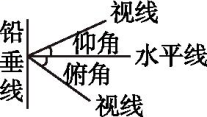
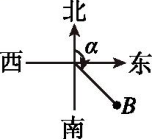
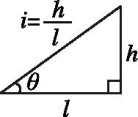
**第24讲正弦定理和余弦定理的应用**







1*.*仰角和俯角:与目标线在同一铅垂平面内的和目标视线的夹角,目标视线在水平视线的叫仰角,目标视线在水平视线的叫俯角,如图3*-*24*-*1(a)所示*.*

1. (b) (c) (d)

图3*-*24*-*1

2*.*方位角:指从顺时针转到目标方向线的水平角,如图3*-*24*-*1(b)中*B*点的方位角为*α.*

3*.*方向角:相对于某正方向的,如北偏东*α*,即由正北方向顺时针旋转*α*到达目标方向(如图3*-*24*-*1(c)),其他方向角类似*.*

4*.*坡角:坡面与所成的二面角的度数(如图3*-*24*-*1(d)所示,坡角为*θ*)*.*

坡比:坡面的铅直高度与之比(如图3*-*24*-*1(d)所示,*i*为坡比)*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 海上有*A*,*B*,*C*三个小岛,*A*,*B*相距5海里,从*A*岛望*C*和*B*成45°视角,从*B*岛望*C*和*A*成75°视角,则*B*,*C*两岛间的距离是海里*.*

2*.***[**教材改编**]** 某人向正东方向走了*x* km后,向右转150°,然后沿新方向走了3 km,结果他离出发点恰好 km,那么*x*的值为*.*

3*.***[**教材改编**]** 如图3*-*24*-*2所示,长为3*.*5 m的木棒*AB*斜靠在石堤旁,木棒的一端*A*在离堤足*C*处1*.*4 m的地面上,另一端*B*在离堤足*C*处2*.*8 m的石堤上,石堤的倾斜角为*α*,则tan *α*等于*.*

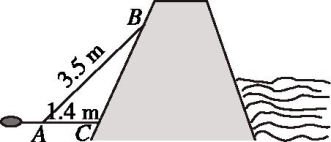


图3*-*24*-*2

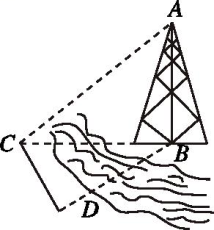


图3*-*24*-*3

4*.***[**教材改编**]** 如图3*-*24*-*3所示,测量河对岸的塔高*AB*时,可以选与塔底*B*在同一水平面内的两个观测点*C*与*D.*现测得∠*BCD=α*,∠*BDC=β*,*CD=s*,并在点*C*处测得塔顶*A*的仰角为*θ*,则塔高*AB=　　　　.*

题组二常错题

◆索引:仰角、俯角概念不清;方向角概念不清;方位角概念不清;不能将空间问题转化为解三角形问题*.*

5*.*在某次测量中,在*A*处测得同一半平面方向的*B*点的仰角是60°,*C*点的俯角是70°,则∠*BAC=　　　　.*

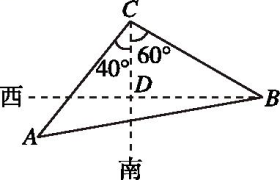


图3*-*24*-*4

6*.*如图3*-*24*-*4所示,两座灯塔*A*和*B*与海岸观察站*C*的距离相等,灯塔*A*在观察站南偏西40°的方向,灯塔*B*在观察站南偏东60°的方向,则灯塔*A*相对于灯塔*B*的方向角是*.*

7*.*已知点*A*在点*B*南偏西20°的方向,若以点*B*为基点,则点*A*的方位角是*.*

8*.*某起重装置的示意图如图3*-*24*-*5所示,已知支杆*BC=*10 m,吊杆*AC=*15 m,吊索*AB=*5 m,则起吊的货物与岸的距离*AD*为m*.*

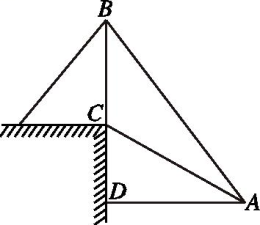


图3*-*24*-*5



id:2147500130;FounderCES探究点一测量距离问题

例1 **[**2018·南京师大附中月考**]** 如图3*-*24*-*6所示,*A*,*B*,*C*三个警亭有直道相通,已知*A*在*B*的正北方向6千米处,*C*在*B*的正东方向6千米处*.*

