

# 无人机遂行编队飞行中的纯方位无源定位

## 摘要

本文围绕无人机集群在飞行中的纯方位无源定位问题，针对二维圆周队列采用正余弦定理建立了两个数学模型，并在此基础上实现了仿真算法；针对三维锥形队列建立了动态规划算法，利用 MATLAB 实现了对问题的求解。

针对问题一第一问，根据几何关系，建立极坐标系。在建立的极坐标系中通过寻找发射源与接收源之间的角度关系，根据正弦定理联立方程，建立数学模型。利用 MATLAB 实现模型，根据不同的发射源位置可求出接收源的极坐标，并在此基础上实现了与理想化无人机位置的对比模型（详见 result1-5）。

针对问题一第二问，设计了一个正余弦定理结合的数学模型，首先通过发射源个数  $n=1$  到  $n=4$  逐个进行分析，确定有效三角形的个数。我们发现当  $n \geq 3$  时，都可以有效的确定接收源无人机的位置，为避免多个信号发射源之间的干扰，最终得出当  $n=3$  时是最优解，也就是再添加一架发射源（编号任意）。

针对问题一的第三问，设计了一个模拟仿真算法，首先根据表中的数据，我们选取了极径为 98m 的圆周为无人机飞行轨道，然后将各个点极径的长度与 98m 作比较，确定出点的运动方向。将此时无人机的位置夹角和理想化轨迹与发射源之间的夹角做对比，判断出点在圆周上的移动方向。

针对问题二，首先由于无人机集群不一定处于同一高度，并且无法具体确定发射信号无人机的位置和个数，因此本文根据相邻无人机距离相等且夹角具有一定的关系，设计了一个基于动态规划算法的可行性具体调整方案。

**关键词：**正余弦定理；仿真算法；发射源；接收源；纯无源定位

# 一、 问题背景与重述

随着无人机行业的飞速发展，无人机表演已逐渐进入大众视线，<sup>[1]</sup>由于无人机在表演时，为了保持编队队形，需要尽可能的避免外界干扰，所以通常采用无源定位的方法来监控并调整无人机的位置，即由编队中某几架无人机发射信号、其余无人机被动接收信号，从中提取出方向信息进行定位，来调整无人机的位置。无源定位具有抗干扰能力强,可以全天候工作,在无人机起飞前就能实现对无人机和操作手的定位等诸多优点，可以有效地保障在编队中与其他无人机的相对位置关系保持不变。根据题意，本文需要解决的问题有：

问题一：编队由 10 架无人机组成，形成圆形编队，其中 9 架无人机（编号 FY01~FY09）均匀分布在某一圆周上，另 1 架无人机（编号 FY00）位于圆心（见图 1）。

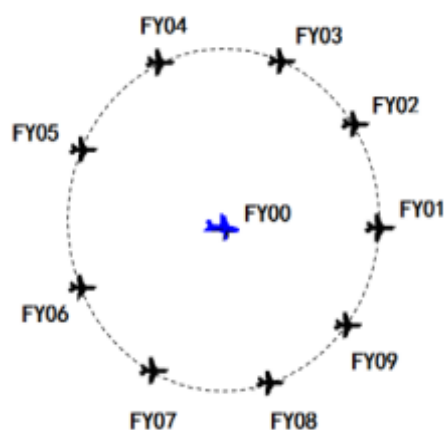


图 1

表 1 无人机的初始位置

无人机编号	极坐标 (m,°)
0	(0,0)
1	(100,0)
2	(98,40.10)
3	(112,80.21)
4	(105,119.75)
5	(98,159.86)
6	(112,199.96)
7	(105,240.07)
8	(98,280.17)
9	(112,320.28)

表 1

（1）位于圆心的无人机（FY00）和编队中另 2 架无人机发射信号，其余位置略有偏差的无人机被动接收信号。当发射信号的无人机位置无偏差且编号已知时，建立被动接收信号无人机的定位模型。

（2）某位置略有偏差的无人机接收到编号为 FY00 和 FY01 的无人机发射的信号，另接收到若干编号未知的无人机发射的信号。若发射信号的无人机位置无偏差，除 FY00 和 FY01 外，应还需要几架无人机发射信号。

（3）按编队要求，1 架无人机位于圆心，另 9 架无人机均匀分布在半径为 100m 的圆周上。当初始时刻无人机的位置略有偏差时，请给出合理的无人机位置调整方案，即通过多次调整，每次选择编号为 FY00 的无人机和圆周上最多 3 架无人机遂行发射信号，其余无人机根据接收到的方向信息，调整到理想位（每次调整的时间忽略不计），使得 9 架无人机最终均匀分布在某个圆周上。利用表 1 给出的数据，仅根据接收到的方向信息来调整无人机的位置，给出具体的调整方案。

问题二：实际飞行中，无人机集群也可以是其他编队队形，例如锥形编队队形（见图 3 直线上相邻两架无人机的间距相等，如 50m）。仍考虑纯方位无源定位的情形，设计无人机位置调整方案。



### 三、模型假设

- (1) 假设问题一无人机均保持同一高度
- (2) 假设无人机位置略有偏差，不会出现较大位置的偏移，在合理的范围内
- (3) 假设问题二无人机编号确定，理想化无人机飞行轨迹确定
- (4) 在无人机调整位置时，忽略时间、信号强弱、高度等因素
- (5) 保证一架无人机不能同时作为发射方和接收方

### 四、符号说明

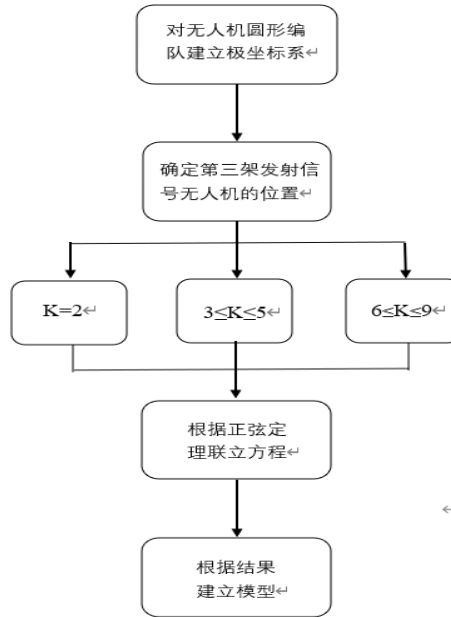
符号	意义
$\alpha_1$	FY00 与 FY01 之间的夹角
$\alpha_2$	FY00 与 FY0K 之间的夹角
$\alpha_3$	FY01 与 FY0K 之间的夹角
$x$	接收信号无人机位置的极径
$\theta$	正极轴开始逆时针方向到接收信号无人机位置的圆心角
$k$	无人机编号
$\alpha$	$40^\circ$
$R$	圆的半径
$M$	接收信号的无人机

