**第12讲函数模型及其应用**





1*.*三种函数模型的性质的比较

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数  性质 | *y=ax*(*a>*1) | *y=*log*ax*(*a>*1) | *y=xn*(*n>*0) |
| 在(0,*+∞*)  上的增减性 | 单调 | 单调 | 单调 |
| 增长速度 | 越来越快 | 越来越慢 | 相对平稳 |

2*.*常见的函数模型

|  |  |
| --- | --- |
| 函数模型 | 函数解析式 |
| 一次函数模型 | *f*(*x*)*=ax+b*(*a*,*b*为常数,*a*≠0) |
| 二次函数模型 | *f*(*x*)*=ax*2*+bx+c*(*a*,*b*,*c*为常数,*a*≠0) |
| 反比例函数模型 | *f*(*x*)*=+b*(*k*,*b*为常数且*k*≠0) |
| 指数函数模型 | *f*(*x*)*=bax+c*(*a*,*b*,*c*为常数,*a>*0且*a*≠1,*b*≠0) |
| 对数函数模型 | *f*(*x*)*=b*log*ax+c*(*a*,*b*,*c*为常数,*a>*0且*a*≠1,*b*≠0) |
| 幂函数模型 | *f*(*x*)*=axα+b*(*a*,*b*,*α*为常数,*a*≠0,*α*≠0) |

常用结论

1*.*函数*f*(*x*)*=+*(*a>*0,*b>*0,*x>*0)在区间(0,]上单调递减,在区间[,*+∞*)上单调递增*.*

2*.*直线上升、对数缓慢、指数爆炸*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 函数模型*y*1*=*0*.*25*x*,*y*2*=*log2*x+*1,*y*3*=*1*.*002*x*,随着*x*的增大,增长速度的大小关系是*.*(填关于*y*1,*y*2,*y*3的关系式)

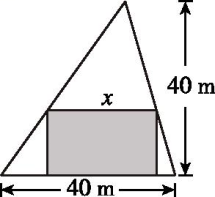


图2*-*12*-*1

2*.***[**教材改编**]** 在如图2*-*12*-*1所示的锐角三角形空地中,欲建一个面积不小于300 m2的内接矩形花园(阴影部分),则其边长*x*(单位:m)的取值范围是*.*

3*.***[**教材改编**]** 某车间分批生产某种产品,每批的生产准备费用为800元*.*若每批生产*x*件,则平均仓储时间为天,且每件产品每天的仓储费用为1元*.*把平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和*S*表示为*x*的函数是*.*

4*.***[**教材改编**]** 已知某物体的温度*Q*(单位:摄氏度)随时间*t*(单位:分钟)的变化规律为*Q=m*·2*t+*21*-t*(*t*≥0,且*m>*0)*.*若物体的温度总不低于2摄氏度,则*m*的取值范围是*.*

题组二常错题

◆索引:审题不清致错;忽视限制条件;忽视实际问题中实际量的单位、含义、范围等;分段函数模型的分界把握不到位*.*

5*.*一枚炮弹被发射后,其升空高度*h*与时间*t*的函数关系式为*h=*130*t-*5*t*2,则该函数的定义域是*.*

6*.*某物体一天中的温度*T*是关于时间*t*的函数,且*T=t*3*-*3*t+*60,时间单位是小时,温度单位是℃,当*t=*0时表示中午12:00,其后*t*值为正,则上午8时该物体的温度是*.*

7*.*在不考虑空气阻力的情况下,火箭的最大速度*v*(米*/*秒)关于燃料的质量*M*(千克)、火箭(除燃料外)的质量*m*(千克)的函数关系式是*v=*2000·ln*.*当燃料质量是火箭质量的倍时,火箭的最大速度可达12千米*/*秒*.*

