第五章 曲线拟合和函数逼近

最小二乘原理和多项式拟合

- 最小二乘原理
- 多项式拟合

一般的最小二乘拟合

正交多项式曲线拟合

函数逼近

最小二乘原理

例：已知一组实验数据

x_i	-1	0	1	2
y_i	-0.9	1	3	5.1

如何建立 x 与 y 之间的关系？

观察得知两个变量之间大约成线性关系，我们就用直线方程来描述，设 $P_1(x)=ax+b$，如何来确定系数 a,b？

若将系数直接代入方程 $P_1(x)=ax+b$，则有 $\begin{cases}-a+b=-0.9\\0\times a+b=1\\a+b=3\\2a+b=5.1\end{cases}$

这是一个矛盾方程组，$P_1(x)=ax+b$ 一般不会通过所有点，那么就会有误差 $r_i=P_1(x_i)-y_i$，那么将误差 r_i 的大小作为衡量系数 a,b 好坏的标志。

常用的有最小二乘原理，即使得误差的平方和 $\sum r_i^2$ 最小，也就是使得 $\|r\|_2$ 最小。

在本例中记 $Q(a,b)=\sum_{i=0}^{3}r_i^2=\sum_{i=0}^{3}(ax_i+b-y_i)^2$，要求 a,b 使 $Q(a,b)$ 最小。根据求极值的思想，则需满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial a}=12a+4b-28.2=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial b}=4a+8b-16.4=0\end{cases}$$

求解线性方程组有 $a=2,b=1.05$。

3

最小二乘原理

曲线拟合问题： 对给定的数据 (x_i,y_i) $(i=0,1,\cdots,m)$，在取定的函数类 Φ 中，求函数 $P(x)\in\Phi$，使偏差 $r_i=P(x_i)-y_i$，$(i=0,1,\cdots,m)$ 的平方和最小，即

$$\boxed{\sum_{i=0}^{m}r_i^2=\sum_{i=0}^{m}(P(x_i)-y_i)^2=\min}$$

这就是最小二乘曲线拟合问题。这样的 $P(x)$ 称为最小二乘拟合函数或者最小二乘解，求最小二乘拟合函数 $P(x)$ 的方法叫做曲线拟合的最小二乘法。

多项式拟合

给定实验数据

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_m
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_m

求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n(n\le m)$，使得

$$Q=\sum_{i=0}^{m}(P_n(x_i)-y_i)^2=\min$$

将拟合函数取为多项式的曲线拟合问题称为**多项式拟合问题**。拟合曲线 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 也称**最小二乘拟合多项式**。

问题：如何求解系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$？

$Q(a_0,a_1,\cdots,a_n)=\sum_{i=0}^{m}(a_0+a_1x_i+\cdots a_nx_i^n-y_i)^2$，要使 Q 最小，只需 $\dfrac{\partial Q}{\partial a_j}=0$，$j=0,\cdots,n$，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a_0}=2\sum_{i=0}^{m}(a_0+a_1x_i+\cdots+a_nx_i^n-y_i)=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial a_1}=2\sum_{i=0}^{m}(a_0+a_1x_i+\cdots+a_nx_i^n-y_i)x_i=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial a_n}=2\sum_{i=0}^{m}(a_0+a_1x_i+\cdots+a_nx_i^n-y_i)x_i^n=0\end{cases}$$

6

可以化为如下的法方程组或正则方程组：

$$\begin{pmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & \sum x_i^{n+2} & \cdots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^n y_i \end{pmatrix}。$$

思考：若记矛盾线性方程组对应的系数矩阵为 A，

法方程组对应的系数矩阵为 B，

那么，A,B 有什么关系？

7

例：给定以下的数据，用最小二乘法求一次拟合多项式。

x_i	-1	0	1	2
y_i	-0.9	1	3	5.1

解：设一次拟合多项式为 $y = a_0 + a_1 x$，

由于 $\sum_{i=0}^{3} 1 = 4, \sum_{i=0}^{3} x_i = 2, \sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 6, \sum_{i=0}^{3} y_i = 8.2, \sum_{i=0}^{3} x_i y_i = 14.1,$

对应的法方程组为 $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.2 \\ 14.1 \end{pmatrix}$

