**第23讲正弦定理和余弦定理**





id:2147499974;FounderCES

1*.*正弦定理和余弦定理

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 定理 | 正弦定理 | 余弦定理 |
| 公式 | *=　　　　　=　　　　　=*2*R*(其中*R*是△*ABC*的外接圆的半径) | *a*2*=*,  *b*2*=*,  *c*2*=* |
| 定理  的变  形 | *a=*2*R*sin *A*,*b=*,*c=*,*a∶b∶c=* | cos *A=*,  cos *B=*,  cos *C=* |

2*.*在△*ABC*中,已知*a*,*b*和*A*时,解的情况如下:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *A*为锐角 | | | *A*为钝角  或直角 |
| 图形 |  |  |  |  |
| 关系式 | *a=b*sin *A* | *b*sin *A<a<b* | *a*≥*b* | *a>b* |
| 解的个数 |  |  |  |  |

3*.*三角形面积公式

(1)*S=ah*(*h*表示边*a*上的高);

(2)*S=bc*sin *A=ac*sin *B=ab*sin *C*;

(3)*S=r*(*a+b+c*)(*r*为三角形的内切圆半径)*.*

常用结论

1*.*三角形内角和定理:在△*ABC*中,*A+B+C=*π;

变形:*=-.*

2*.*三角形中的三角函数关系:

(1)sin(*A+B*)*=*sin *C*;(2)cos(*A+B*)*=-*cos *C*;

(3)sin *=*cos ;(4)cos *=*sin *.*

3*.*三角形中的射影定理

在△*ABC*中,*a=b*cos *C+c*cos *B*;*b=a*cos *C+c*cos *A*;*c=b*cos *A+a*cos *B.*

id:2147500004;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 在△*ABC*中,*B=*45°,*C=*60°,*c=*2,则最短边的边长等于*.*

2*.***[**教材改编**]** 在△*ABC*中,已知*a=*5,*b=*2,*C=*30°,则*c=　　　　.*

3*.***[**教材改编**]** 在△*ABC*中,已知*a*2*-c*2*+b*2*=ab*,则*C*等于*.*

4*.***[**教材改编**]** 在△*ABC*中,已知*a=*3,*b=*2,cos *C=*,则△*ABC*的面积为*.*

题组二常错题

◆索引:在△*ABC*中角与角的正弦的关系弄错;利用正弦定理求角时解的个数弄错;余弦定理、面积公式中边与角的三角函数的对应

关系弄错;三角形中的三角函数关系弄错*.*

5*.*在△*ABC*中,若sin *A=*sin *B*,则*A*,*B*的关系为;若sin *A>*sin *B*,则*A*,*B*的关系为*.*

6*.*在△*ABC*中,若*A=*60°,*a=*4,*b=*4,则*B*等于*.*

7*.*在△*ABC*中,*a=*2,*b=*3,*C=*60°,则*c=*,△*ABC*的面积等于*.*

8*.*在△*ABC*中,*a*,*b*,*c*分别为内角*A*,*B*,*C*所对的边,若*c*cos *A=b*,则△*ABC*为三角形*.*



id:2147500018;FounderCES探究点一利用正弦、余弦定理解三角形

例1 在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c*,已知*a=*,且*b*2*+c*2*=*3*+bc.*

(1)求角*A*的大小;

(2)求*b*sin *C*的最大值*.*

[总结反思] (1)正弦定理、余弦定理的作用是在已知三角形部分元素的情况下求解其余元素,基本思想是方程思想,即根据正弦定理、余弦定理列出关于未知元素的方程,通过解方程求得未知元素;(2)正弦定理、余弦定理的另一个作用是实现三角形边角关系的互化,解题时可以把已知条件化为角的三角函数关系,也可以把已知条件化为三角形边的关系;(3)涉及最值问题时,常利用基本不等式或表示为三角形的某一内角的三角函数形式求解*.*

变式题 (1)在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c*,已知*a=*2,*c=*2,1*+=*,则*C=* ()

A*.* B*.*

C*.*或 D*.*

(2)**[**2018·衡水中学月考**]** 已知△*ABC*满足*BC*·*AC=*2,若*C=*,*=*,则*AB=　　　　.*

id:2147500025;FounderCES探究点二利用正弦、余弦定理判定三角形的形状

例2 已知在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c*,且*b*2*+c*2*=a*2*+bc.*若sin *B*·sin *C=*sin2*A*,则△*ABC*的形状是 ()