### 五、模型的建立与求解

#### 5.1 第一题第一问模型的建立与求解

以 FY00 和 FY01 方向为正方向建立极坐标系，设无人机所形成圆的半径为  $R$ ，由题目可知三架发射信号无人机的位置无偏差，因此我们可以假设 FY00、FY01 是已知的两架发射信号的无人机，他们的极坐标分别是  $(0, 0)$ ， $(R, 0)$ ，另一架的发射信号的无人机  $M$  的极坐标设为  $(R, (K-1)\alpha)$ ，其中  $K \neq 0, 1$ ，接收信号无人机位置可能存在偏差，我们假设它在理想位置，也就是在圆周上面，设接收信号无人机的极径为  $x$ ，圆心角为  $\theta$ ，即它的极坐标为  $(x, \theta)$ 。接着假设 FY00 与 FY01 之间的夹角为  $\alpha_1$ ，FY00 与 FY0K 之间的夹角为  $\alpha_2$ ，FY01 与 FY0K 之间的夹角为  $\alpha_3$ ，因为发射信号无人机的位置无偏差且角度确定，因此我们可以用正弦定理来确定接收信号无人机的位置是否存在偏差。<sup>[5]</sup>

我们按第三架发射信号无人机的位置以及接收信号无人机的位置是否在两架发射信号的无人机之间，将模型分为三类：



问题一流程图

(1) 当  $K=2$  且  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  时，如图 2 所示，接收信号的无人机不在发射信号的无人机之间。

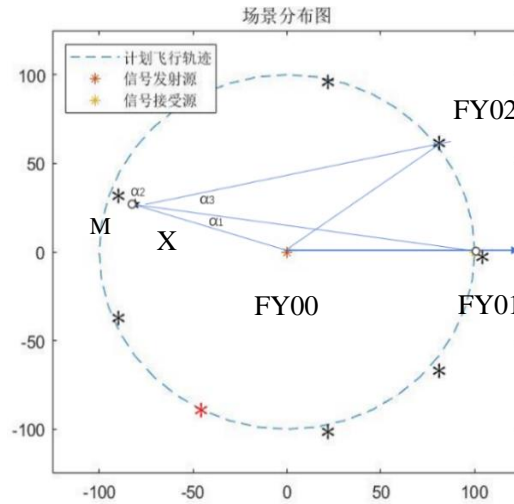


图 2

根据  $\triangle OM2$  和  $\triangle OM1$  运用正弦定理，联立方程可得：

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta - \alpha_1)}{X} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X} \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\pi - (\theta - (k-1)\alpha + \alpha_2))}{X} \end{cases}$$

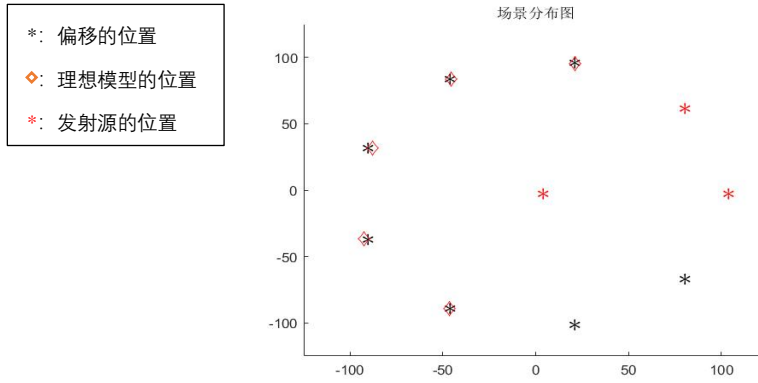
令  $\beta = \alpha_2 - (k-1)\alpha + \alpha_2$

$$\text{则} \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\theta + \beta)}{X} & 2 \end{cases}$$

1、2 交叉相乘得：

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2 - (k-1)\alpha + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2 - (k-1)\alpha + \alpha_2) - \sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)}\right) \\ x = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} R \end{cases}$$

根据所得 $\theta$  和  $x$  的值用 MATLAB 建立模型如图所示：



当  $K=2$  且  $\alpha_1 > \alpha_2$  时，如图 3 所示，接收信号的无人机不在发射信号的无人机之间

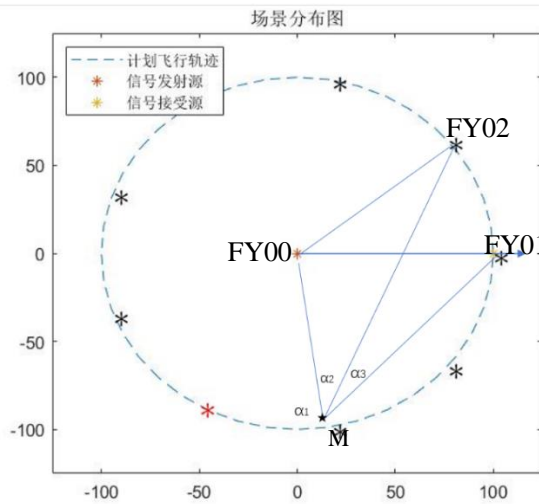


图 3

根据 $\triangle OM_2$  和 $\triangle OM_1$  运用正弦定理，联立方程可得：

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta - \alpha_1)}{X} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X} \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\pi - ((2\pi - \theta) + (k-1)\alpha + \alpha_2))}{X} = \frac{\sin((k-1)\alpha + \alpha_2 - \theta)}{X} \end{cases}$$

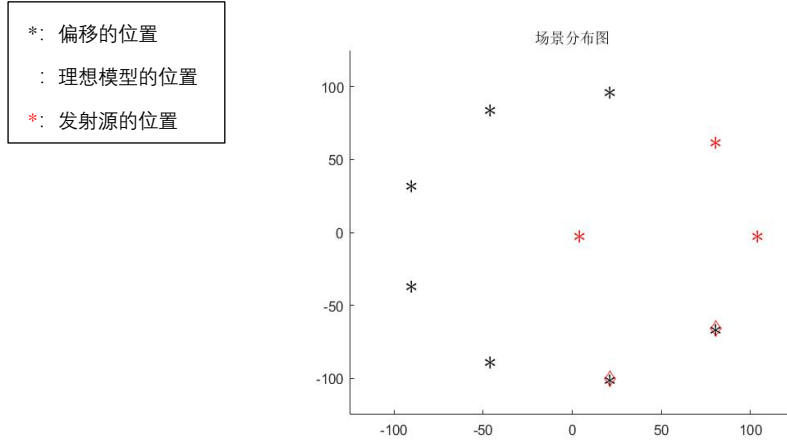
令  $\beta = (k-1)\alpha + \alpha_2$

$$\text{则} \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\beta - \theta)}{X} & 2 \end{cases}$$

