**第9讲对数与对数函数**



id:2147498362;FounderCES

1*.*对数

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 概念 | 如果*ax=N*(*a>*0,且*a*≠1),那么*x*叫作以*a*为底*N*的,记作*x=*log*aN*,其中*a*叫作对数的底数,*N*叫作真数,log*aN*叫作对数式 | |
| 性质 | 底数的限制:*a>*0,且*a*≠1 | |
| 对数式与指数式的互化:*ax=N*⇔ | |
| 负数和零没有 | |
| log*a*1*=* | |
| log*aa=*1 | |
| 对数恒等式:*=* | |
| 运算法则 | log*a*(*M*·*N*)*=* | *a>*0,且*a*≠1,  *M>*0,*N>*0 |
| log*a=* |
| log*aMn=*(*n*∈R) |
| 换底公式 | 换底公式:log*ab=*(*a>*0,且*a*≠1,*c>*0,且*c*≠1,*b>*0) | |
| 推论:lo*bn=*,log*ab=* | |

2*.*对数函数的概念、图像与性质

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 概念 | 函数*y=*log*ax*(*a>*0,*a*≠1)叫作函数 | |
| 底数 | *a>*1 | 0*<a<*1 |
| 图像 |  |  |
| 定义域 |  | |

(续表)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 值域 |  | |
| 性质 | 过定点,即*x=*1时,*y=*0 | |
| 在区间(0,*+∞*)上  是函数 | 在区间(0,*+∞*)上  是函数 |

3*.*反函数

指数函数*y=ax*(*a>*0,且*a*≠1)与对数函数互为反函数,它们的图像关于直线对称*.*

常用结论

1*.*互为反函数的两个函数的图像关于直线*y=x*对称*.*

2*.*只有在定义域上单调的函数才存在反函数*.*

id:2147498400;FounderCES

题组一常识题

1*.***[**教材改编**]** 化简log*ab*log*bc*log*ca*的结果是*.*

2*.***[**教材改编**]** 函数*f*(*x*)*=*log2(2*-x*)的定义域是*.*

3*.***[**教材改编**]** 若函数*y=f*(*x*)是函数*y=*2*x*的反函数,则*f*(2)*=　　　　.*

4*.***[**教材改编**]** 函数*y=*lo(*x*2*-*4*x+*5)的单调递增区间是*.*

题组二常错题

◆索引:对数的性质及其运算掌握不到位;忽略真数大于零致错;不能充分运用对数函数的性质;忽略对底数的讨论致误*.*

5*.*有下列结论:*①*lg(lg 10)*=*0;*②*lg(ln e)*=*0;*③*若lg *x=*1,则*x=*10;*④*若log22*=x*,则*x=*1;*⑤*若log*mn*·log3*m=*2,则*n=*9*.*其中正确结论的序号是*.*

6*.*已知lg *x+*lg *y=*2lg(*x-*2*y*),则*=　　　　.*

7*.*设*a=*,*b=*log9,*c=*log8,则*a*,*b*,*c*的大小关系是*.*

8*.*若函数*y=*log*ax*(*a>*0,*a*≠1)在[2,4]上的最大值与最小值的差是1,则*a=　　　　.*



id:2147498414;FounderCES探究点一对数式的化简与求值

例1 (1)**[**2018·宿州质检**]** 已知*m>*0,*n>*0,lo(3*m*)*+*log2*n=*lo(2*m*2*+n*),则log2*m-*log4*n*的值为 ()

A*.-*1 B*.*1

C*.-*1或0 D*.*1或0

(2)设2*x=*5*y=m*,且*+=*2,则*m=　　　　.*

[总结反思] (1)对数运算法则是在化为同底的情况下进行的,因此经常会用到换底公式及其推论*.*在对含有字母的对数式进行化简时,必须保证恒等变形*.*

(2)利用对数运算法则,在真数的积、商、幂与对数的和、差、倍之间进行转化*.*

变式题 (1)**[**2018·昆明一中模拟**]** 设*x*,*y*为正数,且3*x=*4*y*,当3*x=py*时,*p*的值为 ()

