**第4讲函数的概念及其表示**





1*.*函数与映射的概念

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 函数 | 映射 |
| 两集合*A*,*B* | 设*A*,*B*是两个 | 设*A*,*B*是两个 |
| 对应关系  *f*:*A*→*B* | 按照某种确定的对应关系*f*,使对于集合*A*中的一个数*x*,在集合*B*中都有的数*f*(*x*)与之对应 | 按某一个确定的对应关系*f*,使对于集合*A*中的一个元素*x*,在集合*B*中都有的元素*y*与之对应 |
| 名称 | 称为从集合*A*到集合*B*的一个函数 | 称对应为从集合*A*到集合*B*的一个映射 |
| 记法 | *y=f*(*x*),*x*∈*A* | 对应*f*:*A*→*B* |

2*.*函数的三要素

函数由、和对应关系三个要素构成*.*在函数*y=f*(*x*),*x*∈*A*中,*x*叫作自变量,*x*的取值范围*A*叫作函数的*.*与*x*的值相对应的*y*值叫作函数值,函数值的集合{*f*(*x*)*|x*∈*A*}叫作函数的*.*

3*.*函数的表示法

函数的常用表示方法:、、*.*

4*.*分段函数

若函数在其定义域内,对于定义域内的不同取值区间,有着不同的,这样的函数通常叫作分段函数*.*分段函数虽由几个部分组成,但它表示的是一个函数*.*

常用结论

1*.*常见函数的定义域

(1)分式函数中分母不等于0*.*

(2)偶次根式函数的被开方式大于或等于0*.*

(3)一次函数、二次函数的定义域为R*.*

(4)零次幂的底数不能为0*.*

(5)*y=ax*(*a>*0且*a*≠1),*y=*sin *x*,*y=*cos *x*的定义域均为R*.*

(6)*y=*log*ax*(*a>*0,*a*≠1)的定义域为{*x|x>*0}*.*

(7)*y=*tan *x*的定义域为*x**x*≠*k*π*+*,*k*∈Z*.*

2*.*抽象函数的定义域

(1)若*f*(*x*)的定义域为[*m*,*n*],则在*f*[*g*(*x*)]中,*m*≤*g*(*x*)≤*n*,从而解得*x*的范围,即为*f*[*g*(*x*)]的定义域*.*

(2)若*f*[*g*(*x*)]的定义域为[*m*,*n*],则由*m*≤*x*≤*n*确定*g*(*x*)的范围,即为*f*(*x*)的定义域*.*

3*.*基本初等函数的值域

(1)*y=kx+b*(*k*≠0)的值域是R*.*

(2)*y=ax*2*+bx+c*(*a*≠0)的值域:当*a>*0时,值域为,*+∞*;当*a<*0时,值域为*.*

(3)*y=*(*k*≠0)的值域是{*y|y*≠0}*.*

(4)*y=ax*(*a>*0且*a*≠1)的值域是(0,*+∞*)*.*

(5)*y=*log*ax*(*a>*0且*a*≠1)的值域是R*.*



题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 以下属于函数的有*.*(填序号)

*①y=±*;*②y*2*=x-*1;*③y=+*;*④y=x*2*-*2(*x*∈N)*.*

2*.***[**教材改编**]** 已知函数*f*(*x*)*=*则*f*(*-*2)*=*,*f*[*f*(*-*2)]*=　　　　.*

3*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=*的定义域是*.*

4*.***[**教材改编**]** 已知集合*A=*{1,2,3,4},*B=*{*a*,*b*,*c*},*f*:*A*→*B*为从集合*A*到集合*B*的一个函数,那么该函数的值域*C*的不同情况有种*.*

题组二常错题

◆索引:求函数定义域时非等价化简解析式致错;分段函数解不等式时忘记范围;换元法求解析式,反解忽视范围;对函数值域理解不透彻致错*.*

5*.*函数*y=*·的定义域是*.*

6*.*设函数*f*(*x*)*=*则使得*f*(*x*)≥1的自变量*x*的取值范围为*.*

7*.*已知*f*()*=x-*1,则*f*(*x*)*=　　　　　　.*

8*.*若一系列函数的解析式相同、值域相同,但其定义域不同,则称这些函数为“同族函数”,那么函数解析式为*y=x*2,值域为{1,4}的“同族函数”共有个*.*



id:2147497844;FounderCES探究点一函数的定义域

角度1求给定函数解析式的定义域

例1 (1)函数*f*(*x*)*=*ln(*x*2*-x*)的定义域为 ()