1、2 交叉相乘得：

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2 + (k-1)\alpha) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2 + (k-1)\alpha)}\right) \\ x = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} R \end{cases}$$

根据所得 $\theta$  和  $x$  的值用 MATLAB 建立模型如图所示：



(2) 当  $K=3, 4, 5, \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$  且  $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1$  如图 4 所示，接收信号的无人机不在发射信号的无人机之间。

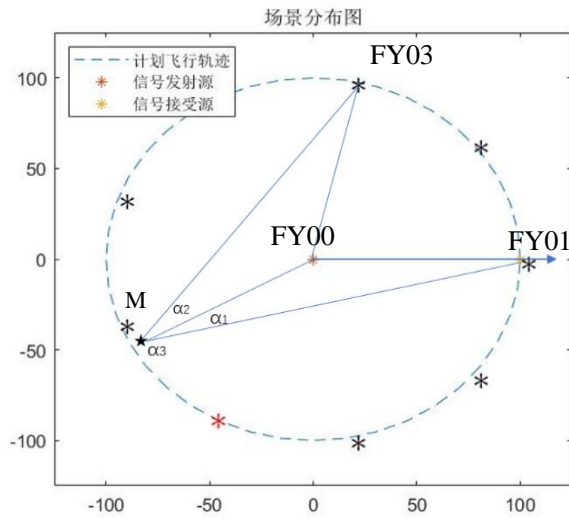
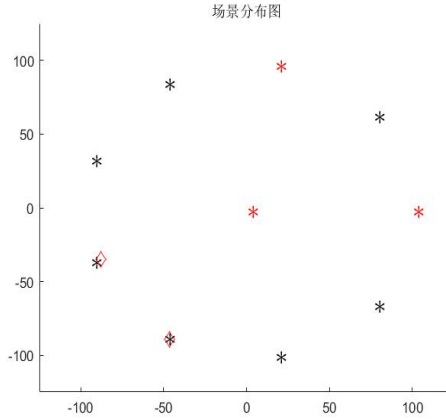
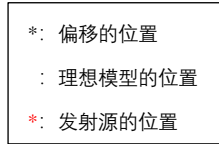


图 3

因为根据 $\triangle OM_2$  和 $\triangle OM_1$  运用正弦定理所求出的方程与图 3 上根据 $\triangle OM_3$  和 $\triangle OM_1$  运用正弦定理所求出的方程相同，因此所得出的结果也相同，根据结果用 MATLAB 编程，所建立的模型如图所示：



当  $K=3, 4, 5$ ,  $\alpha_3 < \frac{\pi}{2}$  且  $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$  如图 4 所示, 接收信号的无人机不在发射信号的无人机之间。

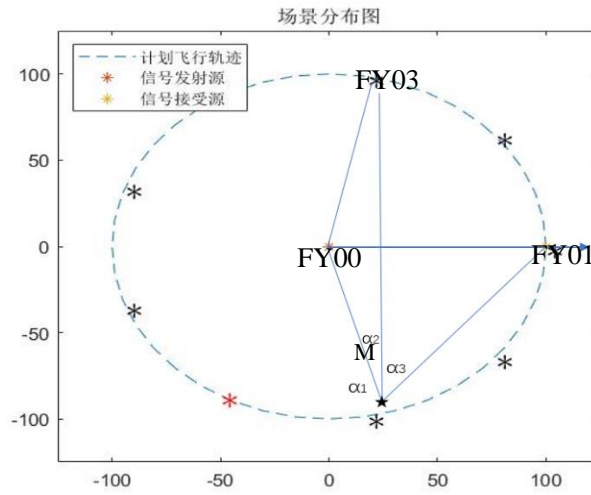


图 4

根据  $\triangle OM_2$  和  $\triangle OM_1$  运用正弦定理, 联立方程可得:

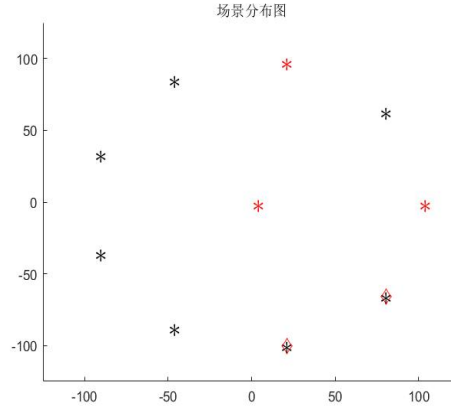
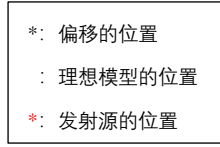
$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\pi - (2\pi - \theta + \alpha_1))}{X} = \frac{\sin(\alpha_1 - \theta)}{X} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\pi - ((2\pi - \theta) + (k-1)\alpha + \alpha_2))}{X} = \frac{\sin((k-1)\alpha + \alpha_2 - \theta)}{X} & 2 \end{cases}$$

1、2 交叉相乘得:

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1) \sin((k-1)\alpha) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) (\cos((k-1)\alpha) - 1)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos((k-1)\alpha) - \sin(\alpha_1) \sin((k-1)\alpha) \sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1)}\right) \\ x = \frac{\sin(\alpha_1 - \theta)}{\sin(\alpha_1)} R \end{cases}$$

根据所得  $\theta$  和  $x$  的值用 MATLAB 建立模型如图所示:





当  $K=3, 4, 5, \alpha_3 \geq \frac{\pi}{2}$  时, 如图 5 所示, 此时接收信号的无人机在发射信号的无人机之间。

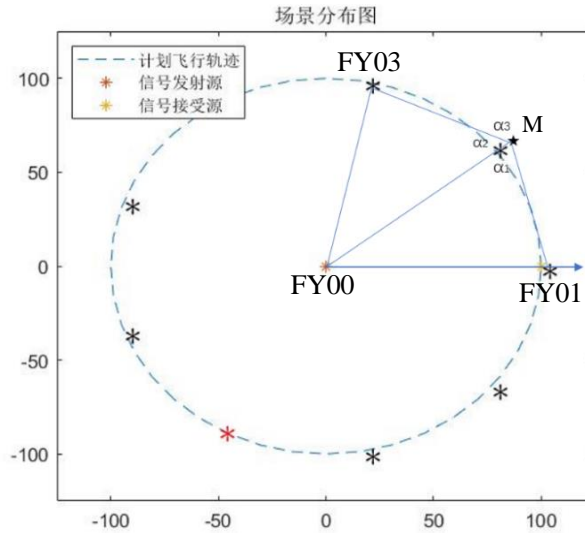


图 5

根据  $\triangle OM2$  和  $\triangle OM1$  运用正弦定理, 联立方程可得:

$$\begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta - \alpha_1)}{X} = \frac{\sin(\alpha_1 + \theta)}{X} \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\pi - ((k-1)\alpha - \theta) - \alpha_2)}{X} = \frac{\sin((k-1)\alpha + \alpha_2 - \theta)}{X} \end{cases}$$

1、2 交叉相乘得:

$$\begin{cases} \theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1) \sin((k-1)\alpha) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) (\cos(k-1)\alpha - 1)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2) \cos((k-1)\alpha) - \sin(\alpha_1) \sin((k-1)\alpha) \sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1)}\right) \\ x = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} R \end{cases}$$

根据所得  $\theta$  和  $x$  的值用 MATLAB 建立模型如图所示:



$$X(M, F04) = X(F04, F03) = X(F03, F02) = X(F02, F01) = X(r)$$

接收信号无人机的方向信息

R

$$\forall F00MF01$$

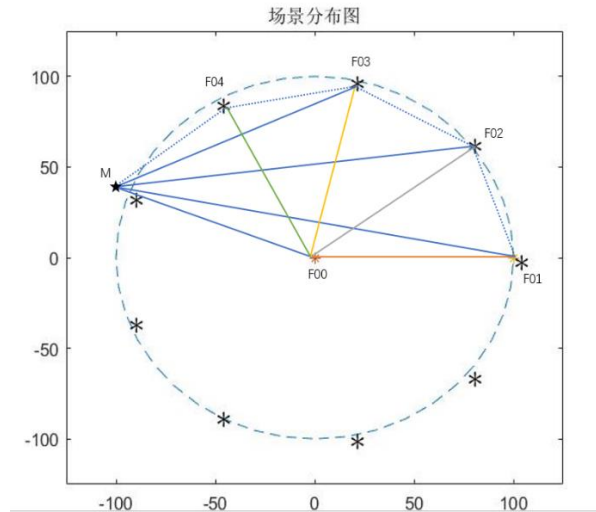


图 7

令有效三角形个数为  $m$

(1) 当  $n = 1$  时(题目给出接收信号固定为  $F00$  和  $F01$ )

$\forall F00MF01$  为有效三角形,  $m = 1$ , 在三角形  $\forall F00MF01$  中, 不能通过  $F00$  和  $F01$  这两个发射点来确定接收点  $M$  的位置, 所以  $n$  需要增大。

(2) 当  $n = 2$  时, 除去固定的发射源  $F01$ , 另一个发射源可能位于 ( $F02$   $F03$   $F04$   $F06$   $F07$   $F08$   $F09$ ) 中的一个。假设另一发射源在  $F02$ , 构成三角形为  $\forall F00MF02$  和  $\forall F01MF02$  两个关系三角形, 此时  $F00$   $F01$   $M$   $F02$  构成几何图形符合定位模型, 即: 可求出  $\angle F00MF01$  和  $\angle F01MF02$

知道两边一夹角, 由三角函数式得:

$$|F00M|^2 + |F01M|^2 - 2 * |F00M| * |F01M| * \cos(\angle F00MF01) = |F00F01|^2$$

$$|F01M|^2 + |F02M|^2 - 2 * |F01M| * |F02M| * \cos(\angle F01MF02) = |F01F02|^2$$

未知量为  $|F01M|$   $|F02M|$ , 因为是在假设第二个信号发射源为  $F02$  情况下,  $|F01F0k|$  ( $k=2$ ) 是已知的, 长度为  $X(r)$ , 脱离假设  $|F01F0k|$  同样是未知量由等差排列可以计算:

$$m = A_n^1 + C_n^2$$

未知量个数为  $p$ , 未知量就是所有构成三角形的边数

$$p = A_n^1 + C_n^2$$

圆周上接收信号无人机个数	有效三角形
$n=1$	$\triangle MF00F01$

n=2	$\triangle MF00F01$ 、 $\triangle MF00F02$ 、 $\triangle MF01F02$
n=3	$\triangle MF00F01$ 、 $\triangle MF00F02$ 、 $\triangle MF00F03$ $\triangle MF01F02$ 、 $\triangle MF01F03$ 、 $\triangle MF02F03$

由数据表格验证得： $m = p$ ；所以确定 M 位置最少需要 3 架无人机，即需要再添加一个发射源。

综上所述：

$$|F00M|^2 + |F01M|^2 - 2 * |F00M| * |F01M| * \cos(\angle F00MF01) = |F00F01|^2$$

$$|F01M|^2 + |F02M|^2 - 2 * |F01M| * |F02M| * \cos(\angle F01MF02) = |F01F02|^2$$

$$m = A_2^1 + C_2^2$$

$$p = A_2^1 + C_2^2$$

联立

$$|F01M| = \pm \sqrt{|F00F01|^2 - |F00M|^2 \sin^2(\angle F00MF01)} \\ + |F00M| \cos(\angle F00MF01)$$

$$|F02M| = \pm \sqrt{|F01F02|^2 - |F01M|^2 \sin^2(\angle F01MF02)} \\ + |F01M| \cos(\angle F01MF02)$$

而在实际中圆上两个信号发射源可能并不相邻，依然可以通过编号计算出发射源飞行器之间的直线距离。当共有三架发射信号飞行器时即可确定 M 的位置此时发射信号飞行器最少，为保证减少干扰，保持静默平衡，只需添加一架发射信号源飞行器。编号任意。