A*.*等腰三角形 B*.*直角三角形

C*.*等边三角形 D*.*等腰直角三角形

[总结反思] 判断三角形的形状主要从两个角度考虑:(1)化边:通过因式分解、配方等得出边的相应关系,从而判断三角形的形状;(2)化角:通过三角恒等变换,得出内角的关系,从而判断三角形的形状,此时要注意应用*A+B+C=*π这个结论*.*

变式题 在△*ABC*中,*a*,*b*,*c*分别为内角*A*,*B*,*C*所对的边,若*=*,则△*ABC*是 ()

A*.*直角三角形

B*.*等腰三角形

C*.*等腰直角三角形

D*.*直角三角形或等腰三角形

id:2147500032;FounderCES探究点三与三角形面积有关的问题

例3 **[**2018·洛阳三模**]** 在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c*且*b*sin *B+*(*c-b*)sin *C=a*sin *A.*

(1)求角*A*的大小;

(2)若sin *B*sin *C=*,且△*ABC*的面积为2,求*a.*

[总结反思] (1)若已知一个角(角的大小或该角的正弦值、余弦值),一般结合题意求夹这个角的两边或两边之积,再代入公式求解;(2)若已知三边,可先求一个角的余弦值,再求正弦值,最后代入公式得面积;(3)若求面积的最值,一般表示为一个内角的三角函数,利用三角函数的性质求解,也可结合基本不等式求解*.*

变式题 **[**2018·黄冈中学月考**]** 在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c*,且满足*bc=*1,*a*2*-bc=*(*b-c*)2*.*

(1)求△*ABC*的面积;

(2)若cos *B*cos *C=*,求△*ABC*的周长*.*

第23讲正弦定理和余弦定理

考试说明 1*.*通过对任意三角形边长和角度的探索,掌握正弦定理、余弦定理*.*

2*.*能利用正弦定理和余弦定理解决一些简单的三角形度量问题*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.　　b*2*+c*2*-*2*bc*cos *A　c*2*+a*2*-*2*ac*cos *B　a*2*+b*2*-*2*ab*cos *C*2*R*sin *B*2*R*sin *C*sin *A∶*sin *B∶*sin *C*

2*.*一解两解一解一解

对点演练

1*.*[解析] 易知*A=*75°,角*B*最小,所以边*b*最短*.*由正弦定理*=*,得*=*,解得*b=.*

2*.*[解析] 由余弦定理得*c*2*=a*2*+b*2*-*2*ab*cos *C=*52*+*(2)2*-*2*×*5*×*2cos 30°*=*7,所以*c=.*

3*.*60°[解析] 因为cos *C==*,所以*C=*60°*.*

4*.*4[解析] 因为sin *C==*,所以△*ABC*的面积*S=ab*sin *C=*4*.*

5*.A=B　A>B*[解析] 根据正弦定理知,在△*ABC*中有sin *A=*sin *B*⇔*a=b*⇔*A=B*,sin *A>*sin *B*⇔*a>b*⇔*A>B.*

6*.*45°[解析] 由正弦定理知*=*,则sin *B===.*又*a>b*,所以*A>B*,所以*B*为锐角,故*B=*45°*.*

7*.*[解析] 易知*c==*,△*ABC*的面积等于*×*2*×*3*×=.*

8*.*直角[解析] *∵c*cos *A=b*,*∴*由正弦定理得sin *C*cos *A=*sin *B=*sin(*A+C*)*=*sin *A*cos *C+*cos *A*sin *C*,

整理得sin *A*cos *C=*0,

*∵*sin *A*≠0,

*∴*cos *C=*0,即*C=*90°,则△*ABC*为直角三角形*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)由余弦定理可得出;(2)用正弦定理将*b*sin *C*表示为关于*C*的三角函数,再结合*C*的取值范围求最大值*.*

解:(1)由*a=*,*b*2*+c*2*=*3*+bc*,得*==*,

即cos *A=*,又*∵A*∈(0,π),*∴A=.*

(2)由正弦定理,得*b=*sin *B=*2sin *B*,

*∴b*sin *C=*2sin *C*sin *B=*2sin *C*sin*=*2sin *C=*sin2*C+*sin *C*cos *C=*sin 2*C-*cos 2*C+=*sin*+.∵*0*<C<*,*∴-<*2*C-<*,