A*.*(0,1] B*.*[0,1]

C*.*(*-∞*,0)∪(1,*+∞*) D*.*(*-∞*,0)∪[1,*+∞*)

(2)函数*f*(*x*)*=+*的定义域为 ()

A*.*(*-*3,0]

B*.*(*-*3,1]

C*.*(*-∞*,*-*3)∪(*-*3,0]

D*.*(*-∞*,*-*3)∪(*-*3,1]

[总结反思] (1)求函数定义域即求使解析式有意义的自变量*x*的取值集合;(2)若函数是由几个基本初等函数的和、差、积、商的形式构成时,定义域一般是各个基本初等函数定义域的交集;(3)具体求解时一般是列出自变量满足的不等式(组),得出不等式(组)的解集即可;(4)注意不要轻易对解析式化简变形,否则易出现定义域错误*.*

角度2求抽象函数的定义域

例2 (1)若函数*y=f*(*x*)的定义域是[0,2],

则函数*g*(*x*)*=*的定义域是 ()

A*.*[0,1] B*.*[0,1)

C*.*[0,1)∪(1,4] D*.*(0,1)

(2)若函数*f*(*x*2*+*1)的定义域为[*-*1,1],则*f*(lg *x*)的定义域为 ()

A*.*[*-*1,1] B*.*[1,2]

C*.*[10,100] D*.*[0,lg 2]

[总结反思] (1)无论抽象函数的形式如何,已知定义域还是求定义域均是指其中的*x*的取值集合;(2)同一问题中、同一法则下的范围是一致的,如*f*[*g*(*x*)]与*f*[*h*(*x*)],其中*g*(*x*)与*h*(*x*)的范围(即它们的值域)一致*.*

变式题 (1)若函数*y=f*(*x*)的定义域为(0,1),则*f*(*x+*1)的定义域为 ()

A*.*(*-*1,0) B*.*(0,1)

C*.*(1,2) D*.*(*-*1,1)

(2)已知函数*y=f*(*x*2*-*1)的定义域为[*-*,],则函数*y=f*(*x*)的定义域为*.*

id:2147497858;FounderCES探究点二函数的解析式

例3 (1)已知*f*(*x+*1)*=*3*x+*2,则函数*f*(*x*)的解析式是()

A*.f*(*x*)*=*3*x-*1 B*.f*(*x*)*=*3*x+*1

C*.f*(*x*)*=*3*x+*2 D*.f*(*x*)*=*3*x+*4

(2)已知二次函数*f*(*x*)满足*f*(*x+*1)*-f*(*x*)*=-*2*x+*1,且*f*(2)*=*15,则函数*f*(*x*)*=　　　　　　　.*

(3)设函数*f*(*x*)对不为0的一切实数*x*均有*f*(*x*)*+*2*f=*3*x*,则*f*(*x*)*=　　　　.*

[总结反思] 求函数解析式的常用方法:

(1)换元法:已知复合函数*f*[*g*(*x*)]的解析式,可用换元法,此时要注意新元的取值范围*.*

(2)待定系数法:已知函数的类型(如一次函数、二次函数),可用待定系数法*.*

(3)配凑法:由已知条件*f*[*g*(*x*)]*=F*(*x*),可将*F*(*x*)改写成关于*g*(*x*)的表达式,然后以*x*替代*g*(*x*),便得*f*(*x*)的解析式*.*

(4)解方程组法:已知*f*(*x*)与*f*或*f*(*-x*)之间的关系式,可根据已知条件再构造出另外一个等式,两等式组成方程组,通过解方程组求出*f*(*x*)*.*

变式题 (1)已知函数*f*(2*x-*1)*=*4*x+*3,且*f*(*t*)*=*6,则*t=* ()

A*.* B*.* C*.* D*.*

(2)若*f*(*x*)对于任意实数*x*恒有3*f*(*x*)*-*2*f*(*-x*)*=*5*x+*1,则*f*(*x*)*=* ()