附加推导方程：

$$|F00M|^2 + |F01M|^2 - 2 * |F00M| * |F01M| * \cos(\angle F00MF01) = |F00F01|^2$$

$$|F01M|^2 + |F02M|^2 - 2 * |F01M| * |F02M| * \cos(\angle F01MF02) = |F01F02|^2$$

$$|F02M|^2 + |F03M|^2 - 2 * |F02M| * |F03M| * \cos(\angle F02MF03) = |F02F03|^2$$

$$m = A_3^1 + C_3^2$$

$$p = A_3^1 + C_3^2$$

联立得：

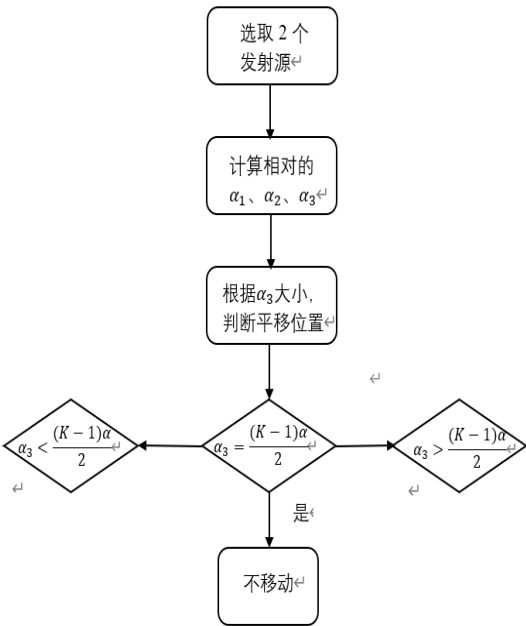
$$|F02M| = \pm \sqrt{|F01F02|^2 - |F01M|^2 \sin^2(\angle F01MF02)} \\ + |F01M| \cos(\angle F01MF02)$$

$$|F03M| = \pm \sqrt{|F02F03|^2 - |F02M|^2 \sin^2(\angle F02MF03)} \\ + |F02M| \cos(\angle F02MF03)$$

(3) 当 n=3 时在 M 处的角更多更充足，更容易计算出 M 的位置，但是此时一共有 4 架可能会产生干扰，打破平衡。

5.3 第一题第三问模型的建立与求解

因为所给数据中有三个点的极径为 98m，所以建立一个极径为 98m 的圆周，将表一中的数据表示在圆上，如图 8 所示，无人机 2、5、8 在圆上，随机选取两个点作为发射信号的无人机，我们选取 2 和 5 作为发射信号的无人机，如图 9 所示



问题三流程图

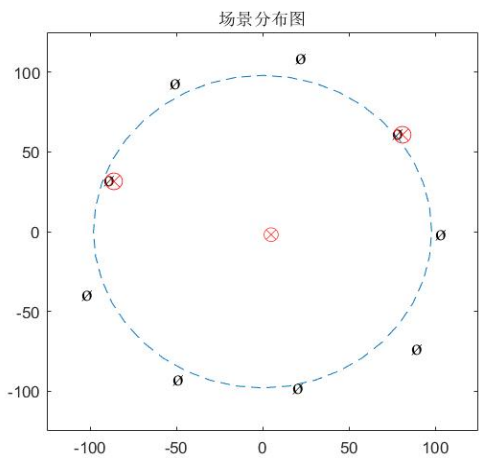


图 8

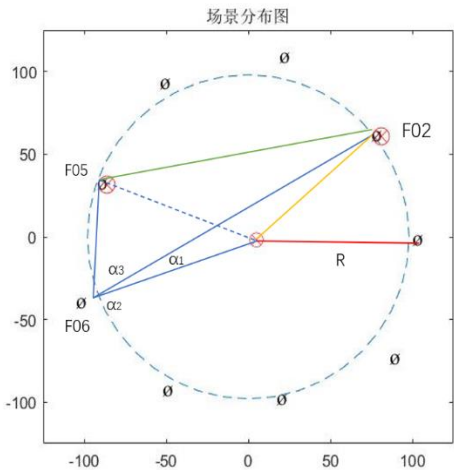


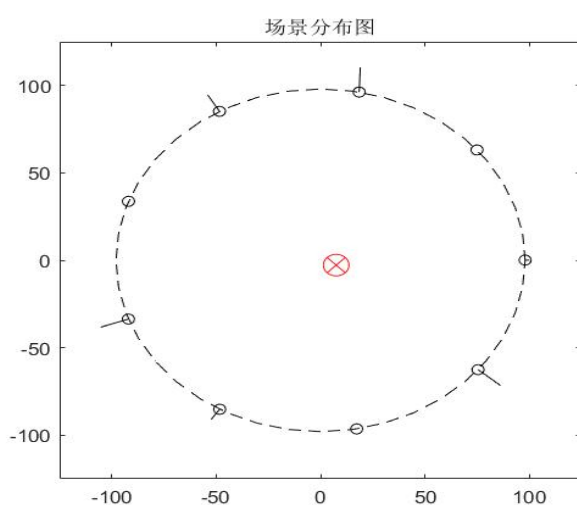
图 9

(1) 用各个点的极径长度与 98m 作比较, 当极径长度等于 98m, 无人机不需要移动; 极径长度小于 98m 时, 无人机沿着极径方向作远离圆心运动; 极径长度大于 98m 时, 无人机沿着极径方向作靠近圆心运动, 移动方向和位移长度如表格和模型所示:

表格:

编号	方向	位移长度
1	沿着极径方向作靠近圆心运动	2
3	沿着极径方向作靠近圆心运动	14
4	沿着极径方向作靠近圆心运动	7
6	沿着极径方向作靠近圆心运动	14
7	沿着极径方向作靠近圆心运动	7
9	沿着极径方向作靠近圆心运动	14

模型:



(2) 调整点 2、5 的角度使其移动到理想位置，即点均匀分布在圆上，此时点 2 的极坐标为 (98, 40)，点 5 的坐标为 (98, 160)

(3) 此时其他六个点均在圆上，再次计算这六个点相对的 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 的值

编号	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
1	69.95	10.07	80.00
3	69.95	50.18	120.12
4	50.18	69.95	120.12
6	9.98	69.95	79.93
7	10.07	49.89	59.96
9	50.09	9.79	59.88

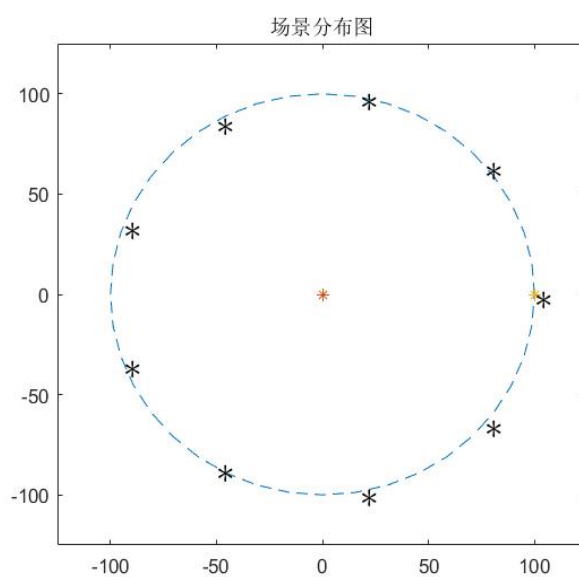
(4) 当六个点都在理想位置时，这六个点相对的 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 的值

