**第16讲定积分与微积分基本定理**





1*.*定积分的概念

如果函数*f*(*x*)在区间[*a*,*b*]上连续,用分点*a=x*0*<x*1*<*…*<xi-*1*<xi<*…*<xn=b*将区间[*a*,*b*]等分成*n*个小区间,在每个小区间[*xi-*1,*xi*]上任取一点*ξi*(*i=*1,2,…,*n*),作和式*f*(*ξi*)Δ*x=f*(*ξi*),当*n*→*∞*时,上述和式无限接近某个,这个常数叫作函数*f*(*x*)在区间[*a*,*b*]上的定积分,记作*f*(*x*)d*x*,即*f*(*x*)d*x=　　　　　　　　　.*其中*f*(*x*)称为函数,*a*称为积分限,*b*称为积分限*.*

2*.*定积分的几何意义

如果在区间[*a*,*b*]上的函数*f*(*x*)连续且恒有*f*(*x*)≥0,那么定积分*f*(*x*)d*x*表示由直线*x=*,*x=*,*y=*和曲线*y=f*(*x*)所围成的曲边梯形的面积*.*

3*.*定积分的性质

性质1:常数因子可提到积分号前,即*kf*(*x*)d*x=*(*k*为常数)*.*

性质2:代数和的定积分等于定积分的代数和,即[*f*(*x*)*±g*(*x*)]d*x=　　　　　　　　.*

性质3:(定积分的可加性)如果积分区间[*a*,*b*]被点*c*分成两个小区间[*a*,*c*]与[*c*,*b*],则*f*(*x*)d*x=　　　　　　　.*

4*.*微积分基本定理

如果*f*(*x*)是区间[*a*,*b*]上的连续函数,并且有*F'*(*x*)*=f*(*x*),则*f*(*x*)d*x=　　　　.*

常用结论

如果*f*(*x*)是区间[*-a*,*a*](*a>*0)上的连续的偶函数,则*f*(*x*)d*x=*2*f*(*x*)d*x*;如果*f*(*x*)是区间[*-a*,*a*](*a>*0)上的连续的奇函数,则*f*(*x*)d*x=*0*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** d*x=　　　　.*

2*.***[**教材改编**]** sin *x*d*x=　　　　.*

3*.***[**教材改编**]** 已知*f*(*x*)d*x=*8,则*f*(*x*)d*x+f*(*x*)d*x=　　　　.*

4*.***[**教材改编**]** 直线*y=x-*4、曲线*y=*及*x*轴所围成的封闭图形的面积是*.*

题组二常错题

◆索引:误解积分变量致错;定积分的值不一定是曲边梯形的面积;弄错原函数的定义域;*f*(*x*),*g*(*x*)的图像与直线*x=a*,*x=b*所围成的曲边图形的面积的表达式不清致错*.*

5*.*定积分(*t*2*+*1)d*x=　　　　.*

6*.*曲线*y=-x*2(*x*∈[*-*1,1])与*x*轴所围成的封闭图形的面积为*.*

7*.*计算d*x=　　　　.*

8*.*直线*x=*0,*x=*与曲线*y=*sin *x*,*y=*cos *x*所围成的封闭图形的面积*S*的定积分表达式是*.*



id:2147499367;FounderCES探究点一定积分的计算

例1 (1)已知函数*f*(*x*)*=*则*f*(*x*)d*x=*()

A*.*2*+*π B*.*

C*.-*2*+* D*.-*2

(2)**[**2018·湖北咸宁重点高中联考**]** 若(e*x-*2*ax*)d*x=*e,则*a=　　　　.*

[总结反思] (1)计算定积分的常用方法有三种:定义法、几何意义法、微积分基本定理法*.*

(2)使用微积分基本定理的关键是找到一个函数,使该函数的导数等于被积函数*.*

变式题 (1)**[**2018·曲靖一中月考**]** 已知sin(*x-φ*)d*x=*,则sin 2*φ=*()

