**第15讲导数与函数的极值、最值**





1*.*函数的极值

(1)函数的极小值:

函数*y=f*(*x*)在点*x=a*的函数值*f*(*a*)比它在点*x=a*附近其他点的函数值都小,*f'*(*a*)*=*0;而且在点*x=a*附近的左侧,右侧,则点*a*叫作函数*y=f*(*x*)的极小值点,*f*(*a*)叫作函数*y=f*(*x*)的极小值*.*

(2)函数的极大值:

函数*y=f*(*x*)在点*x=b*的函数值*f*(*b*)比它在点*x=b*附近其他点的函数值都大,*f'*(*b*)*=*0;而且在点*x=b*附近的左侧,右侧,则点*b*叫作函数*y=f*(*x*)的极大值点,*f*(*b*)叫作函数*y=f*(*x*)的极大值*.*

极小值点、极大值点统称为极值点,极大值和极小值统称为极值*.*

2*.*函数的最值

(1)在闭区间[*a*,*b*]上连续的函数*f*(*x*)在[*a*,*b*]上必有最大值与最小值*.*

(2)若函数*f*(*x*)在[*a*,*b*]上单调递增,则为函数的最小值,为函数的最大值;若函数*f*(*x*)在[*a*,*b*]上单调递减,则为函数的最大值,为函数的最小值*.*

3*.*实际应用题

理解题意、建立函数模型,使用导数方法求解函数模型,根据求解结果回答实际问题*.*

常用结论

导数研究不等式的关键是函数的单调性和最值,各类不等式与函数最值关系如下:

|  |  |
| --- | --- |
| 不等式类型 | 与最值的关系 |
| ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)*>M* | ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)min*>M* |
| ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)*<M* | ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)max*<M* |
| ∃*x*0∈*D*,*f*(*x*0)*>M* | ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)max*>M* |
| ∃*x*0∈*D*,*f*(*x*0)*<M* | ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)min*<M* |
| ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)*>g*(*x*) | ∀*x*∈*D*,[*f*(*x*)*-g*(*x*)]min*>*0 |
| ∀*x*∈*D*,*f*(*x*)*<g*(*x*) | ∀*x*∈*D*,[*f*(*x*)*-g*(*x*)]max*<*0 |
| ∀*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)*>g*(*x*2) | ∀*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)min*>g*(*x*2)max |

(续表)

|  |  |
| --- | --- |
| 不等式类型 | 与最值的关系 |
| ∀*x*1∈*D*1,∃*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)*>g*(*x*2) | ∀*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)min*>g*(*x*2)min |
| ∃*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)*>g*(*x*2) | ∀*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)max*>g*(*x*2)max |
| ∃*x*1∈*D*1,∃*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)*>g*(*x*2) | ∀*x*1∈*D*1,∀*x*2∈*D*2,  *f*(*x*1)max*>g*(*x*2)min |

(注:上述的大于、小于分别改为不小于、不大于,相应的与最值关系对应的不等号也改变)



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=x*3*-*3*x*2*+*1的极小值为*.*

2*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=x*3*-*12*x*在区间[*-*3,3]上的最大值是*.*

3*.***[**教材改编**]** 当*x>*0时,ln *x*,*x*,e*x*的大小关系是*.*

4*.***[**教材改编**]** 现有一块边长为*a*的正方形铁片,铁片的四角截去四个边长均为*x*的小正方形,然后做成一个无盖方盒,该方盒容积的最大值是*.*

题组二常错题

◆索引:利用极值求参数时忽略对所求参数的检验;混淆极值与极值点的概念;连续函数在区间(*a*,*b*)上不一定存在最值;不等式问题中的易错点*.*

5*.*若函数*f*(*x*)*=x*3*+ax*2*+bx+a*2在*x=*1处取得极值10,则*a+b=　　　　.*

6*.*函数*g*(*x*)*=-x*2的极值点是,函数*f*(*x*)*=*(*x-*1)3的极值点(填“存在”或“不存在”)*.*

7*.*函数*g*(*x*)*=x*2在[1,2]上的最小值和最大值分别是,在(1,2)上的最小值和最大值均(填“存在”或“不存在”)*.*

8*.*对任意实数*x*,不等式sin *x*≤*a*恒成立,则实数*a*的取值范围是;存在实数*x*0,使不等式sin *x*0≤*a*成立,则实数*a*的取值范围是*.*



id:2147499160;FounderCES探究点一利用导数解决函数的极值问题

id:2147499167;FounderCES

微点1由图像判断函数极值

例1 **[**2018·杭州二中模拟**]** 如图2*-*15*-*1所示,可导函数*y=f*(*x*)在点*P*(*x*0,*f*(*x*0))处的切线为*l*:*y=g*(*x*)*.*设*h*(*x*)*=f*(*x*)*-g*(*x*),则下列说法正确的是 ()