A*.x+*1 B*.x-*1

C*.*2*x+*1 D*.*3*x+*3

(3)若*f*(*x*)为一次函数,且*f*[*f*(*x*)]*=*4*x+*1,则*f*(*x*)*=　　　　　　　　　.*

id:2147497865;FounderCES探究点三以分段函数为背景的问题 id:2147497872;FounderCES

微点1分段函数的求值问题

例4 (1)**[**2018·衡水调研**]** 设函数*f*(*x*)*=*则*f*[*f*(*-*1)]*=* ()

A*.* B*.+*1

C*.*1 D*.*3

(2)已知函数*f*(*x*)*=*则*f*(log27)*=　　　　.*

[总结反思] 求分段函数的函数值时务必要确定自变量所在的区间及其对应关系*.*对于复合函数的求值问题,应由里到外依次求值*.*

微点2分段函数与方程

例5 (1)已知函数*f*(*x*)*=*若*f*[*f*(1)]*=*3,则*a=* ()

A*.*2 B*.-*2

C*.-*3 D*.*3

(2)函数*f*(*x*)*=*若*f*(0)*+f*(*a*)*=*2,则*a*的值为*.*

[总结反思] (1)若分段函数中含有参数,则直接根据条件选择相应区间上的解析式代入求参;(2)若是求自变量的值,则需要结合分段区间的范围对自变量进行分类讨论,再求值*.*

微点3分段函数与不等式问题

例6 (1)**[**2018·惠州二模**]** 设函数*f*(*x*)*=*若*f*(*x*0)*>*1,则*x*0的取值范围是 ()

A*.*(*-*1,1)

B*.*(*-*1,*+∞*)

C*.*(*-∞*,*-*2)∪(0,*+∞*)

D*.*(*-∞*,*-*1)∪(1,*+∞*)

(2)**[**2018·全国卷*Ⅰ***]** 设函数*f*(*x*)*=*则满足*f*(*x+*1)*<f*(2*x*)的*x*的取值范围是 ()

A*.*(*-∞*,*-*1] B*.*(0,*+∞*)

C*.*(*-*1,0) D*.*(*-∞*,0)

[总结反思] 涉及与分段函数有关的不等式问题,主要表现为解不等式,当自变量取值不确定时,往往要分类讨论求解;当自变量取值确定,但分段函数中含有参数时,只需依据自变量的情况,直接代入相应解析式求解*.*

应用演练

1*.*【微点1】若函数*f*(*x*)*=*则*f*(1)*+f*(*-*1)*=*()

A*.*0 B*.*2

C*.-*2 D*.*1

2*.*【微点2】设函数*f*(*x*)*=*若*f*(*a*)*=*4,则实数*a*的值为 ()

A*.* B*.*

C*.*或 D*.*

3*.*【微点3】已知函数*f*(*x*)*=*则不等式*f*(*x*)≤5的解集为 ()

A*.*[*-*1,1]

B*.*[*-*2,4]

C*.*(*-∞*,*-*2]∪(0,4)

D*.*(*-∞*,*-*2]∪[0,4]

4*.*【微点3】**[**2018·湖北咸宁联考**]** 已知函数*f*(*x*)*=*则不等式*f*(*x*)≤*x*的解集为 ()

A*.*[*-*1,3]

B*.*(*-∞*,*-*1]∪[3,*+∞*)

C*.*[*-*3,1]

D*.*(*-∞*,*-*3]∪[1,*+∞*)

5*.*【微点2】设函数*f*(*x*)*=*若*f=*4,则*b=　　　　.*

第4讲函数的概念及其表示

考试说明 1*.*了解构成函数的要素,会求一些简单函数的定义域和值域;了解映射的概念*.*

2*.*在实际情境中,会根据不同的需求选择恰当的方法(如图像法,列表法,解析法)表示函数*.*

3*.*了解简单的分段函数,并能简单应用(函数分段不超过三段)*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*非空数集非空集合任意唯一确定任意唯一确定*f*:*A*→*B　f*:*A*→*B*