A*.* B*.* C*.-* D*.-*

(2)**[**2018·莱芜模拟**]** d*x*的值为*.*

id:2147499374;FounderCES探究点二利用定积分求曲边梯形的面积

例2 (1)**[**2018·贵阳模拟**]** 若函数*f*(*x*)*=A*sin*ωx-*(*A>*0,*ω>*0)的部分图像如图2*-*16*-*1所示,则图中阴影部分的面积为 ()

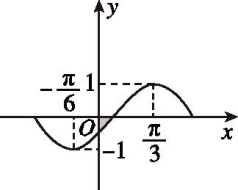


图2*-*16*-*1

A*.*

B*.*

C*.*

D*.*

(2)**[**2018·江西临川一中月考**]** 已知曲线*y=*,*y=*2*-x*与*x*轴所围成的封闭图形的面积为*S*,则*S=　　　　.*

[总结反思] (1)利用定积分求曲边梯形的面积的基本步骤:画草图,解方程得积分上、下限,把面积表示为已知函数的定积分*.*

(2)注意:两曲线的上、下位置关系,分段表示的面积之间的关系*.*

变式题 (1)如图2*-*16*-*2所示的阴影部分的面积为 ()

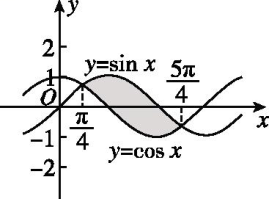


图2*-*16*-*2

A*.*4 B*.*2

C*.* D*.*

(2)**[**2018·安徽江南十校联考**]** 直线*l*过抛物线*E*:*y*2*=*8*x*的焦点且与*x*轴垂直,则直线*l*与*E*所围成的封闭图形的面积为 ()

A*.*13 B*.* C*.* D*.*

id:2147499402;FounderCES探究点三定积分在物理中的应用

例3 两点之间相距112 m,一质点从一点出发,沿直线向另一点做变速直线运动,其速度方程是*v=t+*1(*v*的单位:m/s,*t*的单位:s)*.*

(1)计算该质点在前10 s所走的路程;

(2)计算该质点在第5 s到第10 s所经过的路程;

(3)计算该质点到达另一点所需要的时间,以及该质点在整个运动过程中的平均速度*.*

[总结反思] (1)做变速直线运动的物体在时间段[*a*,*b*]内所经过的路程*S*等于其速度函数*v=v*(*t*)(*v*(*t*)≥0)在时间区间[*a*,*b*]上的定积分,即*S=v*(*t*)d*t.*

(2)一物体在变力*F=F*(*x*)的作用下,在位移区间[*a*,*b*]内所做的功*W*是函数*F=F*(*x*)在区间[*a*,*b*]上的定积分,即*W=F*(*x*)d*x.*

变式题 一物体在变力*F*(*x*)*=*(单位:N)的作用下沿力的正方向运动,求物体从*x=*8 m处运动到*x=*18 m处这一过程中,变力对物体所做的功*.*

第16讲定积分与微积分基本定理

考试说明 1*.*了解定积分的实际背景,了解定积分的基本思想,了解定积分的概念*.*

2*.*了解微积分基本定理的含义*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*常数*f*(*ξi*)被积下上

2*.a　b*0

3*.kf*(*x*)d*x　f*(*x*)d*x±g*(*x*)d*x　f*(*x*)d*x+f*(*x*)d*x*

4*.F*(*b*)*-F*(*a*)

对点演练

1*.*e2*-*2ln 2*-*e[解析] d*x=*(e*x-*2ln *x*)*=*e2*-*2ln 2*-*e*.*

2*.*2[解析] sin *x*d*x=-*cos *x**=*2*.*

3*.*8[解析] *f*(*x*)d*x+f*(*x*)d*x=f*(*x*)d*x=*8*.*

4*.*[解析] 画出图形(图略)可知,所求的面积*S=*d*x+*d*x-*(*x-*4)d*x=**+**-*(*x-*4)2*=.*

5*.*3*t*2*+*3[解析] (*t*2*+*1)d*x=*(*t*2*+*1)*x**=*2(*t*2*+*1)*+*(*t*2*+*1)*=*3*t*2*+*3*.*

