**第17讲任意角和弧度制及任意角的三角函数**





1*.*角的概念的推广

(1)定义:角可以看成平面内的一条射线绕着从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形*.*

(2)分类:按旋转方向分为、和零角;按终边位置分为和轴线角*.*

(3)终边相同的角:所有与角*α*终边相同的角,连同角*α*在内,构成的角的集合是*S=　.*

2*.*弧度制的定义和公式

(1)定义:把长度等于的弧所对的圆心角叫作1弧度的角*.*弧度记作rad*.*

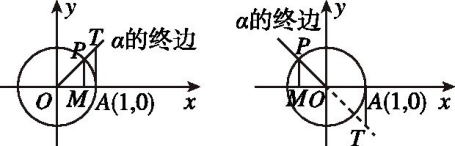
(2)公式:

|  |  |
| --- | --- |
| 角*α*的弧度数的绝对值 | *|α|=*(弧长用*l*表示) |
| 角度与弧度的换算 | *①*1°*=* rad,*②*1 rad*=*° |
| 弧长公式 | 弧长*l=* |
| 扇形面积公式 | *S=lr=|α|r*2 |

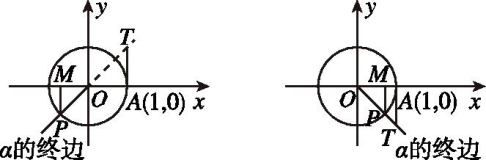
3*.*任意角的三角函数

(1)定义:设*α*是一个任意角,它的终边与单位圆交于点*P*(*x*,*y*),则sin *α=*,cos *α=*,tan *α=*(*x*≠0)*.*

(2)几何表示(单位圆中的三角函数线):图3*-*17*-*1中的有向线段*OM*,*MP*,*AT*分别称为角*α*的、和*.*



(*Ⅰ*) (*Ⅱ*)



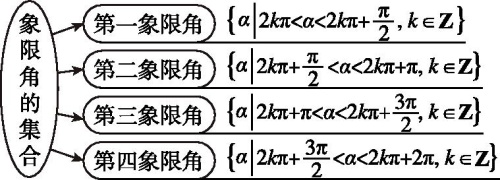
(*Ⅲ*) (*Ⅳ*)

图3*-*17*-*1

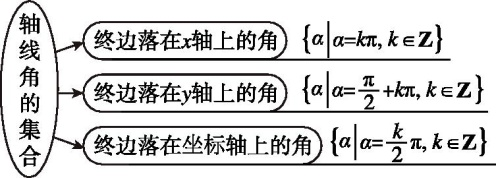
常用结论

象限角与轴线角

(1)象限角



(2)轴线角





题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 终边落在第一象限角平分线上的角的集合是*.*

2*.***[**教材改编**]** (1)67°30'*=*rad;(2)*=* °*.*

3*.***[**教材改编**]** 半径为120 mm的圆上长为144 mm的弧所对圆心角*α*的弧度数是*.*

4*.***[**教材改编**]** 若角*α*的终边经过点*P*(*-*1,2),则sin *α-*cos *α+*tan *α=　　　　.*

题组二常错题

◆索引:对角的范围把握不准;不能据函数值的符号确定角所在的象限;不熟悉角在不同象限时对应的三角函数值的符号;求弧长或者扇形面积把角化为弧度数时出错*.*

5*.*在△*ABC*中,若sin *A=*,则*A=　　　　.*

6*.*已知*P*(*-*,*y*)为角*β*的终边上的一点,且sin *β=*,则*y=　　　　.*

7*.*当*α*为第二象限角时,*-*的值是*.*

8*.*若一扇形的圆心角为72°,半径为20 cm,则扇形的面积为cm2*.*



id:2147499494;FounderCES探究点一角的集合表示及象限角的判定

例1 (1)**[**2018·长春一模**]** 若角*α*的顶点为坐标原点,始边在*x*轴的非负半轴上,终边在直线*y=-x*上,则角*α*的所有取值的集合是 ()

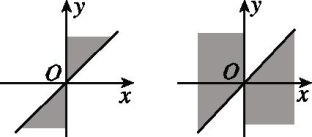
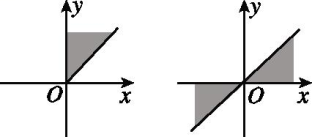
A*.**α**α=*2*k*π*-*,*k*∈Z

B*.*

C*.*

D*.*

(2)集合中的角所表示的范围(阴影部分)是 ()



A　　　　　B　　　　　C　　　　　D

图3*-*17*-*2

[总结反思] (1)角*α*(0≤*α<*2π)与角2*k*π*+α*(*k*∈Z)的终边相同;