8*.*已知*A*,*B*两地相距150千米,某人开汽车以60千米*/*小时的速度从*A*地到达*B*地,在*B*地停留1小时后再以50千米*/*小时的速度返回*A*地,则汽车离开*A*地的距离*S*(千米)关于时间*t*(小时)的函数表达式是*.*



id:2147498895;FounderCES探究点一一次、二次函数模型

例1 某公司为提高员工的综合素质,聘请专业机构对员工进行专业技术培训,其中培训机构费用成本为12 000元*.*公司每位员工的培训费用按以下方式与该机构结算:若公司参加培训的员工人数不超过30人,则每人的培训费用为850元;若公司参加培训的员工人数多于30人,则给予优惠,每多一人,培训费减少10元,但参加培训的员工人数最多为70*.*已知该公司最多有60位员工可参加培训,设参加培训的员工人数为*x*,每位员工的培训费为*y*元,培训机构的利润为*Q*元*.*

(1)写出*y*与*x*(*x>*0,*x*∈N*\**)之间的函数关系式*.*

(2)当公司参加培训的员工有多少人时,培训机构可获得最大利润?并求出最大利润*.*

[总结反思] 在建立二次函数模型解决实际问题中的最优问题时,一定要注意自变量的取值范围,即函数的定义域,解决函数应用问题时,最后还要还原到实际问题中*.*

变式题 整改校园内一块长为15 m,宽为11 m的长方形草地(如图2*-*12*-*2),将长减少1 m,宽增加1 m,问草地面积是增加了还是减少了?假设长减少*x* m,宽增加*x* m(*x>*0),试研究以下问题:

*x*取什么值时,草地面积减少?*x*取什么值时,草地面积增加?

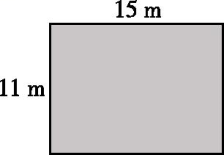


图2*-*12*-*2

id:2147498909;FounderCES探究点二指数、对数函数模型

例2 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上,游回产地产卵*.*记鲑鱼的游速为*v* m/s,鲑鱼的耗氧量的单位数为*x*,研究中发现*v*与log3(*x*≥100)成正比,且当*x=*300时,*v=.*

(1)求出*v*关于*x*的函数解析式*.*

(2)计算一条鲑鱼的游速是 m/s时耗氧量的单位数*.*

(3)当鲑鱼的游速增加1 m/s时,其耗氧量是原来的几倍?

[总结反思] 与指数函数、对数函数两类函数模型有关的实际问题,在求解时,要先学会合理选择模型*.*(1)在两类函数模型中,指数函数模型是增长速度越来越快(底数大于1)的一类函数模型*.*(2)在解决这两类函数模型时,一般先要通过待定系数法确定函数解析式,再借助函数的图像求解最值问题*.*

变式题 将甲桶中的*a* L水缓慢注入空桶乙中,*t* min后甲桶中剩余的水量符合指数衰减曲线*y=a*e*nt.*假设过5 min后甲桶和乙桶中的水量相等,若再过*m* min后甲桶中的水只有 L,则*m*的值为 ()

A*.*5 B*.*8

C*.*9 D*.*10

id:2147498916;FounderCES探究点三分段函数模型

例3 某群体的人均通勤时间是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时,某地上班族*S*中的成员仅以自驾或公交方式通勤*.*分析显示:当*S*中*x*%(0*<x<*100)的成员自驾时,自驾群体的人均通勤时间(单位:分钟)为*f*(*x*)*=*而公交群体的人均通勤时间不受*x*影响,恒为40分钟*.*试根据上述分析结果回答下列问题:

(1)当*x*在什么范围内时,公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2)求该地上班族*S*的人均通勤时间*g*(*x*)的表达式,讨论*g*(*x*)的单调性,并说明其实际意义*.*

[总结反思] (1)某些实际问题中的变量关系不能用同一个关系式给出,而是由几个不同的关系式构成,所以应建立分段函数模型;(2)构建分段函数时,要力求准确、简捷、合理、不重不漏;(3)分段函数的最值是各段最大值(或最小值)中的最大值(或最小值)*.*

