**第2讲命题及其关系、充分条件与必要条件**





1*.*命题

(1)命题的概念:数学中把用语言、符号或式子表达的,能够判断的陈述句叫作命题*.*其中的语句叫作真命题,的语句叫作假命题*.*

(2)四种命题及其相互关系

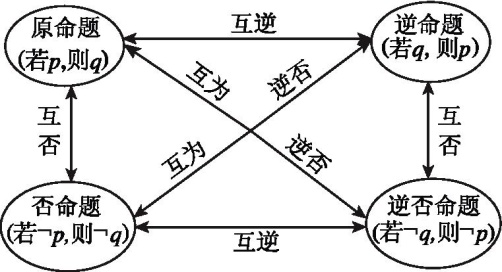


图1*-*2*-*1

特别提醒:若两个命题互为逆否命题,则它们有相同的真假性*.*

2*.*充分条件、必要条件与充要条件

(1)如果*p*⇒*q*,则*p*是*q*的条件*.*

(2)如果*q*⇒*p*,则*p*是*q*的条件*.*

(3)如果既有*p*⇒*q*,又有*q*⇒*p*,记作*p*⇔*q*,则*p*是*q*的条件*.*

常用结论

1*.*充要条件的两个结论:

(1)若*p*是*q*的充分不必要条件,*q*是*r*的充分不必要条件,则*p*是*r*的充分不必要条件;

(2)若*p*是*q*的充分不必要条件,则􀱑*q*是􀱑*p*的充分不必要条件*.*

2*.*充分、必要条件与集合的关系

|  |  |
| --- | --- |
| 使*p*成立的对象构成的集合  为*A*,使*q*成立的对象构成的集合为*B* |  |
| *p*是*q*的充分条件 | *A*⊆*B* |
| *p*是*q*的必要条件 | *B*⊆*A* |
| *p*是*q*的充分不必要条件 | *A*⫋*B* |
| *p*是*q*的必要不充分条件 | *B*⫋*A* |
| *p*是*q*的充要条件 | *A=B* |



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 对于下列语句:*①*垂直于同一直线的两条直线必平行吗?*②*作△*ABC*∽△*A'B'C'.③x*2*+*2*x-*3*<*0*.④*四边形的内角和是360°*.*其中是命题的是*.*(填序号)

2*.***[**教材改编**]** 有下面4个命题:*①*集合N中最小的数是1;*②*若*-a*不属于N,则*a*属于N;*③*若*a*∈N,*b*∈N,则*a+b*的最小值为2;*④x*2*+*1*=*2*x*的解集可表示为{1,1}*.*其中真命题的个数为*.*

3*.***[**教材改编**]** 命题“若整数*a*不能被2整除,则*a*是奇数”的逆否命题是*.*

4*.***[**教材改编**]** “点*P*(*x*,*y*)在第一象限”是“*x+y>*1”的条件*.*

题组二常错题

◆索引:命题的条件与结论不明确;含有大前提的命题的否命题易出现否定大前提的情况;真、假命题的推理考虑不全面;对充分必要条件判断错误*.*

5*.*命题“若*a*2*+b*2*=*0,*a*,*b*∈R,则*a=b=*0”的逆否命题是*.*

6*.*已知命题“对任意*a*,*b*∈R,若*ab>*0,则*a>*0”,则它的否命题是*.*

7*.*若命题“*ax*2*-*2*ax-*3*>*0不成立”是真命题,则实数*a*的取值范围是*.*

8*.*条件*p*:*x>a*,条件*q*:*x*≥2*.*

*①*若*p*是*q*的充分不必要条件,则*a*的取值范围是;

*②*若*p*是*q*的必要不充分条件,则*a*的取值范围是*.*

9*.*已知*p*是*r*的充分不必要条件,*s*是*r*的必要条件,*q*是*s*的必要条件,那么*p*是*q*的条件*.*



id:2147497674;FounderCES探究点一四种命题及其相互关系

例1 (1)对于命题“单调函数不是周期函数”,下列说法正确的是 ()

A*.*逆命题为“周期函数不是单调函数”

B*.*否命题为“单调函数是周期函数”

C*.*逆否命题为“周期函数是单调函数”

D*.*以上都不正确

(2)给出以下四个命题:

*①*“若*x+y=*0,则*x*,*y*互为相反数”的逆命题;

*②*“全等三角形的面积相等”的否命题;

*③*“若*q*≤*-*1,则*x*2*+x+q=*0有实根”的逆否命题;

*④*若*ab*是正整数,则*a*,*b*都是正整数*.*

其中为真命题的是*.*(写出所有真命题的序号)

[总结反思] (1)求一个命题的其他三种命题时,需注意:

*①*对于不是“若*p*,则*q*”形式的命题,需先改写为“若*p*,则*q*”的形式;