(1)若警员甲从*C*出发,沿*CA*行至点*P*处,此时∠*CBP=*45°,求*P*,*B*两点间的距离*.*

(2)若警员甲从*C*出发沿*CA*前往*A*,警员乙从*A*出发沿*AB*前往*B*,两人同时出发,甲的速度为3千米*/*时,乙的速度为6千米*/*时*.*两人通过专用对讲机保持联系,乙到达*B*后原地等待,直到甲到达*A*时任务结束*.*若对讲机的有效通话距离最大为9千米,试求两人通过对讲机能保持联系的总时长*.*

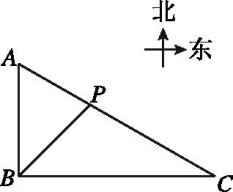


图3*-*24*-*6

[总结反思] 求距离即是求一条线段的长度,把该线段看作某个三角形的边,根据已知条件求出该三角形的部分元素后,即可使用正弦定理或者余弦定理求该边的长度*.*

变式题 **[**2018·青岛二模**]** 如图3*-*24*-*7所示,*A*,*B*两点在河的两岸,一名测量者在*A*的同侧河岸边选定一点*C*,测出*A*,*C*两点的距离为50 m,∠*ACB=*45°,∠*CAB=*105°,则*A*,*B*两点间的距离为()

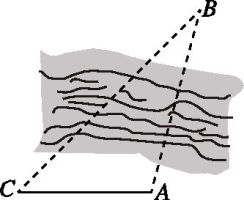


图3*-*24*-*7

A*.*50 m

B*.*50 m

C*.*25 m

D*.* m

id:2147500151;FounderCES探究点二测量高度问题

例2 **[**2018·衡水中学月考**]** 如图3*-*24*-*8所示,在山顶有一座信号塔*CD*(*CD*所在的直线与地平面垂直),在山脚*A*处测得塔尖*C*的仰角为*α*,沿倾斜角为*θ*的山坡向上前进*l*米后到达*B*处,测得*C*的仰角为*β.*

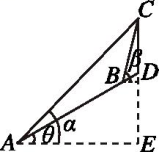


图3*-*24*-*8

(1)求*BC*的长;

(2)若*l=*24,*α=*45°,*β=*75°,*θ=*30°,求信号塔*CD*的高度*.*

[总结反思] 高度也是两点之间的距离,其解法同求解水平面上两点间距离的方法是类似的,基本思想是把要求解的高度(某线段的长度)纳入到一个可解的三角形中,使用正、余弦定理或其他相关知识求出该高度*.*

变式题 如图3*-*24*-*9所示,为了测量一棵树的高度,在地上选取*A*,*B*两点,从*A*,*B*两点分别测得树尖的仰角为30°,45°,且*A*,*B*两点之间的距离为60 m,则树的高度为()

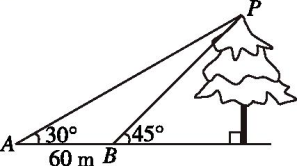


图3*-*24*-*9

A*.*(30*+*30) m

B*.*(30*+*15) m

C*.*(15*+*30) m

D*.*(15*+*3) m

id:2147500172;FounderCES探究点三测量角度问题

例3 如图3*-*24*-*10所示,某渔船在航行中不幸遇险,发出呼救信号,某舰艇在*A*处获悉后,立即测出该渔船在方位角(从正北方向顺时针转到目标方向线的水平角)为40°,距离为15海里的*C*处,并测得渔船正沿方位角为100°的方向,以15海里*/*时的速度航行,该舰艇立即以15海里*/*时的速度沿直线前去营救,若舰艇与渔船恰好在*B*处相遇,求舰艇与渔船相遇所需的时间和舰艇的航向*.*

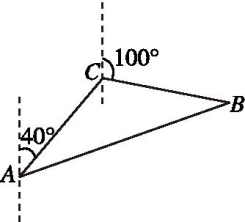


图3*-*24*-*10

[总结反思] 测量“角度”即是求一个角的大小,把该角看作某个三角形的内角,根据已知条件求出该三角形的一些元素后,使用正弦定理或者余弦定理解三角形即得*.*

变式题 如图3*-*24*-*11所示,在坡角为*θ*的山坡上的一点*A*处测得山顶上一建筑物*CD*的顶端*C*对于山坡的斜度为15°,向山顶前进10米后到达点*B*,又从点*B*测得*C*对于山坡的斜度为*α*,建筑物的高*CD*为5米*.*

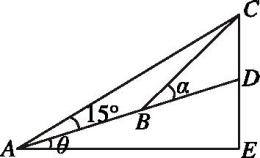


图3*-*24*-*11

(1)若*α=*30°,求*AC*的长;

(2)若*α=*45°,求此山坡的坡角*θ*的余弦值*.*

第24讲正弦定理和余弦定理的应用

考试说明 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*水平视线上方下方

2*.*正北方向

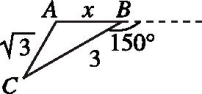
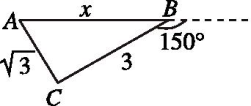
3*.*水平角