变式题 某科研小组研究发现:一棵水果树的产量*w*(单位:百千克)与肥料费用*x*(单位:百元)满足如下关系式:*w=*此外,还需要投入其他成本(如施肥的人工费等)2*x*百元*.*已知这种水果的市场售价为16元*/*千克(即16百元*/*百千克),且市场需求始终供不应求*.*记该棵水果树获得的利润为*L*(*x*)(单位:百元)*.*

(1)求*L*(*x*)的函数表达式*.*

(2)当投入的肥料费用为多少时,该棵水果树获得的利润最大?最大利润是多少?

第12讲函数模型及其应用

考试说明 1*.*了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征,知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义*.*

2*.*了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*递增递增递增

对点演练

1*.y*3*>y*1*>y*2[解析] 根据指数函数、一次函数、对数函数的增长速度关系可得*.*

2*.*[10,30][解析] 设矩形的另一边长为*y* m,由相似三角形的性质可得*=*(0*<x<*40),解得*y=*40*-x*(0*<x<*40),

*∴*矩形的面积*S=x*(40*-x*)*.*

*∵*矩形花园的面积不小于300 m2,*∴x*(40*-x*)≥300,即(*x-*10)(*x-*30)≤0,

解得10≤*x*≤30,满足0*<x<*40,

故其边长*x*(单位:m)的取值范围是[10,30]*.*

3*.S=+*[解析] 由题意知,每件产品的生产准备费用是元,仓储费用是元,所以每件产品的生产准备费用与仓储费用之和*S=+.*

4*.*[解析] 物体的温度总不低于2摄氏度,即*Q*≥2恒成立,

即*m*·2*t+*≥2恒成立,即*m*≥2恒成立*.*

令*=x*,则0*<x*≤1,*m*≥2(*x-x*2),

由于当0*<x*≤1时,*x-x*2≤,所以*m*≥*.*

因此,当物体的温度总不低于2摄氏度时,*m*的取值范围是*.*

5*.*[0,26][解析] 令*h*≥0,解得0≤*t*≤26,故所求定义域为[0,26]*.*

6*.*8 ℃[解析] 由题意知,上午8时即*t=-*4,因此所求温度*T=*(*-*4) 3*-*3*×*(*-*4)*+*60*=*8(℃)*.*

7*.*e6*-*1[解析] 由题意可得12 000*=*2000ln,则ln*=*6,解得1*+=*e6,所以*=*e6*-*1,故填e6*-*1*.*

8*.S=*[解析] 当0≤*t*≤2*.*5时,*S=*60*t*;当2*.*5*<t*≤3*.*5时,*S=*150;当3*.*5*<t*≤6*.*5时,*S=*150*-*50(*t-*3*.*5)*=*325*-*50*t.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)根据题意,分0*<x*≤30(*x*∈N*\**)和30*<x*≤60(*x*∈N*\**)两种情况考虑;(2)利润是用每人的培训费用乘培训人数再减去成本,根据一次函数与二次函数的性质分别求得最大值,然后比较即可*.*

解:(1)依题意得,当0*<x*≤30时,*y=*850;

当30*<x*≤60时,*y=*850*-*10(*x-*30)*=-*10*x+*1150*.*

*∴y=*

(2)当0*<x*≤30,*x*∈N*\**时,*Q=*850*x-*12 000,

当*x=*30时,*Q*取得最大值,即*Q*max*=*13 500*.*

当30*<x*≤60,*x*∈N*\**时,

*Q=*(*-*10*x+*1150)*x-*12 000*=-*10*x*2*+*1150*x-*12 000

*=-*10*+*,

当*x=*57或58时,*Q*取得最大值,即*Q*max*=*21 060*.*

*∵*21 060*>*13 500,

*∴*当公司参加培训的员工人数为57或58时,培训机构可获得最大利润21 060元*.*

变式题解:原草地面积*S*1*=*11*×*15*=*165(m2),

整改后草地面积为*S=*14*×*12*=*168(m2),

*∵S>S*1,*∴*整改后草地面积增加了*.*

研究:长减少*x* m,宽增加*x* m后,草地面积为

*S*2*=*(11*+x*)(15*-x*)*.*

*∵S*1*-S*2*=*165*-*(11*+x*)(15*-x*)*=x*2*-*4*x*,

*∴*当0*<x<*4时,*x*2*-*4*x<*0,即*S*1*<S*2;

