第四章 插值法

Lagrange 插值

- 插值多项式的存在唯一性
- Lagrange 插值多项式
- 插值多项式误差估计

Newton 插值

- 差商、Newton 插值多项式
- 差分、等距节点插值

Hermite 插值

分段多项式插值

三次样条插值

插值问题的提出

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$ 上的值 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，若存在一简单函数 $P(x)$，使

$$P(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots,n),$$

成立，就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**，包含节点的区间 $[a,b]$ 称为**插值区间**，求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法**.

插值多项式的存在唯一性

已知 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ ($x_i\in[a,b]$) 处的值

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

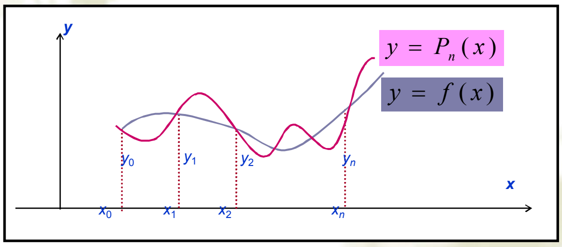
要寻找一个次数 $\le n$ 的多项式 $P_n(x)$，满足：

$$P_n(x_i)=y_i,\quad (0\le i\le n),$$

该问题为插值问题，而 $P_n(x)$ 称为插值多项式。

插值多项式的存在唯一性

从几何上看，n次多项式插值就是过n+1个点$y_i=f(x_i)(i=0,1,\ldots,n)$，作一条多项式曲线$y=P_n(x)$近似曲线$y=f(x)$：



定理：满足 $P_n(x_i)=y_i,\quad (0\le i\le n)$ 的插值多项式是存在唯一的。

1. Lagrange插值多项式

线线插值:给定区间 $[x_0,x_1]$ 及端点函数值 $y_0=f(x_0),y_1=f(x_1)$，要求线性插值多项式 $L_1(x)$，使它满足 $L_1(x_0)=y_0,\quad L_1(x_1)=y_1$.

$$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$ （点斜式），

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$ （两点式）。

抛物插值:给定区间 $[x_0,x_1,x_2]$ 及端点函数值 $y_0=f(x_0),y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$，要求多项式 $L_2(x)$，使它满足 $L_2(x_0)=y_0,\quad L_2(x_1)=y_1,\quad L_2(x_2)=y_2$.

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

定义：若 n 次多项式 $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 在 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 处满足：

$$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\ne i.\end{cases}\quad (i,j=0,1,\cdots,n),$$

则称 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,\cdots,x_n$ 上的 n 次插值基函数。

注：δ_{ij} 为克罗内克（Kronecker）符号。

记 $P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)=L_n(x)$，表示 Lagrange 插值多项式。

其中 $l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

$n=1$	线性插值
$n=2$	抛物插值

例： 已知 $\sqrt{100}=10, \sqrt{121}=11, \sqrt{144}=12$, 用线性插值和抛物插值求 $\sqrt{125}$ 的近似值。

定理（插值余项）： 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 $n+1$ 阶导数，$x_0,\cdots,x_n\in[a,b]$，$x_i\neq x_j(i\neq j)$，$P_n(x_i)=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$，则对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{W_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)，\ \xi\in(a,b),\ \ \xi=\xi(x)；$$

其中 $W_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$。

7

当 $n=1$ 时，线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\quad \xi\in[x_0,x_1]$$

当 $n=2$ 时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\qquad \xi\in[x_0,x_2]$$

利用余项表达式，当 $f(x)=x^k\ (k\le n)$ 时，由于 $f^{(n+1)}(x)=0$，有

$$R_n(x)=x^k-\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=0,$$

由此得 $\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k,\quad k=0,1,\cdots,n.$

特别当 $k=0$ 时，有 $\sum_{i=0}^{n}l_i(x)=1.$

8

例 证明 $\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=0$，其中 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_5$ 的插值基函数.

证明 利用公式 $\sum_{i=0}^{n}x_i^k l_i(x)=x^k$ 可得

$$\sum_{i=0}^{5}(x_i-x)^2 l_i(x)=\sum_{i=0}^{5}(x_i^2-2x_ix+x^2)l_i(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{5}x_i^2 l_i(x)-2x\sum_{i=0}^{5}x_i l_i(x)+x^2\sum_{i=0}^{5}l_i(x)$$

$$=x^2-2x^2+x^2=0.$$

9

2. Newton插值

差商

定义： 对于给定的节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，及节点处函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$，

0 阶差商为 $f[x_i]=f(x_i)$；

1 阶差商为 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$；

（注：若 $f'(x_i)$ 或 $f'(x_j)$ 存在，则 $f[x_i,x_j]$ 是它们的近似）

2 阶差商为 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$；

n 阶差商为 $f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n]=\dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_n]}{x_0-x_n}$.