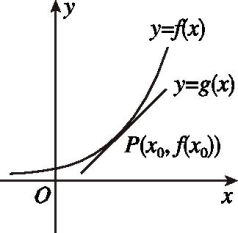


图2*-*15*-*1

A*.h'*(*x*0)*=*0,*x=x*0是*h*(*x*)的极大值点

B*.h'*(*x*0)*=*0,*x=x*0是*h*(*x*)的极小值点

C*.h'*(*x*0)*=*0,*x=x*0不是*h*(*x*)的极值点

D*.h'*(*x*0)≠0,*x=x*0不是*h*(*x*)的极值点

[总结反思] 可导函数在极值点处的导数一定为零,是否为极值点以及是极大值点还是极小值点要看在极值点左、右两侧导数的符号*.*

微点2已知函数求极值

例2 若*x=*1是函数*f*(*x*)*=ax+*ln *x*的极值点,则()

A*.f*(*x*)有极大值*-*1

B*.f*(*x*)有极小值*-*1

C*.f*(*x*)有极大值0

D*.f*(*x*)有极小值0

[总结反思] 求函数极值的一般步骤:*①*先求函数*f*(*x*)的定义域,再求函数*f*(*x*)的导函数;*②*求*f'*(*x*)*=*0的根;*③*判断在*f'*(*x*)*=*0的根的左、右两侧*f'*(*x*)的符号,确定极值点;*④*求出具体极值*.*

微点3已知极值求参数

例3 **[**2018·江西九校二联**]** 若函数*f*(*x*)*=*(*a+*1)e2*x-*2e*x+*(*a-*1)*x*有两个极值点,则实数*a*的取值范围是 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*∪

[总结反思] 根据极值求参数的值(或取值范围)就是根据极值点处的导数等于零、极值点处的函数值即极值列出关于参数的方程组(或不等式组),通过解方程组(或不等式组)求得参数的值(或取值范围)*.*

应用演练

1*.*【微点1】**[**2018·河南中原名校质检**]** 已知定义在R上的函数*f*(*x*),其导函数*f'*(*x*)的大致图像如图2*-*15*-*2所示,则下列叙述正确的是 ()

*①f*(*b*)*>f*(*a*)*>f*(*c*);

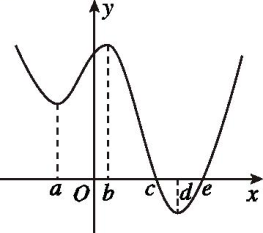


图2*-*15*-*2

*②*函数*f*(*x*)在*x=c*处取得极小值,在*x=e*处取得极大值;

*③*函数*f*(*x*)在*x=c*处取得极大值,在*x=e*处取得极小值*.*

A*.③*

B*.①②*

C*.①③*

D*.②*

2*.*【微点3】函数*f*(*x*)*=x*2*-a*ln *x*(*a*∈R)不存在极值点,则*a*的取值范围是 ()

A*.*(*-∞*,0) B*.*(0,*+∞*)

C*.*[0,*+∞*) D*.*(*-∞*,0]

3*.*【微点2】**[**2018·安庆二模**]** 已知函数*f*(*x*)*=*2e*f'*(e)ln *x-*(e是自然对数的底数),则*f*(*x*)的极大值为()

A*.*2e*-*1 B*.-*

C*.*1 D*.*2ln 2

4*.*【微点3】**[**2018·菏泽模拟**]** 已知函数*f*(*x*)*=x*3*-ax+*2的极大值为4,若函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*+mx*在(*-*3,*a-*1)上的极小值不大于*m-*1,则实数*m*的取值范围是 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*(*-∞*,*-*9)

id:2147499195;FounderCES探究点二利用导数解决函数的最值问题

例4 已知定义在正实数集上的函数*f*(*x*)*=ax*2*-*(*a+*2)*x+*ln *x.*

(1)若函数*g*(*x*)*=f*(*x*)*-ax*2*+*1,在其定义域上*g*(*x*)≤0恒成立,求实数*a*的最小值;