6*.*[解析] 所求面积*S=-*(*-x*2)d*x=*2*x*2d*x=.*

7*.-*ln 2[解析] 根据d*x*的几何意义,可得d*x=-*d*x=-*ln *x**=-*ln 2*.*

本题若做成d*x=*ln *x*则是错误的*.*

8*.S=|*sin *x-*cos *x|*d*x*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)根据定积分的几何意义、定积分的性质、微积分基本定理求解;(2)*a*是常量,确定原函数,建立关于*a*的方程求解*.*

(1)D(2)*-*1[解析] (1)*f*(*x*)d*x=*sin *x*d*x+*d*x*,又sin *x*d*x=-*cos *x**=-*2,d*x*的几何意义是以原点为圆心,1为半径的圆的面积的,故d*x=*π,*∴f*(*x*)d*x=-*2,故选D*.*

(2)*∵*(e*x-*2*ax*)d*x=*(e*x-ax*2)*=*e*-a-*1*=*e,

*∴-a-*1*=*0,*∴a=-*1*.*

变式题(1)B(2)3*+*ln 2[解析] (1)根据微积分基本定理,得sin(*x-φ*)d*x=-*cos(*x-φ*),即*-*cos*+*cos(*-φ*)*=*cos *φ-*sin *φ=*,两边平方,得1*-*sin 2*φ=*,所以sin 2*φ=*1*-=*,故选B*.*

(2)d*x=*(*x*2*+*ln *x*)*=*4*+*ln 2*-*1*-*0*=*3*+*ln 2*.*

例2[思路点拨] (1)由图像求出函数解析式,然后利用定积分求得图中阴影部分的面积;(2)先作出草图(可略),确定被积函数与积分区间,再利用定积分求面积*.*

(1)C(2)[解析] (1)由图像可知,*A=*1,*=-=*,即*T=*π,所以*ω=*2,所以*f*(*x*)*=*sin*.*

所以图中阴影部分的面积*S=-*sind*x=*cos*=*cos*-*cos*==*,故选C*.*

(2)由题意得,曲线*y=*,*y=*2*-x*与*x*轴所围成的封闭图形的面积*S=*d*x+*(2*-x*)d*x=**+**=+*2*-=.*

变式题(1)B(2)C[解析] (1)根据定积分的几何意义可得,阴影部分的面积*S=*(sin *x-*cos *x*)d*x=*(*-*cos *x-*sin *x*)*=*2,故选B*.*

(2)由题意得,直线*l*的方程为*x=*2,

将*y*2*=*8*x*化为*y=±*2*.*

由定积分的几何意义得,所求面积*S=*2(2)d*x=*4d*x=*4*×**=*4*××*2*=.*

例3[思路点拨] 第(1)(2)问只要根据定积分的物理意义求解即可,第(3)问先求函数*v=t+*1在[0,*x*]上的定积分,再求使得这个定积分等于112时的*x*值,*x*的值即为质点的运动时间*.*

解:(1)该质点在前10 s所走的路程*S*1*=*(*t+*1)d*t=t*2*+t**=*60(m)*.*

(2)该质点在第5 s到第10 s所经过的路程*S*2*=*(*t+*1)d*t=t*2*+t**=*42*.*5(m)*.*

(3)设质点到达另一点所需要的时间为*x*,显然*x>*0,则根据题意有(*t+*1)d*t=*112,即*=*112,即*x*2*+x=*112,即*x*2*+*2*x=*224,得*x=*14,则该质点到达另一点所需要的时间是14 s,整个运动过程中的平均速度是*=*8(m/s)*.*