*∴*当sin*=*1,即*C=*时,*b*sin *C*取得最大值*.*

变式题(1)B(2)[解析] (1)由1*+=*得1*+=*,

整理得sin *B*cos *A+*sin *A*cos *B=*2sin *C*cos *A*,

所以sin(*A+B*)*=*sin *C=*2sin *C*cos *A*,所以cos *A=.*

又因为*A*∈(0,π),所以sin *A=.*

由正弦定理*=*,得sin *C==*,所以*C=.*故选B*.*

(2)由正弦定理可得*=*,因为*A+B+C=*π,所以cos(*A+B*)*=-*cos *C*,

则由已知条件可知*=-=*,又*BC*·*AC=*2,

可得*BC=*,*AC=*2,由余弦定理得*AB===.*

例2[思路点拨] 由*b*2*+c*2*=a*2*+bc*及余弦定理可得*A=*,由sin *B*·sin *C=*sin2*A*及正弦定理可得*bc=a*2,结合*b*2*+c*2*=a*2*+bc*可得*b=c.*

C[解析] 在△*ABC*中,*∵b*2*+c*2*=a*2*+bc*,*∴*cos *A===.*

又*∵A*∈(0,π),*∴A=.*

*∵*sin *B*·sin *C=*sin2*A*,*∴bc=a*2*.*

又由*b*2*+c*2*=a*2*+bc*,得(*b-c*)2*=a*2*-bc=*0,*∴b=c*,

*∴*△*ABC*的形状是等边三角形*.*故选C*.*

变式题D[解析] 由条件可得*=*,

由正弦定理可得*=*,

整理可得*a*cos *A=b*cos *B*,

所以sin *A*cos *A=*sin *B*cos *B*,即sin 2*A=*sin 2*B*,所以2*A=*2*B*或2*A=*π*-*2*B*,

所以*A=B*或*A+B=*,

所以△*ABC*是等腰三角形或直角三角形*.*

例3[思路点拨] (1)利用已知条件,结合正弦定理以及余弦定理即可求出角*A*的大小;(2)利用正弦定理以及三角形的面积公式求解*a.*

解:(1)由*b*sin *B+*(*c-b*)sin *C=a*sin *A*及正弦定理得*b*2*+*(*c-b*)*c=a*2,即*b*2*+c*2*-bc=a*2,由余弦定理得cos *A==*,又*∵A*∈(0,π),*∴A=.*

(2)由正弦定理*==*,可得*b=*,*c=*,

*∴S*△*ABC=bc*sin *A=*···sin *A==*2,

又sin *B*sin *C=*,sin *A=*,*∴a*2*=*2,*∴a=*4*.*

变式题解:(1)由*a*2*-bc=*(*b-c*)2可得*b*2*+c*2*-a*2*=bc*,*∴*cos *A=*,又*∵A*∈(0°,180°),*∴*sin *A=*,

*∴S*△*ABC=bc*sin *A=.*

(2)*∵*cos *A=-*cos(*B+C*)*=*,*∴*sin *B*sin *C-*cos *B*cos *C=*,

又cos *B*cos *C=*,*∴*sin *B*sin *C=.*

由正弦定理得*==*,*∴a=*1,

*∴b*2*+c*2*-a*2*=*(*b+c*)2*-*2*bc-*1*=*(*b+c*)2*-*3*.*

又*∵b*2*+c*2*-a*2*=*1,*∴b+c=*2,

*∴*△*ABC*的周长为*a+b+c=*1*+*2*=*3*.*

id:2147507795;FounderCES

【备选理由】 例1考查了利用正弦、余弦定理解三角形;例2考查了利用二倍角公式、余弦定理以及勾股定理判断三角形的形状;例3考查了求三角形的面积的最大值;例4考查了与三角形面积有关的问题,涉及三角形的中线以及利用基本不等式求解边的最值等问题*.*

例1[配合例1使用] **[**2018·莆田六中月考**]** 在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*,*c*,且*c*(sin *C-*sin *A*)*=*(sin *A+*sin *B*)(*b-a*)*.*

(1)求角*B*的大小;