2*.*定义域值域定义域值域

3*.*解析法图像法列表法

4*.*对应关系

对点演练

1*.④*[解析] *①②*对于定义域内任给的一个数*x*,可能有两个不同的*y*值,不满足对应的唯一性,故*①②*错*.③*的定义域是空集,而函数的定义域是非空的数集,故*③*错*.*只有*④*表示函数*.*

2*.*45[解析] 因为*f*(*-*2)*=*(*-*2)2*=*4,所以*f*[*f*(*-*2)]*=f*(4)*=*4*+*1*=*5*.*

3*.*(*-∞*,*-*3)∪(*-*3,8][解析] 要使函数有意义,需8*-x*≥0且*x+*3≠0,即*x*≤8且*x*≠*-*3,所以其定义域是(*-∞*,*-*3)∪(*-*3,8]*.*

4*.*7[解析] 只含有一个元素时有{*a*},{*b*},{*c*};有两个元素时,有{*a*,*b*},{*a*,*c*},{*b*,*c*};有三个元素时,有{*a*,*b*,*c*}*.*所以值域*C*共有7种不同情况*.*

5*.*{*x|x*≥2}[解析] 要使函数有意义,需解得*x*≥2,即定义域为{*x|x*≥2}*.*

6*.*(*-∞*,*-*2]∪[0,10][解析] *∵f*(*x*)是分段函数,*∴f*(*x*)≥1应分段求解*.*

当*x<*1时,*f*(*x*)≥1⇒(*x+*1)2≥1⇒*x*≤*-*2或*x*≥0,*∴x*≤*-*2或0≤*x<*1*.*

当*x*≥1时,*f*(*x*)≥1⇒4*-*≥1,即≤3,*∴*1≤*x*≤10*.*

综上所述,*x*≤*-*2或0≤*x*≤10,即*x*∈(*-∞*,*-*2]∪[0,10]*.*

7*.x*2*-*1(*x*≥0)[解析] 令*t=*,则*t*≥0,*x=t*2,所以*f*(*t*)*=t*2*-*1(*t*≥0),即*f*(*x*)*=x*2*-*1(*x*≥0)*.*

8*.*9[解析] 设函数*y=x*2的定义域为*D*,其值域为{1,4},*D*的所有可能的个数,即是同族函数的个数,*D*的所有可能为{*-*1,2},{*-*1,*-*2},{1,2},{1,*-*2},{*-*1,1,2},{*-*1,1,*-*2},{*-*1,2,*-*2},{1,2,*-*2},{*-*1,1,2,*-*2},共9个,故答案为9*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)根据对数式的真数大于0求解;(2)根据二次根式的被开方数非负及分母不为0求解*.*

(1)C(2)A[解析] (1)由*x*2*-x>*0,得*x>*1或*x<*0,所以定义域为(*-∞*,0)∪(1,*+∞*)*.*

(2)由题意,自变量*x*应满足解得故函数的定义域为(*-*3,0]*.*

例2[思路点拨] (1)由*f*(*x*)的定义域得*f*(2*x*)的定义域,再结合ln *x*≠0求解;(2)由*x*∈[*-*1,1],求得*x*2*+*1的范围是[1,2],再由1≤lg *x*≤2即可得函数*f*(lg *x*)的定义域*.*

(1)D(2)C[解析] (1)*∵f*(*x*)的定义域为[0,2],*∴*要使*f*(2*x*)有意义,则有0≤2*x*≤2,*∴*0≤*x*≤1,*∴*要使*g*(*x*)有意义,应有*∴*0*<x<*1,故选D*.*

(2)因为*f*(*x*2*+*1)的定义域为[*-*1,1],所以*-*1≤*x*≤1,故0≤*x*2≤1,所以1≤*x*2*+*1≤2*.*因为*f*(*x*2*+*1)与*f*(lg *x*)是同一个对应法则,所以1≤lg *x*≤2,即10≤*x*≤100,所以函数*f*(lg *x*)的定义域为[10,100]*.*故选C*.*

变式题(1)A(2)[*-*1,2][解析] (1)由题意知0*<x+*1*<*1,解得*-*1*<x<*0*.*故选A*.*

(2)因为函数*y=f*(*x*2*-*1)的定义域为[*-*,],

所以*-*≤*x*≤,所以*-*1≤*x*2*-*1≤2,

所以函数*y=f*(*x*)的定义域为[*-*1,2]*.*

例3[思路点拨] (1)用配凑法将3*x+*2配凑成3(*x+*1)*-*1;(2)设出二次函数,利用待定系数法,根据等式恒成立求出待定系数即可;(3)构造含*f*(*x*)和*f*的方程组,消去*f*即可得*f*(*x*)的解析式*.*