(2)若*a>*0时,*f*(*x*)在区间[1,e]上的最小值为*-*2,求实数*a*的取值范围*.*

[总结反思] (1)函数在闭区间上的最值在端点处或区间内的极值点处取得,上述值中最大的即为最大值、最小的即为最小值*.*如果函数在一个区间上(不论区间的类型)有唯一的极值点,则该点也是最值点*.*

(2)注意把不等式恒成立问题转化为函数的最值问题*.*

变式题 (1)已知*a*≥*+*ln *x*对任意*x*∈恒成立,则*a*的最小值为 ()

A*.*1 B*.*e*-*2 C*.* D*.*0

(2)**[**2018·唐山三模**]** 已知*a>*0,*f*(*x*)*=*,若*f*(*x*)的最小值为*-*1,则*a=* ()

A*.* B*.* C*.*e D*.*e2

id:2147499202;FounderCES探究点三利用导数研究生活中的优化问题

例5 **[**2018·南京四校联考**]** 如图2*-*15*-*3所示,某大型水上乐园内有一块矩形场地*ABCD*,*AB=*120米,*AD=*80米,以*AD*,*BC*为直径的半圆*O*1和半圆*O*2(半圆在矩形*ABCD*内部)为两个半圆形水上主题乐园,*BC*,*CD*,*DA*都建有围墙,游客只能从线段*AB*处进出该主题乐园*.*为了进一步提高经济效益,水上乐园管理部门决定沿着,修建不锈钢护栏,沿着线段*EF*修建该主题乐园大门并设置检票口,其中*E*,*F*分别为,上的动点,*EF*∥*AB*,且线段*EF*与线段*AB*在圆心*O*1和*O*2连线的同侧*.*已知弧线部分的修建费用为200元*/*米,直线部分的平均修建费用为400元*/*米*.*

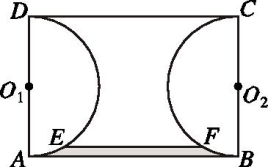


图2*-*15*-*3

(1)若*EF=*80米,则检票等候区域(阴影部分)的面积为多少平方米?

(2)试确定点*E*的位置,使得修建费用最低*.*

[总结反思] (1)利用导数研究生活中的优化问题的关键:理清数量关系、选取合适的自变量建立函数模型*.*

(2)注意:函数的定义域由实际问题确定,最后要把求解的数量结果“翻译”为实际问题的答案*.*

变式题 某产品每件成本9元,售价30元,每星期卖出432件*.*如果降低价格,销售量可以增加,若商品单价降低*x*(0≤*x*≤21)元,则一个星期增加的销售量为*kx*2(*k>*0)件*.*已知商品单件降低2元时,一个星期的销售量增加24件*.*(商品销售利润*=*商品销售收入*-*商品销售成本)

(1)将一个星期的商品销售利润*f*(*x*)表示成*x*的函数;

(2)如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大*.*

第15讲导数与函数的极值、最值

考试说明 1*.*了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件,会用导数求函数的极大值、极小值(其中多项式函数一般不超过三次);会求闭区间上函数的最大值、最小值(其中多项式函数一般不超过三次)*.*

2*.*会利用导数解决某些实际问题*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)*f'*(*x*)*<*0*f'*(*x*)*>*0(2)*f'*(*x*)*>*0*f'*(*x*)*<*0

2*.*(2)*f*(*a*)*f*(*b*)*f*(*a*)*f*(*b*)

对点演练

1*.-*3[解析] *f'*(*x*)*=*3*x*2*-*6*x*,

令*f'*(*x*)*=*3*x*2*-*6*x=*0,得*x*1*=*0,*x*2*=*2*.*易知当*x*∈(*-∞*,0)时,*f'*(*x*)*>*0;当*x*∈(0,2)时,*f'*(*x*)*<*0;当*x*∈(2,*+∞*)时,*f'*(*x*)*>*0*.*