得到 $a_0 = 1.05, a_1 = 2$，

则对应的一次拟合多项式为 $y = 1.05 + 2x$。

解二：设一次拟合多项式为 $y = a_0 + a_1 x$，

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -0.9 \\ 1 \\ 3 \\ 5.1 \end{pmatrix}$$

对应的法方程组为 $G^T G a = G^T y$，即为：

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.2 \\ 14.1 \end{pmatrix}$$

得到 $a_0 = 1.05, b = 2$，

拟合多项式为： $y = 1.05 + 2x$。

线性最小二乘拟合的一般形式

把多项式拟合问题做**两个方面的推广**：

1. 函数系由多项式空间 $\{x^i\} \to \{\varphi_i(x)\}$ 线性无关
2. 加权系数 $\omega_i (i = 0,1,\cdots,m)$

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为 $n+1$ 线性无关的函数，而

$$\Phi = span\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\} (n < m)。$$

对给定的一组数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{m}$，在 Φ 中求函数 $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$，使得平方和

$$Q = \sum_{i=0}^{m} \omega_i (P(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) - y_i \right]^2 = \min。$$

10

问题如何求解系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$？

要使 Q 最小，只需 $\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 0$，即 $\frac{\partial Q}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{m} \omega_i \left\{ \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) - y_i \right] \varphi_j(x_i) \right\} = 0$

即 $$\sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{m} \omega_i \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) \right] a_k = \sum_{i=0}^{m} \omega_i \varphi_j(x_i) y_i \quad j = 0,1,\cdots,n$$

对应的法方程可以写为

$$\begin{pmatrix} \sum \omega_i \varphi_0^2(x_i) & \sum \omega_i \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) & \cdots & \sum \omega_i \varphi_n(x_i)\varphi_0(x_i) \\ \sum \omega_i \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) & \sum \omega_i \varphi_1^2(x_i) & \cdots & \sum \omega_i \varphi_n(x_i)\varphi_1(x_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \omega_i \varphi_0(x_i)\varphi_n(x_i) & \sum \omega_i \varphi_1(x_i)\varphi_n(x_i) & \cdots & \sum \omega_i \varphi_n^2(x_i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \omega_i \varphi_0(x_i) y_i \\ \sum \omega_i \varphi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum \omega_i \varphi_n(x_i) y_i \end{pmatrix}$$

11

注：多项式拟合实际上是选取 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 为 $1, x, \cdots, x^n$。

非线性最小二乘拟合

可化为线性拟合问题的常见函数类型

$y = ae^{b/x} (a > 0)$	设$\bar{y} = \ln y, \bar{x} = \frac{1}{x}$	$\bar{y} = \bar{a} + b\bar{x} (\bar{a} = \ln a)$
$y = 1/(a + be^{-x}) (a > 0)$	设$\bar{x} = e^{-x}, \bar{y} = 1/y$	$\bar{y} = a + b\bar{x}$
$y = 1/(ax + b)$	设$\bar{y} = 1/y$	$\bar{y} = ax + b$
$y = x/(ax + b)$	设$\bar{y} = 1/y, \bar{x} = 1/x$	$\bar{y} = a + b\bar{x}$
$y^2 = ax^2 + bx + c$	设$\bar{y} = y^2$	$\bar{y} = ax^2 + bx + c$
$y = x/(ax^2 + bx + c)$	设$\bar{y} = \frac{x}{y}$	$\bar{y} = ax^2 + bx + c$
$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$	设$\bar{x} = 1/x$	$y = a + b\bar{x} + c\bar{x}^2$

12

例. 给定数据如下表，用最小二乘法求形如 $y=ae^{bx}$ 的经验公式。

x	2.2	2.7	3.5	4.1	4.8
y	65	60	53	50	46

解：$y=ae^{bx}\Rightarrow \ln y=\ln a+bx$，记 $\bar{a}=\ln a$，$\bar{y}=\bar{a}+bx$，

x	2.2	2.7	3.5	4.1	4.8
y	65	60	53	50	46
$\ln y$	4.1744	4.0943	3.9703	3.9120	3.8286

法方程组为 $\begin{pmatrix}5 & 17.3\\ 17.3 & 64.223\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19.9797\\ 68.5512\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\bar{a}\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4.4538\\ -0.1323\end{pmatrix}$

故 $a=e^{\bar{a}}=85.9527,\quad b=-0.1323$.

