第五章 测量误差的基本知识

测量实践中可以发现，测量结果不可避免的存在误差，比如：

1、对同一量多次观测，其观测值不相同。

2、观测值之和不等于理论值：

三角形 $\alpha+\beta+\gamma\neq 180^{\circ}$

闭合水准 $\sum h\neq 0$

一、测量误差的来源

1. 仪器误差
2. 观测误差
3. 外界条件的影响

观测条件

等精度观测：观测条件相同的各次观测。

不等精度观测：观测条件不相同的各次观测。

粗差：因读错、记错、测错造成的错误。

二、 测量误差的分类

1、系统误差 — 误差的大小、符号相同或按一定的规律变化。

在相同的观测条件下，无论在个体和群体上，呈现出以下特性：

- 误差的绝对值为一常量，或按一定的规律变化；
- 误差的正负号保持不变，或按一定的规律变化；
- 误差的绝对值随着单一观测值的倍数而积累。

例：钢尺——尺长、温度、倾斜改正

水准仪——i角

经纬仪——c角、i角

注意：系统误差具有累积性，对测量成果影响较大。

消除和削弱的方法：

（1）校正仪器；

（2）观测值加改正数；

（3）采用一定的观测方法加以抵消或削弱。

2、偶然误差

在相同的观测条件下，对某个固定量作一系列的观测，如果观测结果的差异在正负号及数值上，都没有表现出一致的倾向，即没有任何规律性，这类误差称为偶然误差。

偶然误差的特性

真误差 $\Delta = l - x = l - 180^\circ$

观测值与理论值之差

误差所在区间	正误差个数	负误差个数	总 数
0.0″—0.5″	19	20	39
0.5″—1.0″	13	12	25
1.0″—1.5″	8	9	17
1.5″—2.0″	5	4	9
2.0″—2.5″	2	2	4
2.5″—3.0″	1	1	2
3.0″以上	0	0	0
	48	48	96

①在一定的条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限度;（有界性）

②绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会要多；（密集性、区间性）

③绝对值相等的正、负误差出现的机会相等，可相互抵消；

④同一量的等精度观测，其偶然误差的算术平均值，随着观测次数的增加而趋近于零，

即：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

（抵偿性）

误差处理的原则：

1、粗差：舍弃含有粗差的观测值，并重新进行观测。

2、系统误差：按其产生的原因和规律加以改正、抵消和削弱。

3、偶然误差：根据误差特性合理的处理观测数据减少其影响。

返回

精度： 又称精密度，指在对某量进行多次观测中，各观测值之间的离散程度。

评定精度的标准

- 中误差
- 容许误差
- 相对误差

一、 中误差

定义 在相同条件下，对某量（真值为X）进行n次独立观测，观测值l_1，l_2，……，l_n，偶然误差（真误差）Δ_1，Δ_2，……，Δ_n，则中误差m的定义为：

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

式中 $[\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2, \Delta_i = l_i - x$

例：试根据下表数据，分别计算各组观测值的中误差。

第一组					第二组				
次数	观 °	测 ′	值 ″	真误差 Δ ″	次数	观 °	测 ′	值 ″	真误差 Δ ″
1	180	00	00	0	1	180	00	01	−1
2	179	59	58	+2	2	179	59	58	+2
3	179	59	59	+1	3	180	00	06	−6
4	180	00	03	−3	4	180	00	00	0
5	179	59	56	+4	5	180	00	01	−1
6	179	59	57	+3	6	179	59	53	+7
7	180	00	02	−2	7	179	59	59	+1
8	180	00	01	−1	8	180	00	00	0
9	179	59	58	+2	9	180	00	03	−3
10	180	00	04	−4	10	180	00	01	−1

解：第一组观测值的中误差：

$$m_1=\pm\sqrt{\frac{0^2+2^2+1^2+(-3)^2+4^2+3^2+(-2)^2+(-1)^2+2^2+(-4)^2}{10}}=\pm2.5''$$

第二组观测值的中误差：

$$m_2=\pm\sqrt{\frac{(-1)^2+2^2+(-6)^2+0^2+(-1)^2+7^2+1^2+0^2+(-3)^2+(-1)^2}{10}}=\pm3.2''$$

$m_1<m_2$，说明第一组的精度高于第二组的精度。

说明：中误差越小，观测精度越高

二、容许误差（极限误差）

定义 由偶然误差的特性可知，在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值。这个限值就是容许（极限）误差。