故*f*(*x*)在*x=*2处取得极小值*f*(2)*=*8*-*12*+*1*=-*3*.*

2*.*16[解析] 由*f'*(*x*)*=*3*x*2*-*12*=*0,得*x=±*2,易知*x=-*2为函数*f*(*x*)的极大值点,故函数*f*(*x*)在区间[*-*3,3]上的最大值*f*(*x*)max*=*max{*f*(*-*2),*f*(3)}*=*max{16,*-*9}*=*16*.*

3*.*ln *x<x<*e*x*[解析] 构造函数*f*(*x*)*=*ln *x-x*,则*f'*(*x*)*=-*1,可得*x=*1为函数*f*(*x*)在(0,*+∞*)上唯一的极大值点,也是最大值点,故*f*(*x*)≤*f*(1)*=-*1*<*0,所以ln *x<x.*同理可得*x<*e*x*,故ln *x<x<*e*x.*

4*.a*3[解析] 容积*V=*(*a-*2*x*)2*x*,0*<x<*,则*V'=*2(*a-*2*x*)*×*(*-*2)*x+*(*a-*2*x*)2*=*(*a-*2*x*)(*a-*6*x*),由*V'=*0得*x=*或*x=*(舍去),则*x=*为*V*在定义域内唯一的极大值点也是最大值点,此时*V*max*=a*3*.*

5*.-*7[解析] *f'*(*x*)*=*3*x*2*+*2*ax+b*,依题意得即解得或经验证,当*a=-*3,*b=*3时,*f'*(*x*)*=*3*x*2*-*6*x+*3*=*3(*x-*1)2≥0,故*f*(*x*)在R上单调递增,所以不符合题意,舍去*.*当*a=*4,*b=-*11时,符合题意,所以*a+b=-*7*.*

6*.*0不存在[解析] 结合函数图像可知*g*(*x*)*=-x*2的极值点是*x=*0*.*因为*f'*(*x*)*=*3(*x-*1)2≥0,所以*f'*(*x*)*=*0无变号零点,所以函数*f*(*x*)*=*(*x-*1)3不存在极值点*.*

7*.*1,4不存在[解析] 根据函数的单调性及最值的定义可得*.*

8*.*[1,*+∞*)[*-*1,*+∞*)[解析] 对任意实数*x*,不等式sin *x*≤*a*恒成立⇒(sin *x*)max≤*a*,即*a*≥1*.*存在实数*x*0,使不等式sin *x*0≤*a*成立⇒(sin *x*)min≤*a*,即*a*≥*-*1*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] 先求*h'*(*x*0)的值,并结合图像判断*x=x*0是否为*h*(*x*)的极大值点或极小值点*.*

B[解析] 由题设有*g*(*x*)*=f'*(*x*0)(*x-x*0)*+f*(*x*0),

故*h*(*x*)*=f*(*x*)*-f'*(*x*0)(*x-x*0)*-f*(*x*0),

所以*h'*(*x*)*=f'*(*x*)*-f'*(*x*0),所以*h'*(*x*0)*=f'*(*x*0)*-f'*(*x*0)*=*0*.*

结合图像可知,当*x<x*0时,有*h'*(*x*)*<*0,*h*(*x*)为减函数,当*x>x*0时,有*h'*(*x*)*>*0,*h*(*x*)为增函数,

所以*x=x*0是*h*(*x*)的极小值点*.*故选B*.*

例2[思路点拨] 先根据极值的定义求得*a*的值,再根据导数符号的变化规律确定极值*.*

A[解析] *∵x=*1是函数*f*(*x*)*=ax+*ln *x*的极值点,*∴f'*(1)*=*0,即*a+=*0,*∴a=-*1,

*∴f'*(*x*)*=-*1*+=*,

*∴*当*x>*1时,*f'*(*x*)*<*0,当0*<x<*1时,*f'*(*x*)*>*0,因此*f*(*x*)有极大值*f*(1)*=-*1,故选A*.*

例3[思路点拨] 函数*f*(*x*)有两个极值点,等价于*f'*(*x*)*=*0有两个根,换元后利用一元二次方程根与系数之间的关系及判别式建立不等式(组)求解即可*.*