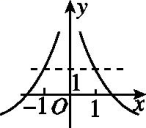
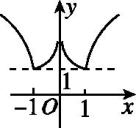
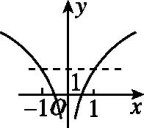
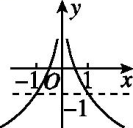
A*.*log34 B*.*log43

C*.*6log32 D*.*log32

(2)计算:lg 32*+*log416*+*6lg*-*lg 5*=　　　　.*

id:2147498421;FounderCES探究点二对数函数的图像及应用

例2 (1)函数*f*(*x*)*=*log*a|x|+*1(0*<a<*1)的图像大致是()

A B C D

图2*-*9*-*1

(2)**[**2018·濮阳二模**]** 设*x*1,*x*2,*x*3均为实数,且*=*log2(*x*1*+*1),*=*log3*x*2,*=*log2*x*3,则 ()

A*.x*1*<x*3*<x*2

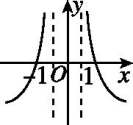
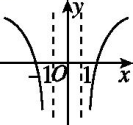
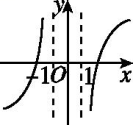
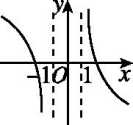
B*.x*3*<x*2*<x*1

C*.x*3*<x*1*<x*2

D*.x*2*<x*1*<x*3

[总结反思] (1)在研究对数函数图像时一定要注意其定义域,注意根据基本的对数函数图像作出经过平移、对称变换得到的函数的图像*.*(2)一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图像问题,利用数形结合法求解*.*

变式题 (1)函数*f*(*x*)*=*ln(*|x|-*1)的大致图像是 ()

A B C D

图2*-*9*-*2

(2)若函数*f*(*x*)*=*log2(*x+*1),且*a>b>c>*0,则,,的大小关系是 ()

A*.>>*

B*.>>*

C*.>>*

D*.>>*

id:2147498484;FounderCES探究点三解决与对数函数性质有关的问题

id:2147498491;FounderCES

微点1比较大小

例3 (1)**[**2018·武汉4月调研**]** 若实数*a*,*b*满足*a>b>*1,*m=*log*a*(log*ab*),*n=*(log*ab*)2,*l=*log*ab*2,则*m*,*n*,*l*的大小关系为 ()

A*.m>l>n* B*.l>n>m*

C*.n>l>m* D*.l>m>n*

(2)**[**2018·长沙雅礼中学期末**]** 已知*a=*ln,*b=*lo,则()

A*.a+b<ab<*0

B*.ab<a+b<*0

C*.a+b<*0*<ab*

D*.ab<*0*<a+b*

[总结反思] 比较对数式的大小,一是将对数式转化为同底的形式,再根据对数函数的单调性进行比较,二是采用中间值0或1等进行比较,三是将对数式转化为指数式,再将指数式转化为对数式,通过巡回转化进行比较*.*

微点2解简单对数不等式

例4 (1)**[**2018·成都七中二诊**]** 若实数*a*满足log*a>*1*>*lo*a*,则*a*的取值范围是 ()

A*.* B*.*

C*.* D*.*

(2)已知实数*a>*0,且满足不等式33*a+*2*>*34*a+*1,则不等式log*a*(3*x+*2)*<*log*a*(8*-*5*x*)的解集为*.*

[总结反思] 对于形如log*af*(*x*)*>b*的不等式,一般转化为log*af*(*x*)*>*log*aab*,再根据底数的范围转化为*f*(*x*)*>ab*或0*<f*(*x*)*<ab.*而对于形如log*af*(*x*)*>*log*bg*(*x*)的不等式,一般要转化为同底的不等式来解*.*

微点3对数函数性质的综合问题

例5 (1)**[**2018·丹东二模**]** 若函数*f*(*x*)*=*存在最小值,则*a*的取值范围为 ()

A*.*(1,*+∞*) B*.*[3,*+∞*)

C*.*(1,3] D*.*(1,]