测量中通常取2倍或3倍中误差作为偶然误差的容许误差；

即 $\Delta_{容}=2m$ 或 $\Delta_{容}=3m$。

极限误差的作用：

区别误差和错误的界限。

- 偶然误差的绝对值大于中误差9″的有14个，占总数的35%，绝对值大于两倍中误差18″的只有一个，占总数的2.5%，而绝对值大于三倍中误差的没有出现。

三角形号数	真误差 Δ ″	三角形号数	真误差 Δ ″	三角形号数	真误差 Δ ″	三角形号数	真误差 Δ ″
1	+1.5	11	−13.0	21	−1.5	31	−5.8
2	−0.2	12	−5.6	22	−5.0	32	+9.5
3	−11.5	13	+5.0	23	+0.2	33	−15.5
4	−6.6	14	−5.0	24	−2.5	34	+11.2
5	+11.8	15	+8.2	25	−7.2	35	−6.6
6	+6.7	16	−12.9	26	−12.8	36	+2.5
7	−2.8	17	+1.5	27	+14.5	37	+6.5
8	−1.7	18	−9.1	28	−0.5	38	−2.2
9	−5.2	19	+7.1	29	−24.2	39	+16.5
10	−8.3	20	−12.7	30	+9.8	40	+1.7

- 中误差、真误差和容许误差均是绝对误差。

三、 相对误差

相对误差K是中误差的绝对值m与相应观测值D之比，通常以分母为1的分式来表示，称其为相对（中）误差。即:

$$K=\frac{|m|}{D}=\frac{1}{\frac{D}{|m|}}$$

一般情况:角度、高差的误差用m表示，量距误差用K表示。

[例] 已知： $D_1=100m$， $m_1=\pm 0.01m$，$D_2=200m$，$m_2=\pm 0.01m$，求：K_1, K_2

解：

$$K_1 = {m_1}/{D_1} = {0.01}/{100} = {1}/{10000}$$

$$K_2 = {m_2}/{D_2} = {0.01}/{200} = {1}/{20000}$$

返回

概念

误差传播定律：阐述观测值的中误差与观测值函数中误差的关系的定律。

函数形式

倍数函数

和差函数

线性函数

一般函数

一、一般函数

设非线性函数的一般式为：

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

式中：x_i 为独立观测值；$m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$

为独立观测值的中误差。

求函数的全微分，并用“Δ”替代“d”，得

$$\Delta_Z = (\frac{\partial f}{\partial x_1})\Delta_{x_1} + (\frac{\partial f}{\partial x_2})\Delta_{x_2} + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})\Delta_{x_n}$$

式中：$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是函数F对 x_i 的偏导数，当函数式与观测值确定后，它们均为常数，因此上式是线性函数，其中误差为：

$$m_Z^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_1^2 + \cdots$$

误差传播定律的一般形式

$$m_Z = \pm\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_1^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_2^2 + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_n^2}$$

[例]已知：测量斜边D′=50.00±0.05m，测得倾角α=15°00′00″±30″ 求：水平距离D

解：1.函数式 $D = D'\cos\alpha$

2.全微分 $dD = (\cos\alpha)dD' + (D' \cdot \sin\alpha)\dfrac{d\alpha}{\rho}$

3.求中误差

$$m_D^2 = [(\cos\alpha\ ) \cdot m'_{D'}]^2 + [(D' \cdot \sin\alpha)\frac{m_\alpha}{\rho}]^2$$
$$= [(\cos 15^\circ) \cdot 0.05]^2 + [(50 \cdot \sin 15^\circ)\frac{30''}{\rho}]^2$$

$$\therefore m_D = \pm 0.048(m)$$

二、 线性函数的误差传播定律

设线性函数为：

$$z = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n$$

式中 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 为独立的直接观测值，

$k_1, k_2, \cdots k_n$ 为常数，$x_1, x_2, \cdots x_n$ 相应的

观测值的中误差为 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 。

$$m_z = \pm\sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \cdots + k_n^2 m_n^2}$$

三、 运用误差传播定律的步骤

- 求观测值函数中误差的步骤：

1.列出观测值函数的表达式：

$$Z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

2.对函数式全微分，得出函数的真误差与观测值真误差之间的关系式：

$$d_Z = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)d_{x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)d_{x_2} + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)d_{x_n}$$

式中，$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ 是用观测值代入求得的值。

3、根据误差传播率计算观测值函数中误差：

$$m_Z^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_1^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_2^2 + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_n^2$$