B[解析] *∵f*(*x*)*=*(*a+*1)e2*x-*2e*x+*(*a-*1)*x*,

*∴f'*(*x*)*=*2(*a+*1)e2*x-*2e*x+a-*1*.*

*∵f*(*x*)*=*(*a+*1)e2*x-*2e*x+*(*a-*1)*x*有两个极值点,

*∴f'*(*x*)*=*0有两个根*.*

设*t=*e*x>*0,则关于*t*的方程2(*a+*1)*t*2*-*2*t+a-*1*=*0有两个正根,

可得解得1*<a<*,

即实数*a*的取值范围是,故选B*.*

应用演练

1*.*A[解析] 由导函数的图像可知,在(*-∞*,*c*)与(*e*,*+∞*)上,*f'*(*x*)*>*0,所以函数*f*(*x*)在(*-∞*,*c*)与(*e*,*+∞*)上单调递增;在(*c*,*e*)上,*f'*(*x*)*<*0,所以函数*f*(*x*)在(*c*,*e*)上单调递减*.*所以*f*(*c*)*>f*(*a*),*①*错误;函数*f*(*x*)在*x=c*处取得极大值,在*x=e*处取得极小值,*②*错误,*③*正确*.*故选A*.*

2*.*D[解析] *f*(*x*)的定义域是(0,*+∞*),*f'*(*x*)*=*2*x-=.*因为*f*(*x*)在(0,*+∞*)上不存在极值点,所以2*x*2*=a*无正实数根,因为2*x*2*>*0,所以*a*≤0,故选D*.*

3*.*D[解析] *∵f'*(*x*)*=-*,*∴f'*(e)*=-*,*∴f'*(e)*=*,*∴f*(*x*)*=*2ln *x-*,*f'*(*x*)*=-.*由*f'*(*x*)*=*0,得*x=*2e,*∴f*(*x*)的极大值为*f*(2e)*=*2ln 2e*-*2*=*2ln 2,故选D*.*

4*.*B[解析] *f'*(*x*)*=*3*x*2*-a.*

当*a*≤0时,*f'*(*x*)≥0,*f*(*x*)无极值*.*

当*a>*0时,易得*f*(*x*)在*x=-*处取得极大值,则有*f=*4,可得*a=*3,于是*g*(*x*)*=x*3*+*(*m-*3)*x+*2,则*g'*(*x*)*=*3*x*2*+*(*m-*3)*.*

当*m-*3≥0时,*g'*(*x*)≥0,*g*(*x*)在(*-*3,2)上不存在极小值*.*

当*m-*3*<*0时,易知*g*(*x*)在*x=*处取得极小值,

依题意有解得*-*9*<m*≤*-.*

例4[思路点拨] (1)分离参数,转化为函数的最值问题求解;(2)对*a*分类讨论来求解*.*

解:(1)*g*(*x*)*=*ln *x-*(*a+*2)*x+*1,

由题意得*a+*2≥恒成立*.*

设*h*(*x*)*=*(*x>*0),则*h'*(*x*)*==*,

所以当0*<x<*1时,*h'*(*x*)*>*0,*h*(*x*)单调递增,当*x>*1时,*h'*(*x*)*<*0,*h*(*x*)单调递减,

因此*h*(*x*)max*=h*(1)*=*1,所以*a+*2≥1,可得*a*≥*-*1,

所以实数*a*的最小值为*-*1*.*

(2)*f'*(*x*)*=*2*ax-*(*a+*2)*+=*(*x>*0,*a>*0),由*f'*(*x*)*=*0,得*x=*或*x=.*

当*a*≥1时,≤1,因为*x*∈[1,e],所以*f'*(*x*)≥0,*f*(*x*)单调递增,*f*(*x*)min*=f*(1)*=-*2,符合题意;

当*<a<*1时,1*<<*e,因为*x*∈[1,e],所以当*x*∈时,*f*(*x*)单调递减,当*x*∈时,*f*(*x*)单调递增,

*f*(*x*)min*=f<f*(1)*=-*2,不合题意,舍去;