正交多项式曲线拟合

定义：设有 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$，若其在点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 上满足

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^m\omega_i\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \|\varphi_j\|_2^2, & j=k\end{cases},$$

则称 $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$ 为点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 上带权 ω_i 的**离散正交函数系**。

注：若 $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}=\{P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)\}$，$P_k(x)$ 为 k 次多项式，

则称 $\{P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)\}$ 为点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 上带权 ω_i 的**离散正交多项式系**。

在离散正交函数系条件下，法方程组对应的系数矩阵就化为对角阵，方程组求解非常容易。因此，问题化为如何构造正交函数系，而正交多项式系是最简单的正交函数系。

正交多项式的构造

假设已知节点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$，及权重 ω_i，可用递推公式给出带权 ω_i 的正交多项式序列 $\{P_i(x)\}_{i=0}^n$：

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\ P_1(x)=(x-\alpha_1)P_0(x)\\ P_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})P_k(x)-\beta_kP_{k-1}(x)\quad k=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

由 $(P_{k+1},P_k)=0\Rightarrow\alpha_{k+1}=\dfrac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}=\dfrac{\sum_{i=0}^m\omega_ix_iP_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m\omega_iP_k^2(x_i)}$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$

由 $(P_{k+1},P_{k-1})=0\Rightarrow\beta_k=\dfrac{(xP_k,P_{k-1})}{(P_{k-1},P_{k-1})}=\dfrac{(P_k,P_k)}{(P_{k-1},P_{k-1})}=\dfrac{\sum_{i=0}^m\omega_iP_k^2(x_i)}{\sum_{i=0}^m\omega_iP_{k-1}^2(x_i)}$，$k=1,2,\cdots,n-1$

例. 试构造点集 $\{-1,-0.75,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,0.75,1\}$ 上的离散正交多项式系 $\{P_0(x),P_1(x),P_2(x)\}$.

利用所求的离散正交多项式系,对下表中的数据求二次拟合多项式。

x	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
y	-0.2209	0.3295	0.8826	1.4392	2.0003	2.5645	3.1334	3.7061	4.2836

解：$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x-\alpha_1$，其中 $\alpha_1=\dfrac{\sum x_iP_0^2(x_i)}{\sum P_0^2(x_i)}=\dfrac{\sum x_i}{\sum 1}=0$，故 $P_1(x)=x$

$P_2(x)=(x-\alpha_2)P_1(x)-\beta_1$，其中 $\alpha_2=\dfrac{\sum x_iP_1^2(x_i)}{\sum P_1^2(x_i)}=\dfrac{\sum x_i^3}{\sum x_i^2}=0$

$$\beta_1=\frac{\sum P_1^2(x_i)}{\sum P_0^2(x_i)}=\frac{\sum x_i^2}{\sum 1}=\frac{5}{12}$$

故 $P_2(x)=x^2-\dfrac{5}{12}$

解：(2)由于

$$a_0=\frac{(y,P_0)}{(P_0,P_0)}=2.0131$$

$$a_1=\frac{(y,P_1)}{(P_1,P_1)}=2.2516$$

$$a_2=\frac{(y,P_2)}{(P_2,P_2)}=0.0313$$

二次拟合多项式为:

$$a_0P_0(x)+a_1P_1(x)+a_2P_2(x)=2.0131+2.2516x+0.0313(x^2-5/12)$$

函数逼近

在已知一个函数 $y=f(x)$ 情况下，寻求一个简单、易于计算的函数来代替 $f(x)$，以便用此简单函数来代替求 $f(x)$ 的值。如何度量两个函数的近似程度，我们首先需要给出以下定义：

定义：设 $f(x)\in C[a,b]$，其范数为

$$\|f\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$

$$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\ 。$$

注：2 范数可以推广到带权 2 范数：$\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b\rho(x)f^2(x)dx}$，这里 $\rho(x)$ 称为权函数。

函数逼近目的

函数逼近目的：

对于给定的函数 $y=f(x)$，希望在 $span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 中找一个

函数 $P(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n$，使得

1. $\|P(x)-f(x)\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|P(x)-f(x)|=\min$，

$P(x)$ 称为 $f(x)$ 的最佳一致逼近；

2. $\|P(x)-f(x)\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)(P(x)-f(x))^2dx}=\min$，