(2)要求角*β*所在的象限,只需将角*β*表示成2*k*π*+α*(*k*∈Z,0≤*α<*2π)的形式,则角*α*所在的象限即为角*β*所在的象限*.*

变式题 (1)设集合*M=*,*N=*,那么 ()

A*.M=N* B*.M*⊆*N*

C*.N*⊆*M* D*.M*∩*N=*⌀

(2)若角*α*的终边在*x*轴的上方,则是第象限角*.*

id:2147499522;FounderCES探究点二扇形的弧长、面积公式

例2 (1)若圆弧长度等于该圆内接等腰直角三角形的周长,则其圆心角的弧度数是*.*

(2)已知扇形的圆心角为60°,其弧长为π,则此扇形的面积为*.*

[总结反思] 应用弧度制解决问题的策略:(1)利用扇形的弧长和面积公式解题时,要注意角的单位必须是弧度;(2)涉及求扇形面积最大值的问题,常转化为二次函数的最值问题,利用配方法使问题得到解决;(3)在解决弧长问题和扇形面积问题时,要合理地利用圆心角所在的三角形*.*

变式题 (1)将表的分针拨快10分钟,则分针旋转过程中形成的角的弧度数是 ()

A*.* B*.*

C*.-* D*.-*

(2)若扇形的周长为18,则扇形面积取得最大值时,扇形圆心角的弧度数是*.*

id:2147499529;FounderCES探究点三三角函数的定义

角度1三角函数定义的应用

例3 (1)**[**2018·济南二模**]** 已知角*α*的终边经过点*P*(*m*,*-*2*m*),其中*m*≠0,则sin *α+*cos *α*等于 ()

A*.-* B*.±*

C*.-* D*.±*

(2)**[**2018·北京通州区三模**]** 在平面直角坐标系*xOy*中,角*α*以*Ox*为始边,终边位于第四象限,且与单位圆交于点,则sin *α=　　　　.*

[总结反思] 三角函数的定义主要应用于两方面:

(1)已知角的终边上一点*P*的坐标,则可先求出点*P*到原点的距离,然后用三角函数定义求解三角函数值*.*特别地,若角*α*的终边落在某条直线上,一般要分类讨论*.*

(2)已知角*α*的某个三角函数值,可依据三角函数值设出角*α*终边上某一符合条件的点的坐标来解决相关问题*.*

角度2三角函数值的符号判定

例4 (1)若sin *θ*·cos *θ<*0,*>*0,则角*θ*是 ()

A*.*第一象限角 B*.*第二象限角

C*.*第三象限角 D*.*第四象限角

(2)若*α*为第二象限角,则cos 2*α*,cos,,中,其值必为正的有 ()

A*.*0个 B*.*1个 C*.*2个 D*.*3个

[总结反思] 判断三角函数值的符号,关键是确定角的终边所在的象限,然后结合三角函数值在各象限的符号确定所求三角函数值的符号,特别要注意不要忽略角的终边在坐标轴上的情况*.*

角度3三角函数线的应用

例5 **[**2018·嘉兴模拟**]** 已知*α*∈,*a=*sin *α*,*b=*cos *α*,*c=*tan *α*,那么*a*,*b*,*c*的大小关系是 ()

A*.a>b>c* B*.b>a>c*

C*.a>c>b* D*.c>a>b*

[总结反思] 利用三角函数线比较大小或解三角不等式,通常采用数形结合的方法,一般来说sin *x*≥*b*,cos *x*≥*a*,只需作直线*y=b*,*x=a*与单位圆相交,连接原点与交点即得角的终边所在的位置,此时再根据方向即可确定相应的*x*的范围*.*

变式题 函数*f*(*x*)*=+*lnsin *x-*的定义域为*.*

第17讲任意角和弧度制及任意角的三角函数

考试说明 1*.*任意角、弧度制

(1)了解任意角的概念和弧度制的概念*.*

(2)能进行弧度与角度的互化*.*

2*.*理解任意角三角函数(正弦、余弦、正切)的定义*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*(1)端点(2)正角负角象限角(3){*β|β=α+k*·360°,*k*∈Z}

2*.*(1)半径长(2)*|α|r*

3*.*(1)*y　x*(2)余弦线正弦线正切线

对点演练

1*.*{*α|α=k*·360°*+*45°,*k*∈Z}[解析] 终边落在第一象限角平分线上的最小正角为45°,所以与其终边相同的角的集合为{*α|α=k*·360°*+*45°,*k*∈Z}*.*