当*x=*4时,*x*2*-*4*x=*0,即*S*1*=S*2;

当*x>*4时,*x*2*-*4*x>*0,即*S*1*>S*2*.*

综上所述,当0*<x<*4时,草地面积增加;

当*x=*4时,草地面积不变;

当*x>*4时,草地面积减少*.*

例2[思路点拨] (1)用待定系数法求解;(2)将*v=*代入解析式,解方程求*x*即可;(3)设原来的游速为*v*0 m/s,耗氧量的单位数为*x*0,游速增加1 m/s后为(*v*0*+*1) m/s,耗氧量的单位数为*x*,分别代入解析式后,两式消去*v*0,整理可得*.*

解:(1)设*v=k*log3(*k*≠0),

当*x=*300时,*v=*,解得*k=*,

*∴v*关于*x*的函数解析式为*v=*log3(*x*≥100)*.*

(2)当游速为 m/s时,由解析式得*=*log3,

*∴*log3*=*3,*∴=*27,解得*x=*2700,

即耗氧量的单位数为2700*.*

(3)设原来的游速为*v*0 m/s,耗氧量的单位数为*x*0,游速增加1 m/s后为(*v*0*+*1) m/s,耗氧量的单位数为*x*,

则*v*0*=*log3,*①*

*v*0*+*1*=*log3,*②*

*②-①*得1*=*log3*-*log3*=*log3,

*∴*log3*=*2,*∴=*32*=*9,*∴*耗氧量是原来的9倍*.*

变式题A[解析] *∵*5 min后甲桶和乙桶中的水量相等,

*∴*函数*y=f*(*t*)*=a*e*nt*满足*f*(5)*=a*e5*n=a*,

可得*n=*ln*.*

设*k* min后甲桶中的水只有 L,

则*f*(*k*)*=a*,即ln·*k=*ln,

即ln·*k=*2ln,解得*k=*10,

故*m=*10*-*5*=*5*.*故选A*.*

例3[思路点拨] (1)求出*f*(*x*)*>*40时*x*的取值范围即可;(2)分段求出*g*(*x*)的解析式,判断*g*(*x*)的单调性,再说明其实际意义*.*

解:(1)由题意知,当30*<x<*100时,

由*f*(*x*)*=*2*x+-*90*>*40,

即*x*2*-*65*x+*900*>*0,解得*x<*20或*x>*45,

*∴*当*x*∈(45,100)时,公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间*.*

(2)当0*<x*≤30时,

*g*(*x*)*=*30·*x*%*+*40(1*-x*%)*=*40*-*;

当30*<x<*100时,

*g*(*x*)*=*·*x*%*+*40(1*-x*%)*=-x+*58*.*

*∴g*(*x*)*=*

当0*<x<*32*.*5时,*g*(*x*)单调递减;

当32*.*5*<x<*100时,*g*(*x*)单调递增*.*

说明该地上班族*S*中有小于32*.*5%的人自驾时,人均通勤时间是递减的;有大于32*.*5%的人自驾时,人均通勤时间是递增的;当自驾人数为32*.*5%时,人均通勤时间最少*.*

变式题解:(1)*L*(*x*)*=*16*w-*2*x-x=*

(2)当0≤*x*≤2时,*L*(*x*)max*=L*(2)*=*42;

当2*<x*≤5时,*L*(*x*)*=*67*-*≤67*-*2*=*43,

当且仅当*=*3(*x+*1),即*x=*3时等号成立*.*由于42*<*43,所以当投入的肥料费用为300元时,该棵水果树获得的利润最大,最大利润为4300元*.*