$P(x)$ 称为 $f(x)$ 的最佳平方逼近。

最佳平方逼近

定义：设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，$\rho(x)$ 是权函数，

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

称为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的内积。

最佳平方逼近：

在 $span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 中找一个函数 $P(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n$，

使得

$$\|P(x)-f(x)\|_2=\sqrt{\int_a^b \rho(x)(P(x)-f(x))^2dx}=\min$$

$$\Leftrightarrow Q(a_0,a_1,\cdots,a_n):=\int_a^b \rho(x)(P(x)-f(x))^2dx=\min$$

这是求误差的极小值问题，

$$\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial a_j}=2\int_a^b \rho(x)(\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k-f(x))\varphi_j dx=0,\quad \forall j=0,1,\cdots,n。$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k\int_a^b \rho(x)\varphi_k\varphi_j dx=\int_a^b \rho(x)f(x)\varphi_j dx,\quad \forall j=0,1,\cdots,n。$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (\varphi_k,\varphi_j)a_k=(f,\varphi_j),\quad \forall j=0,1,\cdots,n。$$

对应线性方程组为

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\\ \vdots\\(f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

例. 设 $f(x)=|x|\in C[-1,1]$，试求 $f(x)$ 在 $\Phi=span\{1,x^2,x^4\}$ 上的最佳平方逼近函数。

解：法方程组为 $\begin{pmatrix}(\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & (\phi_0,\phi_2)\\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_2)\\ (\phi_2,\phi_0) & (\phi_2,\phi_1) & (\phi_2,\phi_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\phi_0)\\(f,\phi_1)\\(f,\phi_2)\end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix}\int_{-1}^1 1dx & \int_{-1}^1 x^2dx & \int_{-1}^1 x^4dx\\ \int_{-1}^1 x^2dx & \int_{-1}^1 x^4dx & \int_{-1}^1 x^6dx\\ \int_{-1}^1 x^4dx & \int_{-1}^1 x^6dx & \int_{-1}^1 x^8dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_{-1}^1|x|dx\\ \int_{-1}^1|x|x^2dx\\ \int_{-1}^1|x|x^4dx\end{pmatrix}$

计算得到 $\begin{pmatrix}2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a_0=0.1171875\\ a_1=1.640625\\ a_2=-0.8203125\end{cases}$

最佳平方逼近函数为

$$P(x)=0.1171875+1.640625x^2-0.8203125x^4$$

例：设 $f(x)\in C[0,1]$，$\rho(x)=1$，如果在 $span\{1,x,\cdots,x^n\}$ 上作逼近，则

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_0^1 x^{k+j}dx=\frac{1}{k+j+1},$$

对应的法方程系数矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & \frac{1}{n+3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1}\end{pmatrix},$$

其为 Hilbert 矩阵，为高度病态的矩阵。因此，若采用正交多项式作基，可克服病态问题求解。

定义：若函数族$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$满足

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_k(x)dx=\begin{cases}0, & j\neq k\\ \|\varphi_j\|_2^2, & j=k\end{cases},$$

则称$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的**正交函数族**。

若$\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$是$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交函数族，法方程化为

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & & & \\ & (\varphi_1,\varphi_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix}$$

此时，$a_j=\dfrac{(f,\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)}$，代入$P(x)$即可得到$f(x)$最佳平方逼近。

正交多项式的构造

定义：若$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}=\{P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)\}$，$P_k(x)$为$k$次多项式，则称$\{P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x)\}$为$[a,b]$上带权$\rho(x)$的**正交多项式系**。

正交多项式构造：

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\ P_1(x)=(x-\alpha_1)P_0(x)\\ P_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})P_k(x)-\beta_k P_{k-1}(x) \quad k=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$$

由$(P_{k+1},P_k)=0\Rightarrow \alpha_{k+1}=\dfrac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$

由$(P_{k+1},P_{k-1})=0\Rightarrow \beta_k=\dfrac{(xP_k,P_{k-1})}{(P_{k-1},P_{k-1})}=\dfrac{(P_k,P_k)}{(P_{k-1},P_{k-1})}$，$k=1,2,\cdots,n-1$。

几类常见的正交多项式系

一、Legendre 勒让德多项式（区间[-1,1]，权重$\rho(x)=1$）

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

递推式：
$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}[(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)]$$