2*.*(1)π(2)15[解析] (1)67°30'*=*67*.*5*×=*(rad);(2)*=×*°*=*15°*.*

3*.*1*.*2[解析] 根据圆心角弧度数的计算公式得,*α==*1*.*2*.*

4*.*[解析] *r==*,所以sin *α==*,cos *α=-=-*,tan *α==-*2,所以sin *α-*cos *α+*tan *α=.*

5*.*或π[解析] 因为0*<A<*π且sin *A=*,所以*A=*或*A=*π*.*

6*.*[解析] 因为*r=*,所以由三角函数的定义可得*=*,解得*y=.*

7*.*2[解析] *∵α*为第二象限角,*∴*sin *α>*0,cos *α<*0,

*∴-=*1*-*(*-*1)*=*2*.*

8*.*80π[解析] 72°*=* rad,*∴S*扇形*=αr*2*=××*202*=*80π(cm2)*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)先求出直线*y=-x*的倾斜角,再根据终边相同的角的要求得出角*α*的取值集合;(2)对*k*分奇数和偶数两种情况分析角*α*所表示的范围*.*

(1)D(2)C[解析] (1)因为直线*y=-x*的倾斜角是,所以终边落在直线*y=-x*上的角*α*的取值集合为*α**α=k*π*-*,*k*∈Z*.*故选D*.*

(2)当*k=*2*n*(*n*∈Z)时,2*n*π*+*≤*α*≤2*n*π*+*,此时*α*表示的范围与≤*α*≤表示的范围一样;当*k=*2*n+*1(*n*∈Z)时,2*n*π*+*π*+*≤*α*≤2*n*π*+*π*+*,此时*α*表示的范围与≤*α*≤表示的范围一样*.*故选C*.*

变式题(1)B(2)一或三[解析] (1)*M*中,*x=*·180°*+*45°*=k*·90°*+*45°*=*45°·(2*k+*1),*k*∈Z,2*k+*1是奇数;*N*中,*x=*·180°*+*45°*=k*·45°*+*45°*=*45°·(*k+*1),*k*∈Z,*k+*1是整数*.*综上可知,必有*M*⊆*N.*

(2)*∵*角*α*的终边在*x*轴的上方,

*∴k*·360°*<α<*180°*+k*·360°,*k*∈Z,*∴k*·180°*<<*90°*+k*·180°,*k*∈Z*.*

当*k=*2*n*(*n*∈Z)时,

有*n*·360°*<<*90°*+n*·360°,可知为第一象限角;

当*k=*2*n+*1(*n*∈Z)时,

有*n*·360°*+*180°*<<*270°*+n*·360°,可知为第三象限角*.*

例2[思路点拨] (1)找出弧长与半径,用弧度制公式求解;(2)设扇形的半径为*r*,根据弧长公式可求出*r*的值,再由扇形的面积公式即可得出结论*.*

(1)2*+*2(2)[解析] (1)设圆的半径为*r*,则圆内接等腰直角三角形的斜边长为2*r*,一条直角边长为*r*,所以周长为2*r+*2*r*,所以圆弧所对圆心角的弧度数是*=*2*+*2*.*

(2)设扇形的半径为*r*,

*∵*扇形的圆心角为60°,它的弧长为π,

*∴=*π,解得*r=*3,

*∴S*扇形*=×*π*×*3*=.*

变式题(1)C(2)2[解析] (1)将表的分针拨快应按顺时针方向旋转,为负角,故选项A,B不正确;又因为拨快10分钟,故应转过的角的绝对值大小为周角的,即为*-×*2π*=-.*

(2)设扇形的半径为*r*,弧长为*l*,则*l+*2*r=*18,即*l=*18*-*2*r*,所以扇形面积*S=l*·*r=*(18*-*2*r*)·*r=-r*2*+*9*r*,当*r=*时,*S*取得最大值,此时*l=*18*-*2*r=*9,所以圆心角的弧度数是*==*2*.*

例3[思路点拨] 利用任意角的三角函数的定义求解*.*

(1)B(2)*-*[解析] (1)*∵*角*α*的终边经过点*P*(*m*,*-*2*m*),其中*m*≠0,*∴r===*·*|m|.*

当*m>*0时,sin *α==-*,cos *α==*,*∴*sin *α+*cos *α=-*;

当*m<*0时,sin *α==*,cos *α==-*,*∴*sin *α+*cos *α=.*

*∴*sin *α+*cos *α=±.*

(2)*∵*角*α*以*Ox*为始边,终边位于第四象限,且与单位圆交于点,*∴y=-=-*,

*∴*sin *α===-.*

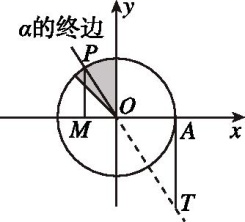
例4[思路点拨] (1)根据条件确定sin *θ*,cos *θ*的符号,再确定*θ*所在的象限;(2)根据*α*为第二象限角,分别确定2*α*,的终边所在的象限,再根据象限确定对应函数值的符号*.*