(2)已知*f*(*x*)*=*lo(*x*2*-ax+*3*a*)在区间[2,*+∞*)上为减函数,则实数*a*的取值范围是*.*

[总结反思] 利用对数函数的性质,求与对数函数有关的函数值域、最值和复合函数的单调性问题,必须弄清三方面的问题:一是定义域,所有问题都必须在定义域内讨论;二是底数与1的大小关系;三是复合函数的构成,即它是由哪些基本初等函数复合而成的*.*另外,解题时要注意数形结合、分类讨论、转化与化归思想的使用*.*

应用演练

1*.*【微点3】若函数*f*(*x*)*=a+*log2*x*在区间[1,*a*]上的最大值为6,则*a=* ()

A*.*2 B*.*4

C*.*6 D*.*8

2*.*【微点1】**[**2018·银川一中四模**]** 设*a=*0*.*50*.*4,*b=*log0*.*40*.*3,*c=*log80*.*4,则*a*,*b*,*c*的大小关系是 ()

A*.a<b<c* B*.c<b<a*

C*.c<a<b* D*.b<c<a*

3*.*【微点2】已知函数*f*(*x*)在区间[*-*2,2]上单调递增,若*f*(log2*m*)*<f*[log4(*m+*2)]成立,则实数*m*的取值范围是 ()

A*.* B*.*

C*.*(1,4] D*.*[2,4]

4*.*【微点3】函数*f*(*x*)*=*log2(*-x*2*+*2*x*)的单调递减区间是*.*

5*.*【微点3】已知函数*f*(*x*)*=*ln(*-x*)*+*2,则*f*(lg 3)*+f=　　　　.*

第9讲对数与对数函数

考试说明 1*.*理解对数的概念及其运算性质,知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数;了解对数在简化运算中的作用*.*

2*.*对数函数

(1)理解对数函数的概念,理解对数函数的单调性,掌握对数函数图像通过的特殊点;

(2)知道对数函数是一类重要的函数模型;

(3)了解指数函数*y=ax*(*a>*0,且*a*≠1)与对数函数*y=*log*ax*(*a>*0,且*a*≠1)互为反函数*.*

【课前双基巩固】

知识聚焦

1*.*对数*x=*log*aN*对数0*N*log*aM+*log*aN*log*aM-*log*aN　n*log*aM*log*ab*

2*.*对数(0,*+∞*)R(1,0)增减

3*.y=*log*ax*(*a>*0,且*a*≠1)*y=x*

对点演练

1*.*1[解析] 利用对数的换底公式可得结果为1*.*

2*.*(*-∞*,2)[解析] 由2*-x>*0,解得*x<*2,即函数*f*(*x*)的定义域为(*-∞*,2)*.*

3*.*1[解析] 函数*f*(*x*)*=*log2*x*,所以*f*(2)*=*1*.*

4*.*(*-∞*,2)[解析] 因为0*<<*1,所以*y=*lo*x*单调递减,而函数*y=x*2*-*4*x+*5*>*0恒成立,且单调递减区间为(*-∞*,2),所以函数*y=*lo(*x*2*-*4*x+*5)的单调递增区间是(*-∞*,2)*.*

5*.①②③④⑤*[解析] *①*lg 10*=*1,则lg(lg 10)*=*lg 1*=*0;*②*lg(ln e)*=*lg 1*=*0;*③*底的对数等于1,则*x=*10;*④*底的对数等于1;*⑤*log*mn=*,log3*m=*,则*=*2,即log3*n=*2,故*n=*9*.*

6*.*4[解析] 因为lg *x+*lg *y=*2lg(*x-*2*y*),所以*xy=*(*x-*2*y*)2,即*x*2*-*5*xy+*4*y*2*=*0,解得*x=y*或*x=*4*y.*由已知得*x>*0,*y>*0,*x-*2*y>*0,所以*x=y*不符合题意,当*x=*4*y*时,得*=*4*.*

7*.c>a>b*[解析] *a==*log9*=*log9*<*log8*=c*,*a=*log9*>*log9*=b*,所以*c>a>b.*

8*.*2或[解析] 分两种情况讨论:(1)当*a>*1时,有log*a*4*-*log*a*2*=*1,解得*a=*2;(2)当0*<a<*1时,有log*a*2*-*log*a*4*=*1,解得*a=.*所以*a=*2或*.*