$P_0(x)=1$
$P_1(x)=x$
$P_2(x)=(3x^2-1)/2$
$P_3(x)=(5x^3-3x)/2$
$P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8$
…

注：所有首项系数为 1 的n次多项式中，Legendre 多项式$\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)$对 0 的平方偏差最小。

几类常见的正交多项式系

二、Chebyshev 切比雪夫多项式（区间[-1,1]，权重$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$）

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

递推式：
$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

$T_0(x)=1$
$T_1(x)=x$
$T_2(x)=2x^2-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$
…

注：所有首项系数为 1 的n次多项式中，Chebyshev 多项式$\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$对 0 的一致偏差最小。

特殊的最佳平方逼近问题

例. 求多项式$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式。

解 由题意，假设所求的最佳平方逼近多项式为$p_2^*(x)$，则$f(x)-p_2^*(x)=2\times\frac{2}{5}P_3(x)$

故$p_2^*(x)=f(x)-2\times\frac{2}{5}P_3(x)=x^2+\frac{16}{5}x-1$

例. 求多项式$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在$[0,1]$上的二次最佳平方逼近多项式。

解 令$x=\frac{t+1}{2}$，$t=2x-1$，则$f(x)=\frac{1}{4}t^3+t^2+\frac{9}{4}t+\frac{1}{2}=g(t)$

问题等价于求$g(t)$在$[-1,1]$上的二次最佳平方逼近多项式,

$$g(t)-p_2^*(t)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}P_3(t)$$

$p_2^*(t)=g(t)-\frac{1}{10}P_3(t)=t^2+\frac{12}{5}t+\frac{1}{2}$

则$p_2^*(x)=(2x-1)^2+\frac{12}{5}(2x-1)+\frac{1}{2}=4x^2+\frac{4}{5}x-\frac{9}{10}$

特殊的最佳一致逼近问题

对于给定的函数$y=f(x)$，希望在$span\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$中找一个函数$P(x)=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1+\cdots+a_n\varphi_n$，使得$\|f(x)-P(x)\|_\infty=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|=\min$。

一般情况下一致逼近函数不好找到，这里我们将利用 Chebyshev 多项式性质求一些特殊的最佳一致逼近多项式问题。

应用1：插值余项极小化

若插值区间为$[-1,1]$，可利用切比雪夫多项式$T_n(x)$，使$n-1$次插值多项式的余项极小化：

$$w_n^*(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

取$T_n(x)$的零点$x_i=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$，$i=1,2,\cdots,n$，（$x_i\in[-1,1]$）作为插值节点，所构造的$n-1$次插值多项式可以作为近似的最佳一致逼近多项式。

若插值区间不为$[-1,1]$，插值区间为$[a,b]$，可以先把$[a,b]$做变换到$[-1,1]$，令$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，对$t$来说，变化区间是$[-1,1]$。

$w_n^*(x)=w_n^*(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)=w_n^*(t)$。

31

应用2：多项式降次

对于高次多项式，可以用低一次的最佳一致逼近多项式来代替它。

例：求$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在$[-1,1]$上的二次最佳一致逼近多项式。

解：$p_2^*(x)$应该满足$f(x)-p_2^*(x)=2(\frac{1}{2^{3-1}}T_3(x))=\frac{1}{2}(4x^3-3x)$，

故$p_2^*(x)=f(x)-\frac{1}{2}(4x^3-3x)=x^2+\frac{7}{2}x-1$。

32

应用2：多项式降次

例：求$f(x)=2x^3+x^2+2x-1$在$[0,1]$上的二次最佳一致逼近多项式。

解：$x=\frac{t+1}{2}$，$t=2x-1$，

则$f(x)=\frac{1}{4}t^3+t^2+\frac{9}{4}t+\frac{1}{2}=g(t)$

$g(t)-p_2^*(t)=\frac{1}{4}\frac{1}{2^{3-1}}T_3(t)=\frac{1}{16}(4t^3-3t)$，

故$p_2^*(t)=g(t)-\frac{1}{16}(4t^3-3t)=t^2+\frac{39}{16}t+\frac{1}{2}$，

对应有$p_2^*(x)=(2x-1)^2+\frac{39}{16}(2x-1)+\frac{1}{2}=4x^2+\frac{7}{8}x-\frac{15}{16}$。

33