*②*若命题有大前提,写其他三种命题时需保留大前提*.*

(2)判断一个命题为真命题,要给出推理证明;判断一个命题为假命题,只需举出反例*.*

(3)当不易直接判断一个命题的真假时,根据互为逆否命题的两个命题同真同假,可转化为判断其等价命题的真假*.*

变式题 (1)已知命题*p*:正数*a*的平方不等于0,命题*q*:若*a*不是正数,则它的平方等于0,则*q*是*p*的()

A*.*逆命题 B*.*否命题

C*.*逆否命题 D*.*否定

(2)以下关于命题的说法正确的是*.*(填写所有正确说法的序号)

*①*“若log2(*a+*1)*>*1,则函数*f*(*x*)*=*log*ax*(*a>*0,*a*≠1)在其定义域内是增函数”是真命题;

*②*命题“若*a*≠0,则*a*(*b+*1)≠0”的否命题是“若*a=*0,则*a*(*b+*1)*=*0”;

*③*命题“若*x*,*y*都是偶数,则(*x+*1)(*y+*1)是偶数”的逆命题为真命题;

*④*命题“若*a*∈*M*,则*b*∉*M*”与命题“若*b*∈*M*,则*a*∉*M*”等价*.*

id:2147497681;FounderCES探究点二充分、必要条件的判定

例2 (1)**[**2018·北京卷**]** 设*a*,*b*均为单位向量,则“*|a-*3*b|=|*3*a+b|*”是“*a*⊥*b*”的 ()

A*.*充分而不必要条件

B*.*必要而不充分条件

C*.*充分必要条件

D*.*既不充分也不必要条件

(2)“函数*f*(*x*)*=a+*ln *x*(*x*≥e)存在零点”是“*a<-*1”的()

A*.*充分不必要条件

B*.*必要不充分条件

C*.*充要条件

D*.*既不充分也不必要条件

[总结反思] 充分条件、必要条件的判定方法有定义法、集合法和等价转化法*.*三种不同的方法适用于不同的类型:定义法适用于定义、定理的判断问题;集合法多适用于命题中涉及参数的取值范围的推断问题;等价转化法适用于条件和结论中带有否定性词语的命题*.*

变式题 (1)**[**2018·深圳一模**]** 已知数列{*an*}是等比数列,则“*a*2*>a*1”是“数列{*an*}为递增数列”的 ()

A*.*充分而不必要条件 B*.*必要而不充分条件

C*.*充分必要条件 D*.*既不充分也不必要条件

(2)“*α=*”是“sin 2*α-*cos 2*α=*1”的 ()

A*.*充分而不必要条件 B*.*必要而不充分条件

C*.*充分必要条件 D*.*既不充分也不必要条件

id:2147497688;FounderCES探究点三充分、必要条件的应用

例3 方程*ax*2*+*2*x+*1*=*0至少有一个负实根的充要条件是 ()

A*.*0*<a*≤1 B*.a<*1

C*.a*≤1 D*.*0*<a*≤1或*a<*0

[总结反思] 充分条件、必要条件的应用一般表现在参数问题的求解上,解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解*.*解题过程中要注意检验区间端点值*.*

变式题 (1)下面四个条件中,使*a>b*成立的必要而不充分条件是 ()

A*.a-*1*>b* B*.a+*1*>b*

C*.|a|>|b|* D*.a*3*>b*3

(2)**[**2018·衡阳4月调研**]** 已知*p*:实数*m*满足*m*2*+*12*a*2*<*7*am*(*a>*0),*q*:方程*+=*1表示焦点在*y*轴上的椭圆,且*p*是*q*的充分不必要条件,则*a*的取值范围为*.*

第2讲命题及其关系、充分条件与必要条件

考试说明 1*.*理解命题的概念;

2*.*了解“若*p*,则*q*”形式的命题及其逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系;

3*.*理解必要条件、充分条件与充要条件的含义*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*真假判断为真判断为假

2*.*(1)充分(2)必要(3)充要

对点演练

1*.④*[解析] *①*是疑问句,不是命题;*②*是祈使句,不是命题;*③*不能判断真假,不是命题;*④*是命题*.*

2*.*0[解析] *①*为假命题,集合N中最小的数是0;*②*为假命题,如*a=*不满足;*③*为假命题,如*a=*0,*b=*1,则*a+b=*1,比2小;*④*为假命题,所给集合中的元素不满足互异性*.*

3*.*若整数*a*不是奇数,则*a*能被2整除[解析] 以原命题结论的否定作条件、原命题条件的否定作结论得出逆否命题*.*

4*.*既不充分也不必要[解析] 取*x=*,*y=*,知充分性不成立;取*x=-*1,*y=*3,知必要性不成立*.*故为既不充分也不必要条件*.*

5*.*若*a*≠0或*b*≠0,*a*,*b*∈R,则*a*2*+b*2≠0[解析] “若*p*,则*q*”的逆否命题为“若􀱑*q*,则􀱑*p*”,又*a=b=*0的实质为*a=*0且*b=*0,故其否定为*a*≠0或*b*≠0*.*