注意：在误差传播定律的推导过程中，要求观测值必须是独立观测值。

误差传播定的几个主要公式：

函数名称	函数式	函数的中误差
倍数函数	$z = kx$	$m_z = \pm k m_x$
和差函数	$z = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$	$m_z = \pm\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2}$
线性函数	$z = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n$	$m_z = \pm\sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \cdots + k_n^2 m_n^2}$
一般函数	$Z = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$	$m_z = \pm\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_1^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_2^2 + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_n^2}$

返回

一、 求最或是值

设在相同的观测条件下对未知量观测了n次，观测值为l_1、l_2……l_n，中误差为m_1、m_2 …m_n，则其算术平均值（最或然值、似真值）L为：

$$\mathrm{L}=\frac{l_1+l_2+\cdots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}$$

推导过程：

设未知量的真值为X，可写出观测值的真误差公式为

$$\Delta_i = l_i - x \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

将上式相加得

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = (l_1 + l_2 + \cdots + l_n) - nx$$

或

$$[\Delta] = [l] - nx$$

故

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - x$$

由偶然误差第四特性知道，当观测次数无限增多时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

即 $n\to\infty, x=\frac{[l]}{n}=L$（算术平均值）

说明，n趋近无穷大时，算术平均值即为真值。

二、 算术平均值中误差m_L

因为

$$L=\frac{[l]}{n}=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots+\frac{1}{n}l_n$$

式中，1／n为常数。由于各独立观测值的精度相同，设其中误差均为m。

设平均值的中误差为m_L，则有

$$m_L^2=\frac{1}{n^2}m_1{}^2+\frac{1}{n^2}m_2{}^2+\cdots+\frac{1}{n^2}m_n{}^2=\frac{1}{n}m^2$$

故

$$m_L = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

由此可知，算术平均值的中误差为观测值的中误差的$\frac{1}{\sqrt{n}}$倍。

三、精度评定

第一公式

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

条件：观测值真值

X已知

第二公式

（白塞尔公式）

$$m=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$$

条件：观测值真值

X 未知，

算术平均值L已知

其中 V_i—观测值改正数，

$$V_i=L-l_i$$

证明：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}}$$

解：

$$\Delta_i = l_i - x$$ （i=1，2，3，…，n）

$$V_i = L - l_i$$ （i=1，2，3，…，n）

两式相加，有 $V_i + \Delta_i = L - x$

设 $L - x = \delta$ 则

$$\Delta_i = -v_i + \delta$$

将上列等式两端各自平方，并求其和，则

$$[\Delta\Delta]=[VV]-2\delta[V]+n\delta^2$$

将 $[v]=n\cdot L-[l]=0$ 代入上式，则 $[\Delta\Delta]=[vv]+n\delta^2$

又因 $\delta=L-x=\frac{[l]}{n}-x=\frac{[l-x]}{n}=\frac{[\Delta]}{n}$

故 $$\delta^2=\frac{[\Delta]^2}{n^2}=\frac{1}{n^2}[(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2)+2\Delta_1\Delta_2+2\Delta_2\Delta_3+2\Delta_3\Delta_4+\cdots]$$

$$=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2}+\frac{2\sum\Delta_P\Delta_Q}{n^2}\qquad (P\neq Q)$$

由于 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n$ 为偶然误差，它们的非自乘积

$\Delta_P\Delta_Q$仍具有偶然误差的性质，根据偶然误差的特性，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\Delta_P\Delta_Q}{n}=0$$

$$[\Delta\Delta]=[VV]+\frac{[\Delta\Delta]}{n}$$

$$\boxed{\frac{[\Delta\Delta]}{n}(n-1)}=[VV]$$

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n}=\frac{[VV]}{n-1}=m^2$$

例题：设用经纬仪测量某个角6测回，观测之列于表中。试求观测值的中误差及算术平均值中误差。

观测次序	观　测　值	V	VV	计　　　算
1	36°50′30″	−4″	16	
2	26	0	0	
3	28	−2	4	$m=\pm\sqrt{\dfrac{[VV]}{n-1}}$
4	24	+2	4	$=\pm 2.6''$
5	25	+1	1	
6	23	+3	9	
	$L=36°50'26''$	$[V]=0$	$[VV]=34$	

算术平均值L中误差是：

$$m_L=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\sqrt{\frac{[VV]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{34}{6(6-1)}}=\pm 1.1''$$

返回