当0*<a*≤时,≥e,因为*x*∈[1,e],所以*f*(*x*)单调递减,*f*(*x*)min*=f*(e)*<f*(1)*=-*2,不合题意,舍去*.*

综上,实数*a*的取值范围是[1,*+∞*)*.*

变式题(1)B(2)A[解析] (1)令*f*(*x*)*=+*ln *x*,则*f'*(*x*)*=-+*,可得函数*f*(*x*)在上单调递减,在[1,e]上单调递增,又*f*(e)*=<f=*e*-*2,所以函数*f*(*x*)的最大值为e*-*2,故*a*≥e*-*2,故选B*.*

(2)由*f*(*x*)*=*,得*f'*(*x*)*==.*

令*g*(*x*)*=*e*x+ax+a*,则*g'*(*x*)*=*e*x+a>*0,

则*g*(*x*)在(*-∞*,*+∞*)上为增函数,

又*g*(*-*1)*=>*0,*x*→*-∞*时,*g*(*x*)→*-∞*,所以存在*x*0*<-*1,使*g*(*x*0)*=*0,

即*+ax*0*+a=*0*①*,所以*f'*(*x*0)*=*0,

所以函数*f*(*x*)在(*-∞*,*x*0)上为减函数,在(*x*0,*+∞*)上为增函数,

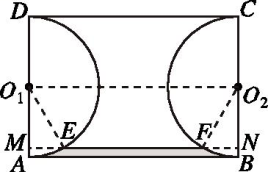
则*f*(*x*)的最小值为*f*(*x*0)*==-*1,即*x*0*=--a②.*

联立*①②*,可得*x*0*=-*2*.*

把*x*0*=-*2代入*①*,可得*a=*,故选A*.*

例5[思路点拨] (1)设直线*EF*与矩形*ABCD*交于*M*,*N*两点,连接*O*1*E*,*O*2*F*,*O*1*O*2,则阴影部分的面积为矩形*AO*1*O*2*B*的面积减去三部分的面积,这三部分分别为梯形*O*1*O*2*FE*,扇形*O*1*AE*和扇形*O*2*FB*;(2)设∠*AO*1*E=θ*,*θ*∈,将修建费用表示为*θ*的函数,即可利用导数求最小值*.*

解:(1)如图所示,设直线*EF*与矩形*ABCD*交于*M*,*N*两点,连接*O*1*E*,*O*2*F*,*O*1*O*2,则*ME=*20米,*O*1*M=*20米*.*



梯形*O*1*O*2*FE*的面积为*×*(120*+*80)*×*20*=*2000(平方米),

矩形*AO*1*O*2*B*的面积为120*×*40*=*4800(平方米),

易得∠*AO*1*E=*,则扇形*O*1*AE*和扇形*O*2*FB*的面积均为*××*1600*=*(平方米),

故阴影部分的面积为4800*-*2000*-*平方米*.*

(2)设∠*AO*1*E=θ*,*θ*∈,则与的长都是40*θ*,

*EF=*120*-*2*×*40sin *θ=*120*-*80sin *θ*,

所以修建费用*f*(*θ*)*=*200*×*80*θ+*400*×*(120*-*80sin *θ*)*=*16 000(*θ+*3*-*2sin *θ*),

所以*f'*(*θ*)*=*16 000(1*-*2cos *θ*)*.*

令*f'*(*θ*)*=*0,得*θ=*,

当*θ*变化时,*f'*(*θ*),*f*(*θ*)的变化情况如下表:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *θ* |  |  |  |
| *f'*(*θ*) | *-* | 0 | *+* |
| *f*(*θ*) | ↘ | 极小值 | ↗ |

由上表可得,当*θ=*,即∠*AO*1*E=*时,*f*(*θ*)有极小值,也为最小值*.*

故当∠*AO*1*E*为时,修建费用最低*.*

变式题解:(1)若商品单价降低*x*元,则一个星期增加的销售量为*kx*2件,

由已知条件得*k*·22*=*24,解得*k=*6,

则*f*(*x*)*=*(30*-x-*9)(432*+*6*x*2)*=-*6*x*3*+*126*x*2*-*432*x+*9072,*x*∈[0,21]*.*

(2)由(1)知*f'*(*x*)*=-*18*x*2*+*252*x-*432*=-*18(*x-*2)(*x-*12)*.*

令*f'*(*x*)*=*0,解得*x=*2或*x=*12*.*

当*x*变化时,*f*(*x*)与*f'*(*x*)的变化情况如下表:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | (0,2) | 2 | (2,12) | 12 | (12,21) | 21 |
| *f'*(*x*) |  | *-* | 0 | *+* | 0 | *-* |  |
| *f*(*x*) | 9072 | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ | 0 |