6*.*对任意*a*,*b*∈R,若*ab*≤0,则*a*≤0[解析] “对任意*a*,*b*∈R”是大前提,在否命题中不变,又因为*ab>*0,*a>*0的否定分别为*ab*≤0,*a*≤0,所以原命题的否命题为“对任意*a*,*b*∈R,若*ab*≤0,则*a*≤0”*.*

7*.*[*-*3,0][解析] 由已知可得*ax*2*-*2*ax-*3≤0恒成立*.*

当*a=*0时,*-*3≤0恒成立;

当*a*≠0时,得解得*-*3≤*a<*0*.*

故*-*3≤*a*≤0*.*

8*.①a*≥2*②a<*2[解析] *①*因为*p*是*q*的充分不必要条件,所以{*x|x>a*}⫋{*x|x*≥2},则*a*的取值范围是*a*≥2*.*

*②*因为*p*是*q*的必要不充分条件,所以{*x|x*≥2}⫋{*x|x>a*},则*a*的取值范围是*a<*2*.*

9*.*充分不必要[解析] 依题意有*p*⇒*r*,*r*⇒*s*,*s*⇒*q*,*∴p*⇒*r*⇒*s*⇒*q.*又*∵r*⇒*/* *p*,*∴q*⇒*/* *p.*故*p*是*q*的充分不必要条件*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)根据四种命题的构成判断即可*.*(2)对于*①②*,按照要求写出相应的逆命题、否命题,再判断真假;对于*③*,可直接利用原命题与逆否命题的等价性判断原命题的真假;对于*④*,直接判断*.*

(1)D(2)*①③*[解析] (1)根据四种命题的构成可知,选项A,B,C均不正确*.*故选D*.*

(2)*①*“若*x+y=*0,则*x*,*y*互为相反数”的逆命题为“若*x*,*y*互为相反数,则*x+y=*0”,显然为真命题;*②*否命题为“不全等的三角形的面积不相等”,而不全等的三角形的面积也可能相等,故为假命题;*③*原命题为真,所以它的逆否命题也为真,故*③*为真命题;*④ab*是正整数,但*a*,*b*不一定都是正整数,例如*a=-*1,*b=-*2,故*④*为假命题*.*所以答案是*①③.*

变式题(1)B(2)*①②④*[解析] (1)“正数*a*的平方不等于0”即“若*a*是一个正数,则它的平方不等于0”,其否命题为“若*a*不是正数,则它的平方等于0”,所以选B*.*

(2)*①*正确,由log2(*a+*1)*>*1,得*a+*1*>*2,所以*a>*1,所以*f*(*x*)*=*log*ax*在其定义域内是增函数*.②*正确,由命题的否命题的定义知,该说法正确*.③*不正确,原命题的逆命题为“若(*x+*1)(*y+*1)是偶数,则*x*,*y*都是偶数”,是假命题,如(3*+*1)*×*(4*+*1)*=*20为偶数,但*x=*3,*y=*4*.④*正确,两者互为逆否命题,因此两命题等价*.*

例2[思路点拨] (1)将已知等式两边同时平方,可得出向量*a*,*b*的关系,从而得出结论;(2)通过研究单调性,求出函数存在零点的充要条件为*a*≤*-*1,从而得出结论*.*

(1)C(2)B[解析] (1)将*|a-*3*b|=|*3*a+b|*两边平方,得*a*2*-*6*a*·*b+*9*b*2*=*9*a*2*+*6*a*·*b+b*2*.∵a*,*b*均为单位向量,*∴a*·*b=*0,即*a*⊥*b.*反之,由*a*⊥*b*可得*|a-*3*b|=|*3*a+b|.*故为充分必要条件*.*

(2)因为*f'*(*x*)*=>*0,所以若函数*f*(*x*)*=a+*ln *x*(*x*≥e)存在零点,则*f*(e)≤0,即*a*≤*-*1,因此“函数*f*(*x*)*=a+*ln *x*(*x*≥e)存在零点”是“*a<-*1”的必要不充分条件,故选B*.*

变式题(1)B(2)A[解析] (1)当*a*1*=-*1,*a*2*=*2,公比*q=-*2时,虽然有*a*1*<a*2,但是数列{*an*}不是递增数列,所以充分性不成立;反之,当数列{*an*}是递增数列时,必有*a*1*<a*2,因此必要性成立*.*故选B*.*

