图像的对称轴方程为*x=*1*.*若在区间(0,4)上存在零点,只需*f*(1)≤0且*f*(4)*>*0即可,即*-*1*+m*≤0且8*+m>*0,解得*-*8*<m*≤1*.*

8*.*(0,4)[解析] *Δ=k*2*-*4*k<*0,解得0*<k<*4*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)利用零点存在性定理判断即可;(2)利用函数的单调性和零点存在性定理即可求出*n.*

(1)C(2)3[解析] (1)*f*(*-*1)*=-*1*<*0,*f*(0)*=-*1*<*0,*f*(1)*=*e*-*3*<*0,*f*(2)*=*e2*-*4*>*0,故选C*.*

(2)*f*(*x*)*=*lg *x+x-*5是定义在(0,*+∞*)上的增函数,

根据零点存在性定理,

可得因为*f*(1)*=-*5*<*0,*f*(2)*=*lg 2*+-*5*<*0,*f*(3)*=*lg 3*+-*5*<*0,*f*(4)*=*lg 4*+*5*-*5*=*lg 4*>*0,

所以函数*f*(*x*)在(3,4)上存在零点,故*n=*3*.*

变式题B[解析] *f*(*x*)*=*ln(*x+*1)*-*在(0,*+∞*)上单调递增,且*f*(1)*=*ln 2*-*2*<*0,*f*(2)*=*ln 3*->*0,则*f*(1)·*f*(2)*<*0,所以函数*f*(*x*)*=*ln(*x+*1)*-*的零点所在的区间为(1,2)*.*

例2[思路点拨] (1)由已知可得函数是奇函数,周期为3,且*f=f*(*-*1)*=f*(0)*=f*(1)*=f=*0,即可得函数*f*(*x*)在区间[0,6]上的零点个数;(2)函数*f*(*x*)*=*sin*-*log3π*x*的零点个数即为*y=*log3π*x*与*y=*cos 2*x*(*x>*0)图像的交点个数,利用数形结合可得结果*.*

(1)D(2)6[解析] (1)*∵f*(*x*)是定义在R上的奇函数,且满足*f=f*,*∴f**-+x+**=f**+x+*,可得*f*(*x+*3)*=f*(*x*),

则函数*f*(*x*)的周期为3*.*

当*x*∈时,*f*(*x*)*=*ln(*x*2*-x+*1),

令*f*(*x*)*=*0,则*x*2*-x+*1*=*1,解得*x=*0(舍去)或1,

又*∵*函数*f*(*x*)是定义域为R的奇函数,

*∴*在区间上,有*f*(*-*1)*=-f*(1)*=*0,*f*(0)*=*0*.*

由*f=f*,取*x=*0,得*f=f*,又*f=-f*,*∴f=f=*0,

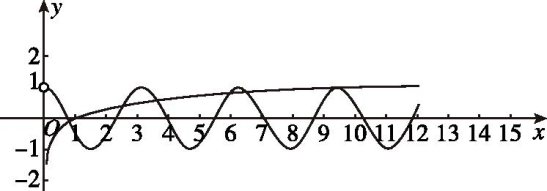
*∴f=f*(*-*1)*=f*(0)*=f*(1)*=f=*0*.*

又*∵*函数*f*(*x*)是周期为3的周期函数,

*∴*函数*f*(*x*)在区间[0,6]上的零点有0,1,,2,3,4,,5,6,共9个*.*

(2)函数*f*(*x*)*=*sin*-*log3π*x=*cos 2*x-*log3π*x*的零点个数就是*y=*log3π*x*与*y=*cos 2*x*(*x>*0)图像的交点个数*.*