(1)D(2)A[解析] (1)由*>*0,得*>*0,所以cos *θ>*0*.*又sin *θ*·cos *θ<*0,所以sin *θ<*0,所以*θ*为第四象限角,故选D*.*

(2)由题意知,2*k*π*+<α<*2*k*π*+*π(*k*∈Z),则4*k*π*+*π*<*2*α<*4*k*π*+*2π(*k*∈Z),

所以2*α*的终边在第三、第四象限或*y*轴的负半轴上,所以sin 2*α<*0,cos 2*α*可正可负也可为零*.*因为*k*π*+<<k*π*+*(*k*∈Z),所以的终边在第一或第三象限,所以cos可正可负*.*故选A*.*

例5[思路点拨] 作出位于区间上的角*α*的三角函数线,利用三角函数线比较大小*.*



A[解析] 方法一:如图,作出位于区间上的角*α*的三角函数线,则角*α*的正弦线、余弦线、正切线分别为*MP*,*OM*,*AT*,显然有sin *α>*cos *α>*tan *α*,即*a>b>c.*

方法二:此题也可采用特值法*.∵α*∈,*∴*可取*α=*,此时*a=*sin *α=*,*b=*cos *α=-*,*c=*tan *α=-*,即*a>b>c*,故选A*.*

变式题*x*2*k*π*+*≤*x<*2*k*π*+*,*k*∈Z[解析] 由题意得,自变量*x*应满足即则如图中阴影部分所示,不等式组的解集为*x*2*k*π*+*≤*x<*2*k*π*+*,*k*∈Z*.*



【备选理由】 例1考查判断弧度制下的角所在的象限问题;例2考查弧长公式与等差数列的综合问题;例3强化对三角函数定义的理解与应用,并给出了方法二,即利用同角三角函数的基本关系也可求解;例4考查三角函数线的基本应用*.*

例1[配合例1使用] 若角*α=-*4,则*α*的终边在 ()

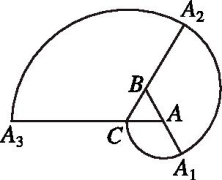
A*.*第一象限

B*.*第二象限

C*.*第三象限

D*.*第四象限

[解析] B因为*-<α=-*4*<-*π,所以依据负角的定义可知*α*的终边在第二象限*.*故选B*.*



例2[配合例2使用] 如图所示,一条螺旋线是用以下方法画成的:△*ABC*是边长为1的正三角形,曲线*CA*1,*A*1*A*2,*A*2*A*3分别是以*A*,*B*,*C*为圆心,以*AC*,*BA*1,*CA*2为半径画的弧,曲线*CA*1*A*2*A*3称为螺旋线旋转一圈,然后又以*A*为圆心,*AA*3为半径画弧……这样画到第*n*圈,则所得整条螺旋线的长度*ln=　　　　.*(用π表示即可)

[答案] *n*(3*n+*1)π

[解析] 设第*n*段弧的弧长为*an*,由弧长公式可得*a*1*=*,*a*2*=×*2,*a*3*=×*3,…,

所以数列{*an*}是以为首项,为公差的等差数列*.*画到第*n*圈,有3*n*段弧,故所得整条螺旋线的长度*ln=a*1*+a*2*+a*3*+*…*+a*3*n=×*(1*+*2*+*3*+*…*+*3*n*)*=n*(3*n+*1)π*.*

例3[配合例3使用] 若点*P*(3,*y*)是角*α*终边上的一点,且满足*y<*0,cos *α=*,则tan *α=* ()

A*.-* B*.*

C*.* D*.-*

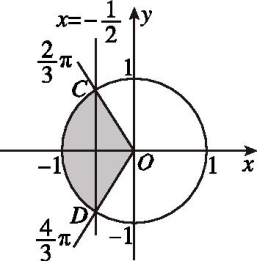
[解析] D方法一:由题意知,*r=*,所以cos *α==*,解得*y=-*4或*y=*4(舍),所以tan *α=-.*

方法二:因为点*P*(3,*y*)是角*α*终边上的一点,且满足*y<*0,cos *α=*,

所以sin *α=-=-*,

所以tan *α==-*,故选D*.*

例4[配合例5使用] **[**2018·北京首师大附中月考**]** 已知cos *α*≤*-*,则角*α*的取值范围为*.*



[答案] *α*2*k*π*+*π≤*α*≤2*k*π*+*π,*k*∈Z

[解析] 如图所示,作出直线*x=-*,交单位圆于*C*,*D*两点,连接*OC*,*OD*,则*OC*与*OD*围成的区域(图中阴影部分)即为角*α*终边的范围,故满足条件的角*α*的取值范围为*α*2*k*π*+*π≤*α*≤2*k*π*+*π,*k*∈Z*.*