(1)A(2)*-x*2*+*2*x+*15(3)*-x*[解析] (1)由于*f*(*x+*1)*=*3(*x+*1)*-*1,所以*f*(*x*)*=*3*x-*1*.*

(2)由已知令*f*(*x*)*=ax*2*+bx+c*(*a*≠0),则*f*(*x+*1)*-f*(*x*)*=*2*ax+b+a=-*2*x+*1,

*∴*2*a=-*2,*a+b=*1,*∴a=-*1,*b=*2,又*f*(2)*=*15,*∴c=*15,*∴f*(*x*)*=-x*2*+*2*x+*15*.*

(3)*f*(*x*)*+*2*f=*3*x①*,且*x*≠0,

用代替*①*中的*x*,得*f+*2*f*(*x*)*=*3*×②*,

解*①②*组成的方程组,消去*f*得*f*(*x*)*=-x.*

变式题(1)A(2)A(3)2*x+*或*-*2*x-*1[解析] (1)设*t=*2*x-*1,则*x=*,

故*f*(*t*)*=*4*×+*3*=*2*t+*5,

令2*t+*5*=*6,则*t=*,故选A*.*

(2)因为3*f*(*x*)*-*2*f*(*-x*)*=*5*x+*1*①*,所以3*f*(*-x*)*-*2*f*(*x*)*=-*5*x+*1*②*,联立*①②*,解得*f*(*x*)*=x+*1,故选A*.*

(3)设*f*(*x*)*=ax+b*(*a*≠0),由*f*[*f*(*x*)]*=af*(*x*)*+b=a*2*x+ab+b=*4*x+*1,得*a*2*=*4,*ab+b=*1,解得*a=*2,*b=*或*a=-*2,*b=-*1,*∴f*(*x*)*=*2*x+*或*f*(*x*)*=-*2*x-*1*.*

例4[思路点拨] (1)先求*f*(*-*1)的值,再求*f*[*f*(*-*1)]的值;(2)先估算log27的范围,再确定选用哪段解析式求值*.*

(1)D(2)[解析] (1)由题意可得*f*(*-*1)*==*2,*∴f*[*f*(*-*1)]*=f*(2)*=*3,故选D*.*

(2)因为2*<*log27*<*3,所以1*<*log27*-*1*<*2,所以*f*(log27)*=f*(log27*-*1)*==÷*2*=.*

例5[思路点拨] (1)先求得*f*(1)*=*0,再据*f*(0)*=*3求分段函数中的参数;(2)分*a*≤0和*a>*0两种情况讨论求解*.*

(1)D(2)0或1[解析] (1)根据题意可知*f*(1)*=*log*a*1*=*0,所以*f*[*f*(1)]*=f*(0)*=*(3*+a*)*×*0*+a=a=*3,

即*a=*3,故选D*.*

(2)*∵f*(*x*)*=∴f*(0)*=*20*=*1*.*

当*a>*0时,*f*(*a*)*=a-*ln *a*,则有1*+a-*ln *a=*2,解得*a=*1;

当*a*≤0时,*f*(*a*)*=*2*a*,则有1*+*2*a=*2,解得*a=*0*.*

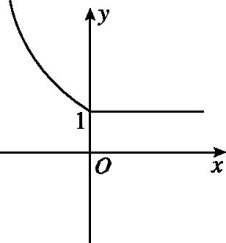
例6[思路点拨] (1)分*x*0≤0和*x*0*>*0两种情况讨论求解;(2)根据题中所给的函数解析式,将函数图像画出来,结合图像可得不等式成立的条件*.*

(1)D(2)D[解析] (1)当*x*0≤0时,由*f*(*x*0)*=-*1*>*1,即*>*2,解得*x*0*<-*1;