编号	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
1	70	10	80
3	70	50	120
4	50	70	120
6	10	60	70
7	10	50	60
9	50	10	60

(5) 将 (3) 和 (4) 中的六个点相对的 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 的值做对比得出六个点的移动方向

编号	方向
1	不移动
3	沿着圆弧向下移动
4	沿着圆弧向下移动
6	沿着圆弧向下移动
7	沿着圆弧向上移动
9	沿着圆弧向下移动

最终所有无人机都均匀分布在圆周上，如图所示：



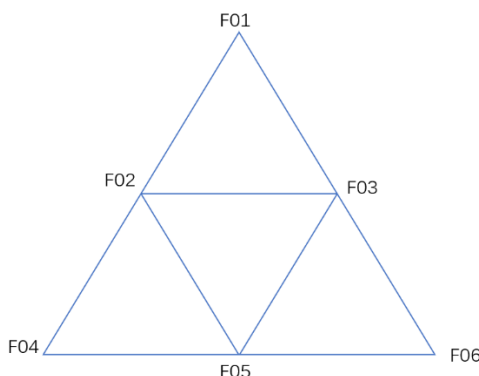
## 5.4 第二题第模型的建立与求解

在问题二中，题目未给出初始发射源无人机的位置，无法通过纯无源定位的未知信息来确定集群中每一架无人机的位置。由于相邻两架无人机距离相等即角度是相同的，我们可以通过无人机之间的距离和角度进行判断无人机位置偏差以及如何对无人机进行适当的调整，使得集群中各架无人机调整到理想轨迹中。为了保持无人机飞行集群中静默平衡，我们应让发射信号的无人机数量尽可能少，以减少无人机之间的电磁干扰。可以转换为一个动态规划问题。<sup>[3]</sup> 动态规划主要思想就是最优子结构和重叠子问题，第一步刻画最优解的结构，第二步判断问题的解结构是否包含子问题的最优解，进而得到整体问题的最优解。第三步，判断是否是算法终止条件。<sup>[2]</sup>

对于本问中设置初始点为 F01，则有以 F01 为顶点的关系三角形

(1) 选择发射信号无人机为 F02, F03:

此时先忽略 F01, F02, F03 距离地面的绝对高度，由三点确定的  $\triangle F02F01F03$  平面，得 F01, F02, F03 在同一平面。由两架无人机发射信号，并且三架无人机之间距离相等，通过将 F01 升高降低或者定量移动，将  $\angle F02F01F03$  调整为  $60^\circ$ 。



对于 F01 调整完后，为了使其余无人机均在同一平面。我们需要从 F01 相邻的无人机中选择下一步进行调整的无人机，由于等边三角形的对称性，自 F01 之后选择 F02 或者 F03 都是一样的

(2) 选择发射信号无人机为 F01, F02, F03:

F04 接收到 F01, F02, F03 的信号，将 F04 调整到和 F01, F02 同一直线。然后通过 F04 和 F05 对 F02 进行调整，使得  $\angle F04F02F05=60^\circ$

(3) 选择发射信号无人机为 F01, F03, 通过调整 F02 的位置，使得  $\angle F01F02F03=60^\circ$ ，此时 F01, F02, F03 在同一平面且高度相同

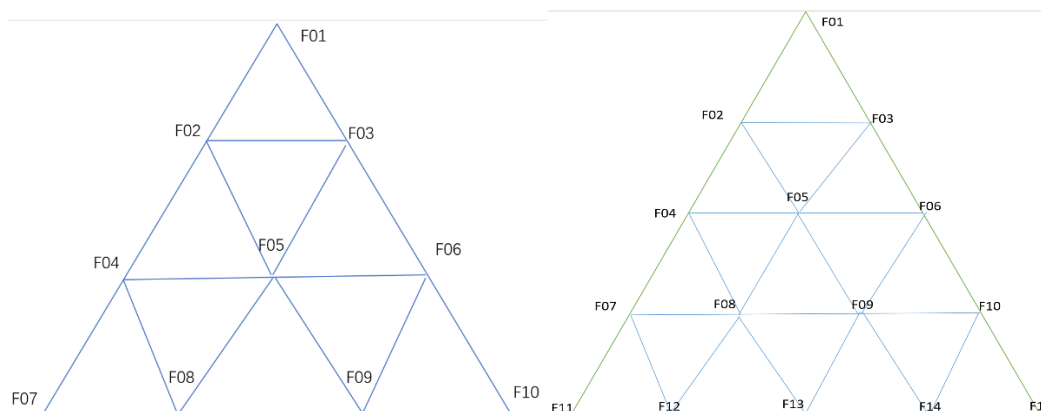
(4) 选择发射信号为 F01, F02, F03:

F05 接收到 F01, F02, F03 的信号后，通过调整 F05 位置，使得 F01, F02, F03, F05 在同一平面

(5) 将 F01, F03, F05 作为信号发射源，将 F06 移动调整至  $\angle F01F06F05=60^\circ$



由步骤（1）-（5）可以将六架无人机(F01…F06)构成的三角形  
 $\nabla F01F04F06$ 调整为相邻两个无人机在同一平面上。



总体 15 架无人机可以分为 6 个由 $\nabla F01F04F06$ 构成的大三角形，分别对大三角形中六个小三角形运算（1）-（6）便可以将 15 架无人机调整到规划飞行的位置。

## 六、模型评价与改进

### 6.1 正弦定理求解模型

- （1）优点：第一问在建立模型的过程中，利用三角恒等式和正弦定理结合的方式，把问题简单化。
- （2）缺点：未知角度过多，计算过程较为复杂。
- （3）改进：用简单的未知数代替复杂的多项式，例如：令  $\beta = (k-1)\alpha + \alpha_2$

### 6.2 正余弦定理结合的数学模型

- （1）优点：正弦定理计算简单，易得出结果；并且结合余弦定理可以进一步保证求得的结果是唯一的。
- （2）缺点：计算量极大，容易混淆角度。
- （3）改进：正余弦定理所求出的为近似值，需要提高精确度。

### 6.3 数学模型和编程实现求解

- （1）优点：先用极坐标计算出相关角度，再用代码实现过程，使得结果简单易懂、直观明了。
- （2）缺点：极坐标计算角度，作图复杂，容易混淆。  
代码过程复杂，难以实现，代码不能动态的显示效果。
- （3）改进：图形复杂，编程时因为数值 $\pi$ 的使用，精确度有待提高。

## 参考文献

- [1] 秦顾正. 对无人机的无源定位关键技术研究[D]. 东南大学.
- [2] 王磊, 王英勋. 动态规划算法在无人机航路离线规划中的应用[C]// 中国航空学会控制与应用学术年会. 中国航空学会, 2002.
- [3] 安柏义, 曹云峰. 基于动态规划的无人机航路优化问题研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16(8):4.
- [4] 曾微波, 童矿. 一种基于二三维一体化的无人机路径动态规划方法:, CN110488871A[P]. 2019.
- [5] 王本才, 王国宏, 何友. 多站纯方位无源定位算法研究进展[J]. 电光与控制, 2012, 19(5):7.
- [6] 徐敬. 舰艇对海上目标纯方位无源定位研究. 大连理工大学, 2002.