*∴*当*x=*12时,*f*(*x*)取得极大值;当*x=*2时,*f*(*x*)取得极小值*.*

*∵f*(0)*=*9072,*f*(12)*=*11 664,

*∴*当*x=*12时,*f*(*x*)max*=*11 664,

故定价为30*-*12*=*18(元)能使一个星期的商品销售利润最大*.*



【备选理由】 例1主要考查利用导数判断函数的单调性以及函数极值的个数;例2是已知极值点的个数求参数取值范围,并考查了化归与转化思想及计算能力,属于中档题;例3的两问都是利用导数解决函数的最值问题,而对于不等式恒成立问题要善于转化为函数的最值问题;例4为利用导数研究生活中的优化问题*.*

例1[配合例2使用] **[**2018·丹东二模**]** 设*f*(*x*)*=x*2*-x+*cos(1*-x*),则函数*f*(*x*) ()

A*.*有且仅有一个极小值 B*.*有且仅有一个极大值

C*.*有无数个极值 D*.*没有极值

[解析] A由*f*(*x*)*=x*2*-x+*cos(1*-x*),得*f'*(*x*)*=x-*1*+*sin(1*-x*)*.*

设*g*(*x*)*=x-*1*+*sin(1*-x*),则*g'*(*x*)*=*1*-*cos(1*-x*)≥0,即*g*(*x*)为增函数,

又*g*(1)*=*0,

所以当*x*∈(*-∞*,1)时,*g*(*x*)*<*0,*f'*(*x*)*<*0,*f*(*x*)单调递减;

当*x*∈(1,*+∞*)时,*g*(*x*)*>*0,*f'*(*x*)*>*0,*f*(*x*)单调递增*.*

又*f'*(1)*=*0,

所以函数*f*(*x*)有且仅有一个极小值*f*(1)*.*

故选A*.*

例2[配合例3使用] 若函数*f*(*x*)*=ax*2*+x*ln *x*有两个极值点,则实数*a*的取值范围是*.*

[答案] *-<a<*0

[解析] *f*(*x*)*=x*ln *x+ax*2(*x>*0),*f'*(*x*)*=*ln *x+*1*+*2*ax.*令*g*(*x*)*=*ln *x+*1*+*2*ax*,因为函数*f*(*x*)*=ax*2*+x*ln *x*有两个极值点,所以*g*(*x*)*=*0在区间(0,*+∞*)上有两个不相等的实数根*.g'*(*x*)*=+*2*a=*,

当*a*≥0时,*g'*(*x*)*>*0,则函数*g*(*x*)在区间(0,*+∞*)上单调递增,因此*g*(*x*)*=*0在区间(0,*+∞*)上不可能有两个不相等的实数根,应舍去*.*

当*a<*0时,

由*g'*(*x*)*>*0,得0*<x<-*,此时函数*g*(*x*)单调递增;

由*g'*(*x*)*<*0,得*x>-*,此时函数*g*(*x*)单调递减*.*

所以当*x=-*时,函数*g*(*x*)取得极大值*.*要使*g*(*x*)*=*0在区间(0,*+∞*)上有两个不相等的实数根,

则*g=*ln*>*0,可得*-<a<*0*.*

故实数*a*的取值范围是*-<a<*0*.*

例3[配合例4使用] **[**2018·三明5月质检**]** 已知函数*f*(*x*)*=*(*x-*4)e*x-*2*+mx*(*m*∈R)*.*

(1)当*x>*2时,*f*(*x*)≥0恒成立,求实数*m*的取值范围;

(2)当*a*∈[0,1)时,函数*g*(*x*)*=*(*x>*2)有最小值,设*g*(*x*)的最小值为*h*(*a*),求函数*h*(*a*)的值域*.*

解:(1)因为*f*(*x*)*=*(*x-*4)e*x-*2*+mx*≥0对任意*x*∈(2,*+∞*)恒成立,

所以e*x-*2≥*-m*对任意*x*∈(2,*+∞*)恒成立*.*设*φ*(*x*)*=*e*x-*2*=*e*x-*2,则*φ'*(*x*)*=*e*x-*2*=*e*x-*2≥0,所以*φ*(*x*)在(2,*+∞*)上单调递增,