【课堂考点探究】

例1[思路点拨] (1)先化为同底的对数,根据对数的运算法则得出*m*,*n*之间的关系,再代入求值*.*(2)先反解*x*,*y*,再代入*+=*2,即可得*m*的值*.*

(1)C(2)[解析] (1)因为lo(3*m*)*+*log2*n=*log2(9*m*2)*+*log2*n=*log2(9*m*2*n*),

lo(2*m*2*+n*)*=*log2(2*m*2*+n*)2,

所以9*m*2*n=*(2*m*2*+n*)2,

即4*m*4*-*5*m*2*n+n*2*=*0,解得4*m*2*=n*或*m*2*=n*,

所以log2*m-*log4*n=*log2*m-*log2*=*log2*=-*1或0*.*

(2)由2*x=*5*y=m*,得*x=*log2*m*,*y=*log5*m*,

再由*+=*2,得*+=*2,即log*m*2*+*log*m*5*=*2,

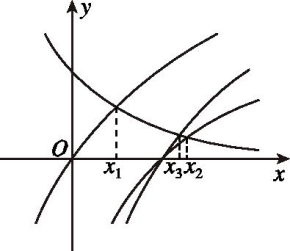
所以log*m*10*=*2,所以*m=.*

变式题(1)C(2)1[解析] (1)令3*x=*4*y=t*,则*x=*log3*t*,*y=*log4*t*,由3*x=py*,得*p===*3log34*=*6log32,故选C*.*

(2)lg 32*+*log416*+*6lg*-*lg 5*=*lg 25*+*log442*-*6lg 2*-*lg 5*=*2*-*lg 2*-*lg 5*=*2*-*lg 10*=*1*.*

例2[思路点拨] (1)由*f*(*x*)的性质及其图像过点(1,1),(*-*1,1)得到答案;(2)在同一坐标系内作出函数*y=*与*y=*log2(*x+*1),*y=*log3*x*,*y=*log2*x*的图像,根据图像得到交点,分析交点的横坐标进行大小比较*.*(2)在同一坐标系内画出函数*y=*与*y=*log2(*x+*1),*y=*log3*x*,*y=*log2*x*的图像,根据图像得到交点,比较交点的横坐标的大小即可*.*

(1)A(2)A[解析] (1)由于函数*f*(*x*)*=*log*a|x|+*1(0*<a<*1)是偶函数,所以其图像关于*y*轴对称*.*当*x>*0时,*f*(*x*)*=*log*a|x|+*1(0*<a<*1)是减函数;当*x<*0时,*f*(*x*)*=*log*a|x|+*1(0*<a<*1)是增函数*.*再由*f*(*x*)的图像过点(1,1),(*-*1,1),可知应选A*.*



(2)*x*1,*x*2,*x*3分别是函数*y=*与*y=*log2(*x+*1),*y=*log3*x*,*y=*log2*x*图像的交点的横坐标,作出函数*y=*,*y=*log2(*x+*1),*y=*log3*x*,*y=*log2*x*的大致图像如图所示,由图可得*x*1*<x*3*<x*2,故选A*.*

变式题(1)B(2)B[解析] (1)函数*f*(*x*)*=*ln(*|x|-*1)的定义域为{*x|x>*1或*x<-*1},且*f*(*x*)是偶函数,故排除C,D;当*x>*1时,函数*f*(*x*)*=*ln(*x-*1)是增函数,故排除A*.*故选B*.*

(2)由题意可得,,,可分别看作函数*f*(*x*)*=*log2(*x+*1)图像上的点(*a*,*f*(*a*)),(*b*,*f*(*b*)),(*c*,*f*(*c*))与原点连线的斜率,结合图像(图略)可知,当*a>b>c>*0时,*>>.*故选B*.*

例3[思路点拨] (1)推导出0*=*log*a*1*<*log*ab<*log*aa=*1,由此利用对数函数的单调性比较*m*,*n*,*l*的大小;(2)先分析出*ab<*0,*a+b<*0,再利用作差法比较*ab*和*a+b*的大小关系得解*.*