(2)若*c=*8,点*M*,*N*是线段*BC*的两个三等分点,且*BM=BC*,*=*2,求*AM*的值*.*

解:(1)*∵c*(sin *C-*sin *A*)*=*(sin *A+*sin *B*)(*b-a*),*∴*由正弦定理得*c*2*-ca=b*2*-a*2,

*∴a*2*+c*2*-b*2*=ca*,*∴*cos *B==*,又0*<B<*π,*∴B=.*

(2)设*BM=x*,则*BN=*2*x*,*AN=*2*x*,

又*B=*,*AB=*8,*∴*在△*ABN*中,由余弦定理得12*x*2*=*64*+*4*x*2*-*2*×*8*×*2*x*cos,解得*x=*2(负值舍去),即*BM=*2,

*∴*在△*ABM*中,由余弦定理得*AM====*2*.*

例2[配合例2使用] 已知在△*ABC*中,*a*,*b*,*c*分别为内角*A*,*B*,*C*的对边,且cos2*=+*,则△*ABC*为 ()

A*.*正三角形

B*.*直角三角形

C*.*等腰直角三角形

D*.*等腰三角形

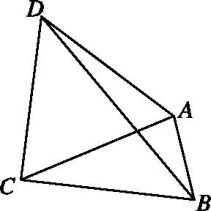
[解析] B*∵*cos2*=+*,

*∴=+*,即cos *A=*,

*∴=*,则*c*2*=a*2*+b*2,

故△*ABC*为直角三角形,故选B*.*

例3[配合例3使用] **[**2018·三明一中月考**]** 如图所示,在平面四边形*ABCD*中,*AB=*1,*CB=*2,△*ACD*为正三角形,则△*BCD*的面积的最大值为*.*



[答案] 1*+*

[解析] 在△*ABC*中,设∠*ABC=α*,∠*ACB=β*,

由余弦定理可知*AC*2*=*12*+*22*-*2*×*1*×*2cos *α=*5*-*4cos *α.*

*∵*△*ACD*为正三角形,*∴CD*2*=*5*-*4cos *α*,

由正弦定理得*=*,

*∴AC·*sin *β=*sin *α*,*∴CD·*sin *β=*sin *α.*

*∵*(*CD·*cos *β*)2*=CD*2(1*-*sin2*β*)*=CD*2*-*sin2*α*

*=*5*-*4cos *α-*sin2*α=*(2*-*cos *α*)2,*β<*∠*BAC*,

*∴β*为锐角,*CD·*cos *β=*2*-*cos *α*,

*∴S*△*BCD=×*2*·CD*sin*=CD*sin*=CD·*cos *β+CD·*sin *β=×*(2*-*cos *α*)*+*sin *α=+*sin,

*∴*当*α=*时,△*BCD*的面积最大,最大值为1*+.*

例4[配合例3使用] **[**2018·三明一中月考**]** 已知△*ABC*的内角*A*,*B*,*C*所对的边分别为*a*,*b*, *c*,且△*ABC*的面积为*c*(*a*sin *A+b*sin *B-c*sin *C*)*.*

(1)求角*C*的大小;

(2)若*D*为*AB*的中点,且*c=*2,求*CD*的最大值*.*

解:(1)依题意得,*ab*sin *C=c*(*a*sin *A+b*sin *B-c*sin *C*),

由正弦定理得,*abc=c*(*a*2*+b*2*-c*2),即*a*2*+b*2*-c*2*=ab*,

由余弦定理得,cos *C===*,

又因为*C*∈(0,π),所以*C=.*

(2)在△*ACD*中,

*AC*2*=AD*2*+CD*2*-*2*AD·CD*cos∠*ADC*,即*b*2*=*1*+CD*2*-*2*CD*cos∠*ADC*,

在△*BCD*中,

*BC*2*=BD*2*+CD*2*-*2*BD·CD*cos∠*BDC*,即*a*2*=*1*+CD*2*-*2*CD*cos∠*BDC.*

因为∠*ADC+*∠*BDC=*π,所以cos∠*ADC=-*cos∠*BDC*,所以*CD*2*=*(*a*2*+b*2)*-*1*.*

由(1)及*c=*2得,*a*2*+b*2*-*4*=ab*≤(*a*2*+b*2),当且仅当*a=b=*2时,等号成立,

所以(*a*2*+b*2)≤4,所以*CD*2*=*(*a*2*+b*2)*-*1≤3,即*CD*≤,

所以*CD*的最大值为*.*