在同一坐标系内作出*y=*log3π*x*与*y=*cos 2*x*(*x>*0)的图像,如图,



由图可知,*y=*log3π*x*与*y=*cos 2*x*(*x>*0)的图像有6个交点,

所以函数*f*(*x*)*=*sin*-*log3π*x*的零点个数为6*.*

变式题(1)B(2)3[解析] (1)*∵y=*单调递增,*y=-*2e*-x*单调递增,

*∴f*(*x*)*=-*2e*-x*单调递增*.*

*∵f*(0)*=-*2*<*0,*f*(8)*=*2*->*0,

*∴*由零点存在性定理可得,*f*(*x*)*=-*2e*-x*的零点个数为1,故选B*.*

(2)函数*g*(*x*)*=*[*f*(*x*)]2*-*3*f*(*x*)*+*2的零点个数即为方程[*f*(*x*)]2*-*3*f*(*x*)*+*2*=*0的解的个数,解方程得*f*(*x*)*=*1或*f*(*x*)*=*2*.*由*f*(*x*)*=*1得ln *x=*1(*x>*0)或e*x=*1(*x*≤0),解得*x=*e或*x=*0;同理,由*f*(*x*)*=*2得ln *x=*2(*x>*0)或e*x=*2(*x*≤0),解得*x=*e2*.*所以函数*g*(*x*)共有3个零点*.*

例3[思路点拨] (1)首先确定函数*f*(*x*)和*g*(*x*)的单调性,然后结合函数的性质计算即可;(2)先转化为函数*y=f*(*x*)的图像与*y=m*(*x-*1)的图像有且仅有两个交点,数形结合即可得答案*.*

(1)B(2)D[解析] (1)易知*f*(*x*)是增函数,*g*(*x*)在(0,*+∞*)上也是增函数*.*

由于*f*(0)*=-*1*<*0,*f*(1)*=*e*-*1*>*0,所以0*<a<*1*.*

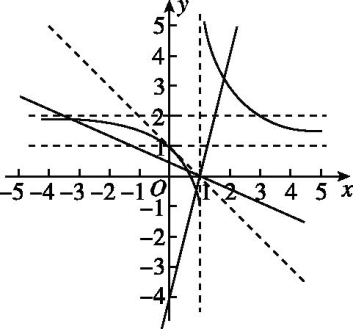
又*g*(1)*=-*2*<*0,*g*(2)*=*ln 2*+*1*>*0,所以1*<b<*2,

所以*f*(*b*)*>f*(1)*>*0,*g*(*a*)*<g*(1)*<*0,据此可知*g*(*a*)*<*0*<f*(*b*)*.*

(2)若函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-m*(*x-*1)有两个零点,

则函数*y=f*(*x*)的图像与*y=m*(*x-*1)的图像有且仅有两个交点*.*

在同一坐标系内画出函数*y=f*(*x*)的图像与*y=m*(*x-*1)的图像,如图所示*.*

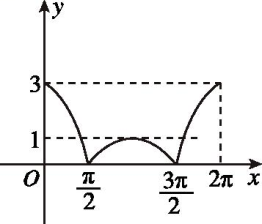


由图像可得,当*m>*0时,满足条件;

当*m=-*1时,直线*y=m*(*x-*1)与*y=*2*-*e*x*(*x*≤1)的图像相切,可得当*-*1*<m<*0时,满足条件*.*

故*m*∈(*-*1,0)∪(0,*+∞*)*.*

变式题(1)C(2)D



[解析] (1)*f*(*x*)*=*cos *x+*2*|*cos *x|-m*,*x*∈[0,2π]的零点个数就是*y=*cos *x+*2*|*cos *x|=*的图像与*y=m*的图像的交点个数*.*作出*y=*cos *x+*2*|*cos *x|*,*x*∈[0,2π]的图像,如图,由图像可知,当*m=*0或1*<m*≤3时,函数*y=*cos *x+*2*|*cos *x|*,*x*∈[0,2π]的图像与*y=m*的图像有两个交点,即函数*f*(*x*)*=*cos *x+*2*|*cos *x|-m*,*x*∈[0,2π]恰有两个零点,故*m*的取值范围为{0}∪(1,3],故选C*.*