(1)B(2)B[解析] (1)*∵*实数*a*,*b*满足*a>b>*1,*m=*log*a*(log*ab*),*n=*(log*ab*)2,*l=*log*ab*2,

*∴*0*=*log*a*1*<*log*ab<*log*aa=*1,

*∴m=*log*a*(log*ab*)*<*log*a*1*=*0,

0*<n=*(log*ab*)2*<*1,

*l=*log*ab*2*=*2log*ab>n=*(log*ab*)2,

*∴l>n>m.*故选B*.*

(2)由题得*a=*ln*<*ln 1*=*0,*b=*lo*>*lo1*=*0,所以*ab<*0*.*

又*a+b=*ln*+*lo*=-*ln 2*+=*ln 2*=*ln 2·*<*0,

则*ab-*(*a+b*)*=ab-a-b=*ln·lo*-*ln*-*lo*=-*ln 2·*+*ln 2*-=*ln 2*=*ln 2·*=*ln 2·*<*0,所以*ab<a+b<*0*.*

例4[思路点拨] (1)分别求解不等式log*a>*1与lo*a<*1,其交集即为不等式的解集;(2)先根据指数不等式确定*a*的范围,然后根据同底的对数不等式求解,并注意真数的取值*.*

(1)C(2)[解析] (1)根据对数函数的性质,由log*a>*1,可得*<a<*1;由lo*a<*1,得*a>.*综上可得*<a<*1,*∴a*的取值范围是,故选C*.*

(2)由题意得3*a+*2*>*4*a+*1,*∴*0*<a<*1,*∴*解得*x*∈*.*

例5[思路点拨] (1)由分段函数在两段上的单调性,结合*f*(*x*)存在最小值,列不等式求解即可;(2)令*t=x*2*-ax+*3*a*,则由题意可得函数*t=x*2*-ax+*3*a*在区间[2,*+∞*)上为增函数,且当*x=*2时,*t>*0,从而得解*.*

(1)C(2)*-*4*<a*≤4[解析] (1)由题意可知*a>*1,否则函数无最小值,

所以当*x>*3时,*f*(*x*)*>*log*a*3,

当0*<x*≤3时,*f*(*x*)*=*lo*x+*2单调递减,且满足*f*(*x*)≥*f*(3)*=*lo3*+*2,

所以log*a*3≥lo3*+*2,即log*a*3≥1,得1*<a*≤3*.*故选C*.*

(2)令*t=x*2*-ax+*3*a*,则由函数*g*(*t*)*=*lo*t*在区间[2,*+∞*)上为减函数,

可得函数*t=x*2*-ax+*3*a*在区间[2,*+∞*)上为增函数,且当*x=*2时,*t>*0,

故有解得*-*4*<a*≤4*.*

应用演练

1*.*B[解析] 由题得函数*f*(*x*)*=a+*log2*x*在区间[1,*a*]上是增函数,所以当*x=a*时,函数取得最大值6,即*a+*log2*a=*6,解得*a=*4*.*故选B*.*

2*.*C[解析] *∵*0*<a=*0*.*50*.*4*<*0*.*50*=*1,

*b=*log0*.*40*.*3*>*log0*.*40*.*4*=*1,

*c=*log80*.*4*<*log81*=*0,

*∴c<a<b.*

3*.*A[解析] 不等式即为*f*(log4*m*2)*<f*[log4(*m+*2)],

*∵*函数*f*(*x*)在区间[*-*2,2]上单调递增,

*∴*即解得≤*m<*2,

*∴*实数*m*的取值范围是*.*故选A*.*

4*.*(1,2)[解析] 由*-x*2*+*2*x>*0,可得*x*2*-*2*x<*0,解得0*<x<*2,

*∴*函数*f*(*x*)*=*log2(*-x*2*+*2*x*)的定义域为(0,2)*.*

又*y=*log2*x*在(0,*+∞*)上单调递增,

*y=-x*2*+*2*x*(0*<x<*2)在(0,1)上单调递增,在(1,2)上单调递减,

*∴*函数*f*(*x*)在(0,1)上单调递增,在(1,2)上单调递减,

*∴*函数*f*(*x*)的单调递减区间是(1,2)*.*

5*.*4[解析] 设*g*(*x*)*=*ln(*-x*),显然有*g*(*-x*)*=-g*(*x*),即*g*(*x*)为奇函数,则*g*(*-x*)*+g*(*x*)*=*0,所以*f*(lg 3)*+f=f*(lg 3)*+f*(*-*lg 3)*=g*(lg 3)*+*2*+g*(*-*lg 3)*+*2*=*4*.*