## 附录:

```
%1, 一问空白背景均等分布
clear;
clc;
t=0:pi/20:2*pi;
r=100;
x=r*cos(t);
y=r*sin(t);
plot(x,y,'--',0,0,'*');
hold on;
plot(100,0,'*');
axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");
xt=[100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yt=[100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
hleg1=legend('计划飞行轨迹','信号发射源','信号接收源');
set(hleg1,'Location','NorthWest');
text(100*cos(3*2*pi/9),100*sin(3*2*pi/9),'\ast','FontSize',20,'Color','r');
text(100*cos(6*2*pi/9),100*sin(6*2*pi/9),'\ast','FontSize',20,'Color','r');

%2 一问公式 1 输出 x
%使用需实时更新 a1,a2 数据
a1=70;
a2=70;
k=2;

%a1=[30 30 30]
%a2=[100 80 100]
%k=4;
R=100;
a=2*180/9;
%s1=sin(a1)*sin(a2)-sin(a1)*sin(a2-(k-1)*a);
%s2=sin(a1)*cos(a2-(k-1)*a)-sin(a2)*cos(a1);
data=atan(sind(a1)*sind(a2)-sind(a1)*sind(a2-(k-1)*a)/sind(a1)*cosd(a2-(k-1)*a)-
sind(a2)*cosd(a1));
x=sind(data+a1)/sind(a1)*R;
x;
```

```

%3 一问公式 2 输出 x
clear;
clc;
a1=30;
a2=100;
R=100;
k=2;
a=2*180/9;
data=atan((sind(a1)*sind(a2+(k-1)*a)-
sind(a1)*sind(a2))/(sind(a2)*cosd(a1)+sind(a1)*cosd(a2+(k-1)*a)));
x=sind(data+a1) / sind(a1) * R;
data;
x;

%4 一问 result1
clear;
clc;
%fun02 得出极径,和圆心角计算得出并标记在图上
%result1
axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");
xt=[ 100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(3*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(6*2*pi/9) 100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) ];
yt=[ 100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(3*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(6*2*pi/9) 100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) ];
xf=[100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yf=[100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)]
xc=[98.7155*cos(2*2*pi/9) 98.7155*cos(3*2*pi/9) 97.7186*cos(4*2*pi/9)
102.7163*cos(5*2*pi/9) 101.0679*cos(6*2*pi/9)];
yc=[98.7155*sin(2*2*pi/9) 98.7155*sin(3*2*pi/9) 97.7186*sin(4*2*pi/9)
102.7163*sin(5*2*pi/9) 101.0679*sin(6*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
text(xf,yf,'\ast','Color','r','FontSize',20);
text(xc,yc,'\diamondsuit','Color','r','FontSize',13);
text(0,0,'\ast','Color','r','FontSize',20);

%5 一问 result2
clear;
clc;
%fun02 得出极径,和圆心角计算得出并标记在图上
%result2
axis([-125 125 -125 125]);

```

```

title("场景分布图");
xt=[ 100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(3*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(6*2*pi/9) 100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) ];
yt=[ 100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(3*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(6*2*pi/9) 100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) ];
xf=[100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yf=[100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)]
xc=[100.3339*cos(7*2*pi/9) 100.1763*cos(8*2*pi/9)];
yc=[100.3339*sin(7*2*pi/9) 100.1763*sin(8*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
text(xf,yf,'\ast','Color','r','FontSize',20);
text(xc,yc,'\diamondsuit','Color','r','FontSize',13);
text(0,0,'\ast','Color','r','FontSize',20);

```

%6 一问 result3

```

clear;
clc;
%fun02 得出极径,和圆心角得出并标记在图上
%result3
axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");
xt=[ 100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(3*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(6*2*pi/9) 100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) ];
yt=[ 100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(3*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(6*2*pi/9) 100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) ];
xf=[100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yf=[100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)]
xc=[100.1157*cos(7*2*pi/9) 100.2761*cos(8*2*pi/9)];
yc=[100.1157*sin(7*2*pi/9) 100.2761*sin(8*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
text(xf,yf,'\ast','Color','r','FontSize',20);
text(xc,yc,'\diamondsuit','Color','r','FontSize',13);
text(0,0,'\ast','Color','r','FontSize',20);

```

%7 一问 result4

```

clear;
clc;
%fun02 得出极径,和圆心角得出并标记在图上
%result4
axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");

```

```

xt=[ 100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(3*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(6*2*pi/9) 100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) ];
yt=[ 100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(3*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(6*2*pi/9) 100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) ];
xf=[100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yf=[100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)]
xc=[100.1157*cos(7*2*pi/9) 100.2761*cos(8*2*pi/9)];
yc=[100.1157*sin(7*2*pi/9) 100.2761*sin(8*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
text(xf,yf,'\ast','Color','r','FontSize',20);
text(xc,yc,'\diamondsuit','Color','r','FontSize',13);
text(0,0,'\ast','Color','r','FontSize',20);

```

%8 result5

```

clear;
clc;
%fun02 得出极径,和圆心角得出并标记在图上

```

%result5

```

axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");
xt=[ 100*cos(1*2*pi/9) 100*cos(3*2*pi/9) 100*cos(4*2*pi/9) 100*cos(5*2*pi/9)
100*cos(6*2*pi/9) 100*cos(7*2*pi/9) 100*cos(8*2*pi/9) ];
yt=[ 100*sin(1*2*pi/9) 100*sin(3*2*pi/9) 100*sin(4*2*pi/9) 100*sin(5*2*pi/9)
100*sin(6*2*pi/9) 100*sin(7*2*pi/9) 100*sin(8*2*pi/9) ];
xf=[100*cos(2*2*pi/9) 100*cos(9*2*pi/9)];
yf=[100*sin(2*2*pi/9) 100*sin(9*2*pi/9)]
xc=[100.0810*cos(1*2*pi/9)];
yc=[100.0810*sin(1*2*pi/9)];
text(xt,yt,'\ast','FontSize',20);
text(xf,yf,'\ast','Color','r','FontSize',20);
text(xc,yc,'\diamondsuit','Color','r','FontSize',13);
text(0,0,'\ast','Color','r','FontSize',20);