变式题解:由题意得,变力*F*(*x*)在这一过程中所做的功为*F*(*x*)在[8,18]上的定积分,

即*F*(*x*)d*x=-*36*x-*1*=*(*-*36*×*18*-*1)*-*(*-*36*×*8*-*1)*=*(*-*2)*-=.*

从而可得变力*F*(*x*)在这一过程中所做的功为 J*.*

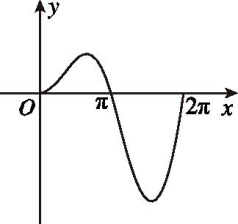


【备选理由】 例1考查定积分的计算,特别是需要结合函数的奇偶性与定积分的几何意义进行分析,有一定的综合性;例2考查根据图像求解函数解析式的能力以及分段计算定积分的方法;例3在知识点的交汇处命题,将利用定积分求面积与几何概型结合起来考查*.*

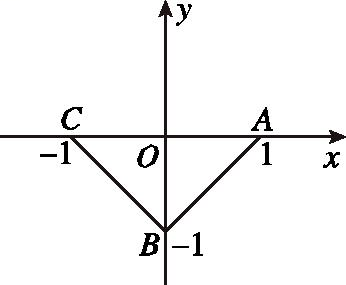
例1[配合例1使用] **[**2019·深圳外国语学校月考**]** 给出下列函数:*①f*(*x*)*=x*sin *x*;*②f*(*x*)*=*e*x+x*;*③f*(*x*)*=*ln(*-x*)*.*存在*a>*0,使得*f*(*x*)d*x=*0的函数是 ()

A*.①②* B*.①③*

C*.②③* D*.①②③*



[解析] B对于*①*,*f*(*x*)*=x*sin *x*是偶函数,当*x*∈(0,π)时,*f*(*x*)*>*0,当*x*∈(π,2π)时,*f*(*x*)*<*0,作出*f*(*x*)*=x*sin *x*在[0,2π]上的图像,如图所示,设曲线*y=x*sin *x*(*x*∈[0,π])与*x*轴围成的图形的面积为*S*1,曲线*y=x*sin *x*(*x*∈[π,2π])与*x*轴围成的图形的面积为*S*2,由图可知*S*1*<S*2,则由定积分的几何意义知,存在*a*∈[π,2π],使得*x*sin *x*d*x=*2*x*sin *x*d*x=*0;对于*②*,*f*(*x*)*=*e*x+x*,则*f*(*x*)d*x=*(e*x+x*)d*x=**=*e*a-*e*-a>*0(*a>*0),即不存在满足题意的*a*;对于*③*,*f*(*x*)*=*ln(*-x*)是奇函数,所以对于任意*a>*0,*f*(*x*)d*x=*0都成立*.*综上可知,*①③*中的函数满足题意*.*故选B*.*



例2[配合例1使用] 已知函数*y=f*(*x*)的图像为如图所示的折线*ABC*,则[(*x+*1)*f*(*x*)]d*x=*()

A*.*2 B*.-*2

C*.*1 D*.-*1

[解析] D由图易知*f*(*x*)*=*

所以[(*x+*1)*f*(*x*)]d*x=*(*x+*1)(*-x-*1)d*x+*(*x+*1)(*x-*1)d*x=*(*-x*2*-*2*x-*1)d*x+*(*x*2*-*1)d*x=**+**=--=-*1,故选D*.*

例3[配合例2使用] 在直线*x=*0,*x=*1,*y=*0,*y=*e*+*1围成的区域内撒一粒豆子,则豆子落入曲线*x=*0,*y=*e*+*1,*y=*e*x+*1围成的区域内的概率为*.*

[答案]

[解析] 由题意,直线*x=*0,*x=*1,*y=*0,*y=*e*+*1所围成的区域是一个长为e*+*1,宽为1的矩形,所以其面积*S=*1*×*(e*+*1)*=*e*+*1*.*

由解得

所以由曲线*x=*0,*y=*e*+*1,*y=*e*x+*1所围成的区域的面积*S*1*=*(e*+*1*-*e*x-*1)d*x=*(e*-*e*x*)d*x=*(e*x-*e*x*)*=*1,

故所求概率*P==.*