4*.*水平面水平长度

对点演练

1*.*5[解析] 由题可知∠*ACB=*60°,由正弦定理得*=*,即*=*,得*BC=*5*.*

2*.*2或[解析] 如图所示,应有两种情况*.*由正弦定理,得*=*,*∴*sin *A==*,*∴A=*60°或*A=*120°*.*当*A=*60°时,*AB=*2;当*A=*120°时,*AB=.*



3*.*[解析] 由题意可得,在△*ABC*中,*AB=*3*.*5 m,*AC=*1*.*4 m,*BC=*2*.*8 m,且*α+*∠*ACB=*π*.*

由余弦定理可得*AB*2*=AC*2*+BC*2*-*2*AC*·*BC*·cos∠*ACB*,即3*.*52*=*1*.*42*+*2*.*82*-*2*×*1*.*4*×*2*.*8*×*cos(π*-α*),解得cos *α=*,所以sin *α=*,

所以tan *α==.*

4*.*[解析] 在△*BCD*中,∠*CBD=*π*-α-β.*由正弦定理得*=*,所以*BC==.*在Rt△*ABC*中,*AB=BC*tan∠*ACB=.*

5*.*130°[解析] 60°*+*70°*=*130°*.*

6*.*南偏西80°[解析] 由条件及图可知,∠*A=*∠*ABC=*40°,又∠*BCD=*60°,所以∠*CBD=*30°,所以∠*DBA=*10°,因此灯塔*A*在灯塔*B*南偏西80°的方向*.*

7*.*200°[解析] 根据方位角的概念可得*.*

8*.*[解析] 在△*ABC*中,cos∠*ABC==*,所以sin∠*ABC=*,所以在△*ABD*中,*AD=AB*·sin∠*ABC=*5*×=*(m)*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)先求出∠*APB*,再由正弦定理可得*BP*;(2)设甲、乙之间的距离为*f*(*t*),若两人通过对讲机能保持联系,则需要*f*(*t*)≤9,然后分0≤*t*≤1和1*<t*≤4两种情况讨论,分别求得对应的时长,再求和即得到结论*.*

解:(1)在△*ABC*中,*AB=*6,*BC=*6,*AB*⊥*BC*,所以*A=*60°,*C=*30°,又∠*CBP=*45°,所以∠*APB=*75°,

由正弦定理得,*=*,

即*BP====*9*-*3,

故*PB*的距离是(9*-*3)千米*.*

(2)由题知,*AC=*12千米,则甲从*C*到*A*需要4小时,乙从*A*到*B*需要1小时*.*

设甲、乙之间的距离为*f*(*t*),若两人通过对讲机能保持联系,则需要*f*(*t*)≤9*.*

*①*当0≤*t*≤1时,

*f*(*t*)*==*3,由*f*(*t*)≤9,

得7*t*2*-*16*t+*7≤0,解得≤*t*≤,又*t*∈[0,1],

所以≤*t*≤1,此时通过对讲机保持联系的时长为1*-=*(小时)*.*

*②*当1*<t*≤4时,

*f*(*t*)*==*3,由*f*(*t*)≤9,

得*t*2*-*6*t+*3≤0,解得3*-*≤*t*≤3*+*,又*t*∈(1,4],

所以1*<t*≤4,此时通过对讲机保持联系的时长为3小时*.*

综上,两人通过对讲机能保持联系的总时长为3*+=*(小时)*.*

变式题A[解析] 在△*ABC*中,*AC=*50 m,∠*ACB=*45°,∠*CAB=*105°,所以∠*ABC=*30°,

则由正弦定理*=*,

得*AB===*50(m)*.*故选A*.*

例2[思路点拨] (1)在△*ABC*中,由正弦定理可得*BC*;(2)结合(1),在△*BDC*中,利用正弦定理化简求解即可*.*

解:(1)在△*ABC*中,*AB=l*,∠*CAB=α-θ*,∠*ABC=*180°*-*(*β-θ*),∠*ACB=β-α.*由正弦定理*=*,得*BC=l.*

(2)由(1)及条件知,*BC=l=×*24*=*12*.*因为∠*BCD=*90°*-β=*15°,∠*CBD=β-θ=*45°,所以∠*BDC=*120°*.*