当*x*0*>*0时,由*f*(*x*0)*=>*1,解得*x*0*>*1*.*

*∴x*0的取值范围是(*-∞*,*-*1)∪(1,*+∞*)*.*

(2)*f*(*x*)的图像如图所示*.*当即*x*≤*-*1时,若满足*f*(*x+*1)*<f*(2*x*),则满足*x+*1*>*2*x*,即*x<*1,此时*x*≤*-*1;当即*-*1*<x<*0时,*f*(*x+*1)*<f*(2*x*)恒成立*.*综上,*x*的取值范围是*x<*0*.*故选D*.*



应用演练

1*.*A[解析] 由函数*f*(*x*)*=*得*f*(1)*+f*(*-*1)*=++*1*=*0*.*

2*.*B[解析] 因为*f*(*a*)*=*4,所以或

所以或所以*a=*,故选B*.*

3*.*B[解析] 由于*f*(*x*)*=*

所以当*x>*0时,3*+*log2*x*≤5,即log2*x*≤2*=*log24,得0*<x*≤4;

当*x*≤0时,*x*2*-x-*1≤5,即(*x-*3)(*x+*2)≤0,得*-*2≤*x*≤0*.*

所以不等式*f*(*x*)≤5的解集为[*-*2,4]*.*

4*.*A[解析] 当*x*≥0时,由*x*2*-*2*x*≤*x*,得0≤*x*≤3;

当*x<*0时,由≤*x*,得*-*1≤*x<*0*.*

故不等式*f*(*x*)≤*x*的解集为[*-*1,3]*.*

5*.*[解析] 由*f=*4,可得*f=*4*.*

若*-b*≥1,即*b*≤,可得*=*4,解得*b=.*

若*-b<*1,即*b>*,可得3*×-b=*4,解得*b=<*(舍去)*.*故答案为*.*



【备选理由】 例1考查给定函数解析式,求抽象函数的定义域问题;例2考查分段函数的求值,但涉及三角函数及函数的周期性;例3考查分段函数与方程问题,先分析参数的范围,可以避免分类讨论;例4是对函数值域的考查,依据分段函数的值域求参数,是对已有例题的有效补充,值得探究和思考*.*

例1[配合例2使用] **[**2018·邵阳期末**]** 设函数*f*(*x*)*=*log2(*x-*1)*+*,则函数*f*的定义域为()

A*.*(1,2] B*.*(2,4]

C*.*[1,2) D*.*[2,4)

[解析] B要使函数*f*(*x*)有意义,则需⇒1*<x*≤2,故1*<*≤2,即2*<x*≤4,所以选B*.*

例2[配合例4使用] **[**2018·柳州高级中学三模**]** 已知函数*f*(*x*)*=*则*f*(*-*2018)*=*()

A*.-*2 B*.*2

C*.*4*+* D*.-*4*-*

[解析] A当*x<*1时,*f*(*x*)*=-f*(*x+*3),可得*f*(*x+*3)*=-f*(*x*),则*f*[(*x+*3)*+*3]*=-f*(*x+*3)*=f*(*x*),

可知当*x<*1时,*f*(*x*)是周期为6的周期函数,

则*f*(*-*2018)*=f*(*-*336*×*6*-*2)*=f*(*-*2)*=-f*(*-*2*+*3)*=-f*(1)*.*而当*x*≥1时,*f*(*x*)*=x*2*+*sin,*∴f*(1)*=*2,

*∴f*(*-*2018)*=-f*(1)*=-*2*.*

例3[配合例5使用] 已知*f*(*x*)*=*若*f*(1*-a*)*=f*(1*+a*)(*a>*0),则实数*a*的值为*.*

[答案] 1

[解析] *∵a>*0,*∴*1*-a<*1,1*+a>*1,*∴*由*f*(1*-a*)*=f*(1*+a*)得2*-a=*,即*a*2*-*2*a+*1*=*0,*∴a=*1*.*

例4[补充使用] **[**2018·武邑中学模拟**]** 若函数*f*(*x*)*=*的值域为R,则*a*的取值范围是*.*

[答案] *a*≥*-*

[解析] *∵f*(*x*)*=*log4*x*在*x>*2时的值域为,

*∴f*(*x*)*=x+a*在*x*≤2时的最大值必须大于等于,

即满足2*+a*≥,解得*a*≥*-.*

故答案为*a*≥*-.*