```

%9 问题三模拟调整方案

```

clear;
clc;
%问题一第三问位置调整方案
%规划圆周到圆心距离
dr=98;
%将题的数据以数组形式输入;
initDightData=[100,0;98,40.10;112,80.21;109,119.75;98,159.86;112,199.96;105,240.
07;98,280.17;112,320.28];

```

```

%将极坐标转化为对应的圆心角
initDightData(:,2)=initDightData(:,2)*pi/180;
%将对应的圆心角转化为直角坐标
initDightData=[initDightData(:,1).*cos(initDightData(:,2)),initDightData(:,1).*sin(init
DightData(:,2))];

for i=1:length(initDightData)
    %将各个点位以数组形式存储 choose
    choseData=initDightData(i,:);
    %假设飞行器都会匀速的运行在 98 的轨迹上,此时规定点到圆心距离 < R
    为正 远离圆心
    %记录当前状态
    curStatus=choseData;
    %r 为无人机到圆心的直线距离
    r=sqrt(choseData(1).^2+choseData(2).^2);
    %当前接收飞行器到圆心的距离为 r > R 点需要从外向圆心运行
    if r>dr
        curStatus=-curStatus;
    end
    %增加扰动通过比率消除
    curStatus=curStatus+20*rand(1,2);
    %扰动比率
    k=curStatus(2)/curStatus(1);
    %不同点运动和圆周的交点
    syms x y
    %solve 解决 x,y
    s=solve(x^2+y^2==98^2,y==k*x+-k*choseData(1)+choseData(2),x,y);
    %line 操作双精度强转成 double
    curX=double(s.x);
    curY=double(s.y);
    myListData=sqrt((curX-choseData(1)).^2+(curY-choseData(2)).^2);
    [tmp,dataNum]=min(myListData);
    %找到接收位置无人机最近的交点
    myPoint(1)=curX(dataNum);
    myPoint(2)=curY(dataNum);
    %输出
    myPoint
    r = 98;
    a = 0;%圆心横坐标
    b = 0;%圆心纵坐标
    %画圆
    t = 0:pi/20:2*pi;

```

```

x1 = a+r*cos(t);
y1 = b+r*sin(t);
%画圆
plot(x1,y1,'--','Color','k')
hold on

line([chosedata(1),myPoint(1)],[chosedata(2),myPoint(2)],'Marker','o','MarkerIndices',[2],'Color','k');
%画移动方向
axis equal
end
axis([-125 125 -125 125]);
title("场景分布图");
text(0,0,'\otimes','FontSize',20,'Color','r');

```

%第一题第一问推导过程 1

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta - \alpha_1)}{x} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{x}$$

$$\frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\pi - ((2\pi - \theta) + (k-1)\alpha + \alpha_2))}{x} = \frac{\sin(\alpha_2 + (k-1)\alpha - \theta)}{x}$$

$$\text{令 } \beta = \alpha_2 + (k-1)\alpha$$

$$\text{则} \begin{cases} \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{x} & 1 \\ \frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\beta - \theta)}{x} & 2 \end{cases}$$

1、2 交叉相乘得:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) \sin(\beta - \theta) &= \sin(\alpha_2) \sin(\theta + \alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) [\sin\beta \cos\theta - \cos\beta \sin\theta] &= \sin(\alpha_2) [\sin\theta \cos\alpha_2 + \cos\theta \sin\alpha_1] \\ [\sin(\alpha_1) \sin(\beta) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)] \cos\theta &= [\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) \cos(\beta)] \sin\theta \end{aligned}$$

$$\text{则 } \tan\theta = \frac{\sin(\alpha_1) \sin(\beta) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) \cos(\beta)}$$

又  $\because \beta = \alpha_2 + (k-1)\alpha$

$$\text{则} \begin{cases} \theta = \arctan \left( \frac{\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2 + (k-1)\alpha) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2 + (k-1)\alpha)} \right) \\ x = \frac{\sin(\theta + \alpha_1) * R}{\sin(\alpha_1)} \end{cases}$$



%第一题第一问推导过程 2

$$\frac{\sin \alpha_1}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta - \alpha_1)}{X} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X}$$

$$\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{\sin(\pi - (\theta - (k-1)\alpha + \alpha_2))}{X} = \frac{\sin(\theta - (k-1)\alpha + \alpha_2)}{X}$$

令  $\beta = \alpha_2 - (k-1)\alpha$

$$\text{既有: } \frac{\sin(\alpha_1)}{R} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{X} \quad 1$$

$$\frac{\sin(\alpha_2)}{R} = \frac{\sin(\theta + \beta)}{X} \quad 2$$

$$\text{得: } \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\theta + \beta)}$$

$$\sin(\alpha_1) \sin(\theta + \beta) = \sin(\alpha_2) \sin(\theta + \alpha_1)$$

和差公式展开

$$\sin(\alpha_1) (\sin\theta \cos\beta + \sin\beta \cos\theta) = \sin(\alpha_2) (\sin\theta \cos(\alpha_1) + \cos\theta \sin\alpha_1)$$

$$\begin{aligned} & \sin\alpha_1 \cos\beta * \sin\theta + \sin\alpha_1 \cos\beta * \cos\theta \\ & = \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 * \sin\theta + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 * \cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{既; } (\sin\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1) * \sin\theta = (\sin\alpha_2 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_1 \sin\beta) * \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_1 \sin\beta}{\sin\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta - \sin\alpha_2 \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos\beta}$$

又因为:

$$\beta = \alpha_2 - (k-1) * \alpha$$

所以:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1) * \sin(\alpha_2) - \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2 - (k-1) * \alpha)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2 - (k-1) * \alpha) - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1)}\right)$$

$$X = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} * R$$

得:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) - \sin\alpha_1 \sin(\alpha_2 - (k-1) * \alpha)}{\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_2 - (k-1) * \alpha) - \sin(\alpha_2) * \cos(\alpha_1)}\right)$$

$$X = \frac{\sin(\theta + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1)} * R$$