由正弦定理得*CD=*·*BC=*24*-*8*.*

变式题A[解析] 设树高为*x* m,则*BP=x* m*.*

在△*ABP*中,*AB=*60,*BP=x*,*A=*30°,∠*APB=*15°,

由正弦定理*=*,得*=*,

解得*x=*30*+*30*.*故选A*.*

例3[思路点拨] 设所需时间为*t*小时,利用余弦定理列出含有*t*的方程,再解方程得到*t*的值,然后求出∠*CAB*的值,即可求得舰艇航行的方位角*.*

解:设所需时间为*t*小时,

则*AB=*15*t*,*CB=*15*t.*由题可知,∠*ACB=*120°*.*

在△*ABC*中,由余弦定理,得*AB*2*=AC*2*+BC*2*-*2*AC×BC×*cos∠*ACB*,

可得(15*t*)2*=*152*+*(15*t*)2*-*2*×*15*×*15*t*cos 120°,

整理得2*t*2*-t-*1*=*0,

解得*t=*1或*t=-*(舍去),

即舰艇与渔船相遇需要1小时*.*

在△*ABC*中,*AB=*15,*BC=*15,*AC=*15,∠*ACB=*120°,

所以∠*CAB=*30°,所以舰艇航行的方位角为70°*.*

变式题解:(1)当*α=*30°时,∠*ABC=*150°,∠*ACB=*∠*BAC=*15°,

所以*BC=AB=*10,由余弦定理得*AC*2*=*102*+*102*-*2*×*10*×*10*×*cos 150°*=*200*+*100,

故*AC=*5*+*5*.*

(2)当*α=*45°时,∠*ACB=*30°,在△*ABC*中,由正弦定理得*BC==*20*×=*5(*-*)*.*

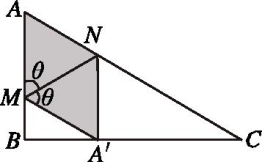
在△*BCD*中,由正弦定理得sin∠*BDC===-*1,

所以cos *θ=*cos(∠*ADC-*90°)*=*sin∠*ADC=-*1*.*



【备选理由】 例1是距离问题,体现了正、余弦定理在解三角形方面的实际应用,考查学生综合运用知识解决实际问题的能力;例2是角度问题*.*

例1[配合例1使用] 如图所示,某小区准备将一块闲置的直角三角形地开发成公共绿地,图中*AB=a*,*B=*,*BC=a.*设计时要求绿地部分(如图中阴影部分所示)有公共绿地走道*MN*,且两边是两个关于走道*MN*对称的三角形(△*AMN*和△*A'MN*)*.*现考虑方便和绿地最大化原则,要求点*M*与点*A*,*B*均不重合,*A'*落在边*BC*上且不与端点*B*,*C*重合,设∠*AMN=θ.*



(1)若*θ=*,求此时公共绿地的面积;

(2)为方便小区居民的行走,设计时要求*AN*,*A'N*的长度最短,求此时绿地公共走道*MN*的长度*.*

解:(1)设公共绿地的面积为*S*,由图得∠*BMA'=*π*-*2*θ=*,*∴BM=A'M=AM*,

又*BM+AM=AB=a*,*∴AM=a*,*∴AM=a.*

又*∵AB=a*,*BC=a*,*B=*,*∴A=*,*∴*△*AMN*为等边三角形,*∴MN=AM=a*,

*∴S=*2*S*△*AMN=*2*××AM·MN·*sin*=a*2*·=a*2*.*

(2)由题知*AM+A'M·*cos(π*-*2*θ*)*=AB=a*且*AM=A'M*,

*∴AM=A'M===.*

在△*AMN*中,由正弦定理可得*=*,

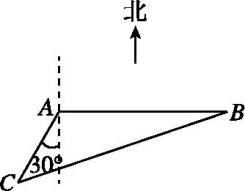
*∴AN==*,

记*t=*2sin *θ*sin,则*t=*2sin *θ·*sincos *θ-*cossin *θ**=*sin *θ*cos *θ+*sin2*θ=*sin 2*θ-*cos 2*θ+=*sin*+*,

又*θ*∈,*∴*2*θ-*∈,

*∴*当2*θ-=*,即*θ=*时,*t*取得最大值,此时*AN*取得最小值,则此时*MN=AM=a.*

例2[配合例3使用] 如图所示,当甲船位于*A*处时获悉,在其正东方向相距20海里的*B*处有一艘渔船遇险等待救援,甲船立即前往救援,同时把消息告知在甲船的南偏西30°方向,相距10海里的*C*处的乙船,乙船立即朝北偏东*θ*角的方向沿直线前往*B*处救援,则sin *θ*的值为 ()



A*.*

B*.*

C*.*

D*.*

[解析] D由题意知,在三角形*ABC*中,*AC=*10,*AB=*20,∠*CAB=*120°*.*由余弦定理可得*BC==*10*.*又由正弦定理*=*,得*=*,即sin∠*ACB=*,又因为∠*ACB*∈(0°,60°),所以cos∠*ACB=*,故sin *θ=*sin*=×+×=.*