id:2147507384;FounderCES

【备选理由】 例1主要考查对数的运算、对数函数图像的变换;例2考查比较对数式的大小;例3主要考查复合函数的单调性以及对数函数与指数函数的性质;例4为对数函数性质的综合问题*.*

例1[配合例2使用] 为了得到函数*y=*lg *x*的图像,只需将函数*y=*lg(10*x*)图像上 ()

A*.*所有点的纵坐标伸长到原来的10倍,横坐标不变

B*.*所有点的横坐标缩短到原来的,纵坐标不变

C*.*所有点沿*y*轴向上平移一个单位长度

D*.*所有点沿*y*轴向下平移一个单位长度

[解析] D*y=*lg(10*x*)*=*1*+*lg *x*,将*y=*1*+*lg *x*图像上所有点沿*y*轴向下平移一个单位长度,就得到函数*y=*lg *x*的图像,故选D*.*

例2[配合例3使用] **[**2018·柳州三模**]** 已知*a=*1,*b=*log2017,*c=*log2018,则*a*,*b*,*c*的大小关系为 ()

A*.c>b>a* B*.b>a>c*

C*.a>c>b* D*.a>b>c*

[解析] D*a=*1*>*180*=*1,*b=*log2017*=*log20172018,*∵*log20172018∈(1,2),*∴b*∈*.c=*log2018*=*log20182017,*∵*log20182017∈(0,1),*∴c*∈,*∴a>b>c.*

例3[配合例5使用] 已知函数*f*(*x*)*=*lg的值域是R,则*m*的取值范围是 ()

A*.*(*-*4,*+∞*) B*.*[*-*4,*+∞*)

C*.*(*-∞*,4) D*.*(*-∞*,*-*4]

[解析] D令*t=*5*x++m*,因为*f*(*x*)的值域为R,所以*t*可取(0,*+∞*)内的每一个正数,所以4*+m*≤0,故*m*≤*-*4,故选D*.*

例4[配合例5使用] 已知函数*f*(*x*)*=*log*a*(*x+*1),*g*(*x*)*=*log*a*(1*-x*)(其中*a>*0,且*a*≠1)*.*

(1)求函数*f*(*x*)*+g*(*x*)的定义域;

(2)判断函数*f*(*x*)*-g*(*x*)的奇偶性,并予以证明;

(3)求使*f*(*x*)*+g*(*x*)*<*0成立的*x*的取值集合*.*

解:(1)由题意得

*∴-*1*<x<*1,

*∴*所求定义域为{*x|-*1*<x<*1}*.*

(2)函数*f*(*x*)*-g*(*x*)为奇函数*.*证明如下:

令*h*(*x*)*=f*(*x*)*-g*(*x*),

则*h*(*x*)*=*log*a*(*x+*1)*-*log*a*(1*-x*)*=*log*a*,

则*h*(*-x*)*=*log*a=-*log*a=-h*(*x*),

*∴*函数*h*(*x*)*=f*(*x*)*-g*(*x*)为奇函数*.*

(3)*∵f*(*x*)*+g*(*x*)*=*log*a*(*x+*1)*+*log*a*(1*-x*)*=*log*a*(1*-x*2)*<*0*=*log*a*1,

*∴*当*a>*1时,0*<*1*-x*2*<*1,

即0*<x<*1或*-*1*<x<*0;

当0*<a<*1时,1*-x*2*>*1,不等式无解*.*

综上,当*a>*1时,使*f*(*x*)*+g*(*x*)*<*0成立的*x*的取值集合为{*x|*0*<x<*1或*-*1*<x<*0}*.*