(2)由sin 2*α-*cos 2*α=*1得sin*=*,所以2*α-=*2*k*π*+*,*k*∈Z或2*α-=*2*k*π*+*,*k*∈Z,即*α=k*π*+*,*k*∈Z或*α=k*π*+*,*k*∈Z,所以“*α=*”是“sin 2*α-*cos 2*α=*1”的充分而不必要条件,故选A*.*

例3[思路点拨] 直接法,分情况讨论;特例法,结合选项取特殊值验证*.*

C[解析] 方法一(直接法):当*a=*0时,*x=-*,符合题意*.*

当*a*≠0时,若方程的两根为一正一负,则⇒⇒*a<*0;

若方程的两根均为负,则⇒⇒0*<a*≤1*.*综上所述,所求充要条件是*a*≤1*.*

方法二(排除法):当*a=*0时,原方程有一个负实根,可以排除A,D;当*a=*1时,原方程有两个相等的负实根,可以排除B*.*所以选C*.*

变式题(1)B(2)[解析] (1)“*a>b*”不能推出“*a-*1*>b*”,故选项A不是“*a>b*”的必要条件,不满足题意;

“*a>b*”能推出“*a+*1*>b*”,但“*a+*1*>b*”不能推出“*a>b*”,故满足题意;

“*a>b*”不能推出“*|a|>|b|*”,故选项C不是“*a>b*”的必要条件,不满足题意;

“*a>b*”能推出“*a*3*>b*3”,且“*a*3*>b*3”能推出“*a>b*”,故是充要条件,不满足题意*.*故选B*.*

(2)由*a>*0,*m*2*-*7*am+*12*a*2*<*0,得3*a<m<*4*a*,即*p*:3*a<m<*4*a*,*a>*0*.*

由方程*+=*1表示焦点在*y*轴上的椭圆,

可得2*-m>m-*1*>*0,解得1*<m<*,即*q*:1*<m<.*

因为*p*是*q*的充分不必要条件,所以或解得≤*a*≤,

所以实数*a*的取值范围是*.*



【备选理由】 例1考查对命题真假的判断,是一个开放式命题,答案不唯一,有利于学生发散思维;例2强化了充分、必要条件的判断方法和余弦定理、基本不等式的应用;例3主要考查了充要条件的判断;例4是以简单不等式的方式考查充分、必要条件的应用*.*

例1[配合例1使用] **[**2018·北京通州区三模**]** 能够说明“设*a*,*b*,*c*是任意实数,若*a>b>c*,则*a*2*>ab>c*2”是假命题的一组整数*a*,*b*,*c*的值依次为*.*

[答案] 1,0,*-*1(此题答案不唯一)

[解析] 当*a=*1,*b=*0,*c=-*1时,满足*a>b>c*,不满足*a*2*>ab>c*2,*∴*命题是假命题*.*

故答案可以为1,0,*-*1*.*

例2[配合例2使用] **[**2018·武汉4月调研**]** 在△*ABC*中,内角*A*,*B*,*C*的对边分别为*a*,*b*,*c.*已知条件*p*:*a*≤,条件*q*:*A*≤,那么*p*是*q*成立的 ()

A*.*充分而不必要条件

B*.*必要而不充分条件

C*.*充要条件

D*.*既不充分也不必要条件

[解析] A由条件*p*:*a*≤,知cos *A=*≥*=*≥*=*,当且仅当*b=c=a*时取等号,

又*A*∈(0,π),*∴*0*<A*≤,

*∴A*≤,即*q*成立*.*

取*A=*,*C=*,*B=*,满足条件*q*,但是*a>.*

*∴p*是*q*成立的充分而不必要条件*.*

故选A*.*

例3[配合例2使用] **[**2018·莆田六中三模**]** 在等比数列{*an*}中,*a*2*=-*2,则“*a*4,*a*12是方程*x*2*+*3*x+*1*=*0的两根”是“*a*8*=-*1”的 ()

A*.*充分而不必要条件

B*.*必要而不充分条件

C*.*充要条件

D*.*既不充分也不必要条件

[解析] C因为*a*4,*a*12是方程*x*2*+*3*x+*1*=*0的两根,所以*a*4*a*12*=*1,

因此*=*1,又因为*a*2*=-*2*<*0,所以*a*8*<*0,即*a*8*=-*1*.*

从而“*a*4,*a*12是方程*x*2*+*3*x+*1*=*0的两根”是“*a*8*=-*1”的充要条件,故选C*.*

例4[配合例3使用] **[**2018·南昌模拟**]** 在实数范围内,使得不等式*>*1成立的一个充分而不必要条件是 ()

A*.x>*0 B*.x<*1

C*.*0*<x<*1 D*.*0*<x<*

[解析] D*∵>*1,*∴<*0,*∴*0*<x<*1*.∵*⫋(0,1),*∴*0*<x<*为不等式*>*1成立的一个充分而不必要条件,故选D*.*