【备选理由】 例1为一次函数与二次函数模型问题,需要分情况讨论求最值;例2是一道指数函数模型应用问题,需要两边取对数求解;例3为分段函数模型,需要对函数求导得最值,运算量较大*.*

例1[配合例1使用] 旅行社为某旅游团包飞机去旅游,其中旅行社的包机费为15 000元*.*旅游团中每人的飞机票按以下方式与旅行社结算:若旅游团人数不多于30,则飞机票每张收费900元;若旅游团人数多于30,则给予优惠,每多1人,机票费每张减少10元,但旅游团人数最多为75*.*

(1)写出飞机票的价格关于旅游团人数的函数关系式*.*

(2)旅游团人数为多少时,旅行社可获得最大利润?

解:(1)设旅游团人数为*x*,飞机票价格为*y*元,依题意知,当1≤*x*≤30,且*x*∈N*\**时,*y=*900;当30*<x*≤75,且*x*∈N*\**时,*y=*900*-*10(*x-*30)*=-*10*x+*1200*.*

所以所求函数关系式为

*y=*

(2)设利润为*f*(*x*)元,则由(1)知

*f*(*x*)*=y·x-*15 000

*=*

当1≤*x*≤30,且*x*∈N*\**时,*f*(*x*)max*=f*(30)*=*12 000;

当30*<x*≤75,且*x*∈N*\**时,*f*(*x*)max*=f*(60)*=*21 000*.*因为21 000*>*12 000,

所以旅游团人数为60时,旅行社可获得最大利润*.*

例2[配合例2使用] 衣柜里的樟脑丸随着时间推移会挥发,从而体积变小,若它的体积*V*随时间*t*的变化规律是*V=V*0(e为自然对数的底数),其中*V*0为初始值*.*若*V=*,则*t*的值约为*.*(运算结果保留整数,参考数据:lg 3≈0*.*477 1,lg e≈0*.*434 3)

[答案] 11

[解析] 由题知*V*0*=*,即*==*3*-*1,所以*-t=*ln 3*-*1*=-*ln 3,所以*t=*10ln 3*=*10*×*≈10*×*≈11*.*

例3[配合例3使用] 某经销商计划销售一款新型的电子产品,经市场调研发现以下规律:当每台电子产品的利润为*x*(单位:元,*x>*0)时,销售量*q*(*x*)(单位:百台)与*x*之间的关系满足:若*x*不超过25,则*q*(*x*)*=*;若*x*大于或等于225,则销售量为零;当25≤*x*≤225时,*q*(*x*)*=a-b*(*a*,*b*为实常数)*.*

(1)求函数*q*(*x*)的表达式*.*

(2)当*x*为多少时,总利润(单位:元)最大?并求出该最大值*.*

解:(1)当25≤*x*≤225时,由得

故*q*(*x*)*=*

(2)设总利润为*f*(*x*),则*f*(*x*)*=*100*q*(*x*)*·x*,

由(1)得*f*(*x*)*=*

当0*<x*≤25时,*f*(*x*)*==*240 000*-*,*f*(*x*)在(0,25]上单调递增,

所以当*x=*25时,*f*(*x*)有最大值1 000 000*.*

当25*<x*≤225时,*f*(*x*)*=*60 000*x-*4000*x*,*f'*(*x*)*=*60 000*-*6000,

令*f'*(*x*)*=*0,得*x=*100,

当25*<x<*100时,*f'*(*x*)*>*0,*f*(*x*)单调递增,

当100*<x*≤225时,*f'*(*x*)*<*0,*f*(*x*)单调递减,

所以当*x=*100时,*f*(*x*)有最大值2 000 000*.*

当*x>*225时,*f*(*x*)*=*0*.*

故当*x*为100时,总利润最大,为2 000 000元*.*