(2)因为*f*(0)≠0,所以*x*1≠0*.*

当*x*≠0时,由*x-*2*-x=*0,得2*x=*,

则*x*1就是曲线*y=*与曲线*y=*2*x*交点的横坐标*.*

由*x*log2*x-*1*=*0,得log2*x=*,

则*x*2就是曲线*y=*(*x>*0)与曲线*y=*log2*x*交点的横坐标*.*

因为曲线*y=*关于直线*y=x*对称,

且曲线*y=*2*x*与曲线*y=*log2*x*关于直线*y=x*对称,

所以点与点关于直线*y=x*对称,

所以*=-*1,

可得*x*1*x*2*=*1,故选D*.*



【备选理由】 例1考查将函数的零点问题转化为两函数图像的交点问题,通过分析交点横坐标得零点所在区间;例2结合函数的奇偶性、周期性,考查函数的零点个数,需要数形结合处理,综合性强;例3为有关方程的解的问题,考查换元法、数形结合思想等*.*

例1[配合例1使用] **[**2018·运城二模**]** 已知*x*0是函数*f*(*x*)*=*2sin *x-*πln *x*(*x*∈(0,π))的零点,则 ()

A*.x*0∈(0,1) B*.x*0∈(1,e)

C*.x*0∈(e,3) D*.x*0∈(e,π)

[解析] B设*h*(*x*)*=*2sin *x*(*x*∈(0,π)),*g*(*x*)*=*πln *x*(*x*∈(0,π)),则*g*(1)*=*0,*g*(e)*=*π*>*2,作出函数*h*(*x*)与*g*(*x*)的图像(图略)可知,交点在区间(1,e)内,即*x*0∈(1,e)*.*

例2[配合例2使用] **[**2018·茂名模拟**]** 已知定义在R上的函数*y=f*(*x+*2)的图像关于直线*x=-*2对称,且函数*f*(*x+*1)是偶函数*.*若当*x*∈[0,1]时,*f*(*x*)*=*sin*x*,则函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-*e*-|x|*在区间[*-*2018,2018]上的零点个数为 ()

A*.*2017 B*.*2018

C*.*4034 D*.*4036

[解析] D函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-*e*-|x|*在区间[*-*2018,2018]上的零点个数,就是*y=f*(*x*)的图像与*y=*e*-|x|*的图像在区间[*-*2018,2018]上的交点个数*.*

*∵*函数*y=f*(*x+*2)的图像关于直线*x=-*2对称,

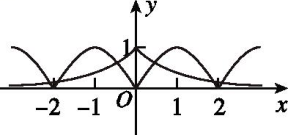
*∴*函数*y=f*(*x*)的图像的对称轴为直线*x=*0,故*y=f*(*x*)是偶函数,即*f*(*-x*)*=f*(*x*)*.*

又函数*f*(*x+*1)是偶函数,

*∴f*(*x+*1)*=f*(*-x+*1),

故*f*(*x+*2)*=f*(*-x*)*=f*(*x*),

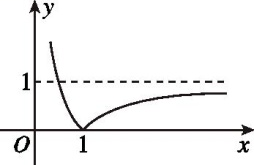
*∴*函数*f*(*x*)是周期为2的偶函数*.*



又当*x*∈[0,1]时,*f*(*x*)*=*sin*x*,画出*y=f*(*x*)与*y=*的部分图像如图所示,

由图像可知,在每个周期内两函数的图像有2个交点,

*∴*函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-*e*-|x|*在区间[*-*2018,2018]上的零点个数为2018*×*2*=*4036*.*故选D*.*



例3[配合例3使用] 函数*y=g*(*x*)(*x*∈R)的图像如图所示,若关于*x*的方程[*g*(*x*)]2*+m*·*g*(*x*)*+*2*m+*3*=*0有三个不同的实数解,则*m*的取值范围是*.*

[答案]

[解析] 设*g*(*x*)*=t*,

*∵*关于*x*的方程[*g*(*x*)]2*+m·g*(*x*)*+*2*m+*3*=*0有三个不同的实数解,

*∴*关于*t*的方程*t*2*+mt+*2*m+*3*=*0有两个实数根,且一个在(0,1)上,一个在[1,*+∞*)上*.*

设*h*(*t*)*=t*2*+mt+*2*m+*3,

*①*当有一个根为1时,*h*(1)*=*1*+m+*2*m+*3*=*0,解得*m=-*,此时另一个根为,符合题意;

*②*当没有根为1时,则解得*-<m<-.*

综上可得,*m*的取值范围是*.*