所以*φ*(*x*)*>φ*(2)*=-*1,则由题意得*-m*≤*-*1,即*m*≥1,

所以实数*m*的取值范围为[1,*+∞*)*.*

(2)对*g*(*x*)*=*(*x>*2)求导,得*g'*(*x*)*==*(*x>*2)*.*

记*F*(*x*)*=*e*x-*2*+a*(*x>*2),

由(1)知*F*(*x*)在区间(2,*+∞*)上单调递增,又*F*(2)*=-*1*+a<*0,*F*(4)*=a*≥0,

所以存在唯一正实数*x*0∈(2,4],使得*F*(*x*0)*=+a=*0*.*

所以当*x*∈(2,*x*0)时,*F*(*x*)*<*0,*g'*(*x*)*<*0,函数*g*(*x*)在区间(2,*x*0)上单调递减;

当*x*∈(*x*0,*+∞*)时,*F*(*x*)*>*0,*g'*(*x*)*>*0,函数*g*(*x*)在区间(*x*0,*+∞*)上单调递增*.*

所以*g*(*x*)在(2,*+∞*)上有最小值*g*(*x*0)*=*,

由题设得*h*(*a*)*=.*

又因为*-a=*,所以*h*(*a*)*=.*

令*u*(*x*)*=*e*x-*2(2*<x*≤4),则*u'*(*x*)*=*e*x-*2*>*0,函数*u*(*x*)在区间(2,4]上单调递增,

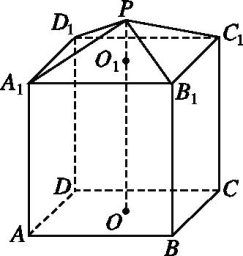
所以*u*(2)*<u*(*x*)≤*u*(4),

即函数*h*(*a*)的值域为*.*

例4[配合例5使用] 现需要设计一个仓库,它由上下两部分组成,上部的形状是正四棱锥*P-A*1*B*1*C*1*D*1,下部的形状是正四棱柱*ABCD-A*1*B*1*C*1*D*1(如图所示),并要求正四棱柱的高*O*1*O*是正四棱锥的高*PO*1的4倍*.*

(1)若*AB=*6 m,*PO*1*=*2 m,则仓库的容积是多少?

(2)若正四棱锥的侧棱长为6 m,则当*PO*1为多少时,仓库的容积最大?



解:(1)由*PO*1*=*2知*O*1*O=*4*PO*1*=*8*.*

因为*A*1*B*1*=AB=*6,

所以正四棱锥*P-A*1*B*1*C*1*D*1的体积*V*锥*=·A*1*·PO*1*=×*62*×*2*=*24(m3),

正四棱柱*ABCD-A*1*B*1*C*1*D*1的体积*V*柱*=AB*2*·O*1*O=*62*×*8*=*288(m3)*.*

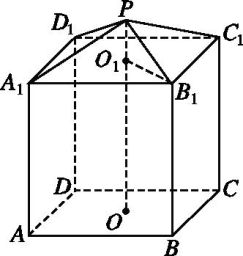
所以仓库的容积*V=V*锥*+V*柱*=*24*+*288*=*312(m3)*.*

(2)设*A*1*B*1*=a*(m),*PO*1*=h*(m),则0*<h<*6,*O*1*O=*4*h.*连接*O*1*B*1*.*

因为在Rt△*PO*1*B*1中,*O*1*+P=P*,

所以*+h*2*=*36,即*a*2*=*2(36*-h*2)*.*

于是仓库的容积*V=V*柱*+V*锥*=a*2*·*4*h+a*2*·h=a*2*h=*(36*h-h*3),0*<h<*6,



从而*V'=*(36*-*3*h*2)*=*26(12*-h*2)*.*

令*V'=*0,得*h=*2或*h=-*2(舍)*.*

当0*<h<*2时,*V'>*0,*V*是增函数;

当2*<h<*6时,*V'<*0,*V*是减函数*.*

故当*h=*2时,*V*取得极大值,也是最大值*.*

因此,当*PO*1*=*2 m时,仓库的容积最大*.*