10

差商表

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

11

Newton插值多项式

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}$$
$$+\underbrace{f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

12

差商的性质

1. k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 是函数值 $f(x_0),\cdots,f(x_k)$ 的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{W'_{k+1}(x_j)},$$

其中 $W_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$，有 $W'_{k+1}(x_j)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}(x_j-x_i)$。

2. 差商的对称性：任意交换两节点的位置不影响差商结果。

3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在 n 阶导数，且节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，则至少

存在一个点 $\xi\in[a,b]$，使 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$。

13

等距节点的Newton插值公式

等距节点插值公式

设函数 $f(x)$ 在等距节点 $x_i=x_0+ih(i=0,1,\cdots,n)$ 处的函数值 $f(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$。

用 Δ 表示向前差分算子：

一阶向前差分：$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)$

二阶向前差分：$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)$

k 阶向前差分：$\Delta^k f(x_i)=\Delta^{k-1}f(x_i+h)-\Delta^{k-1}f(x_i)$

用 ∇ 表示向后差分算子：

一阶向后差分：$\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_i-h)$

14

差分表

$f(x_i)$	一阶差分	二阶差分	三阶差分
$f(x_0)$			
	$\Delta f(x_0)$ $\nabla f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$ $\nabla^2 f(x_2)$	
$f(x_1)$			
	$\Delta f(x_1)$ $\nabla f(x_2)$		$\Delta^3 f(x_0)$ $\nabla^3 f(x_3)$
$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$ $\nabla^2 f(x_3)$	
	$\Delta f(x_2)$ $\nabla f(x_3)$		
$f(x_3)$			

15

差分的性质

1. $\Delta C=0$；（常函数的差分为 0）

2. 差分与差商关系：$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\dfrac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$

3. $\Delta^m f(x_i)=\nabla^m f(x_{i+m})$

16

牛顿向前插值公式

设已知 $f(x_0+ih)(i=0,1,\cdots,n)$，要求 $x=x_0+th(0<t<1)$ 点处 $f(x)$ 的近似值。

由牛顿插值公式，可以得到**牛顿向前插值公式**：

$$\begin{aligned}N_n(x)&=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})\\&=f(x_0)+\frac{t}{1!}\Delta f(x_0)++\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0)\end{aligned}$$ 。

此时

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)\cdots(t-n)h^{n+1}$$ 。

17

牛顿向后插值公式

设已知 $f(x_0+ih)(i=0,1,\cdots,n)$，要求 $x=x_n+th(-1<t<0)$ 点处 $f(x)$ 的近似值。

由牛顿插值公式，可以得到**牛顿向后插值公式**：

$$\begin{aligned}N_n(x)&=f(x_n)+f[x_n,x_{n-1}](x-x_n)+\cdots+f[x_n,\cdots,x_1](x-x_n)\cdots(x-x_1)\\&=f(x_n)+\frac{t}{1!}\nabla f(x_n)++\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f(x_n)\cdots+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)\end{aligned}$$ 。

此时

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n)h^{n+1}.$$

18

3. Hermite插值

问题的提出

已知 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ ($x_i\in[a,b]$)处的值以及导数值

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$
$f'(x)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\cdots$	$f'(x_n)$

要寻找一个次数 $\le 2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$，满足:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$
$$H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

19

例

已知 $y=f(x)$ 在 2 个互异点 x_0,x_1 处的值以及导数值

x	x_0	x_1
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$
$f'(x)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$

要寻找多项式 $H_3(x)$，满足:

$$H_3(x_0)=f(x_0),\quad H_3(x_1)=f(x_1),$$
$$H'_3(x_0)=f'(x_0),\quad H'_3(x_1)=f'(x_1).$$

20

构造方法1

(1) Newton 型 Hermite 插值

可以看做节点为 x_0,x_0,x_1,x_1 的牛顿插值，而 $f[x_0,x_0]=f'(x_0),\quad f[x_1,x_1]=f'(x_1)$.

$$H_3(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^2(x-x_1),$$

其中

$c_0=f(x_0)$,

$c_1=f[x_0,x_0]=f'(x_0)$,

$$c_2=f[x_0,x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_0]-f[x_0,x_1]}{x_0-x_1}=\frac{f'(x_0)-f[x_0,x_1]}{x_0-x_1},$$

$$c_3=f[x_0,x_0,x_1,x_1]=\frac{f[x_0,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_1]}{x_0-x_1}.$$

21

构造方法2

(2) Lagrange 型 Hermite 插值

基本思路：寻求空间 $span\{1,x,x^2,x^3\}$ 的一组基 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\psi_0(x),\psi_1(x)$，满足

$$\varphi_0(x_0)=1,\quad \varphi_0(x_1)=0,\quad \varphi_0'(x_0)=0,\quad \varphi_0'(x_1)=0,$$
$$\varphi_1(x_0)=0,\quad \varphi_1(x_1)=1,\quad \varphi_1'(x_0)=0,\quad \varphi_1'(x_1)=0,$$
$$\psi_0(x_0)=0,\quad \psi_0(x_1)=0,\quad \psi_0'(x_0)=1,\quad \psi_0'(x_1)=0,$$
$$\psi_1(x_0)=0,\quad \psi_1(x_1)=0,\quad \psi_1'(x_0)=0,\quad \psi_1'(x_1)=1.$$

若这样的基存在，则对应的 Hermite 插值多项式可以写成如下形式:

$$H_3(x)=f(x_0)\varphi_0(x)+f(x_1)\varphi_1(x)+f'(x_0)\psi_0(x)+f'(x_1)\psi_1(x).$$

22

其中

$$\varphi_0(x)=\left(1+\frac{2(x_0-x)}{x_0-x_1}\right)\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}.$$

$$\varphi_1(x)=\left(1+\frac{2(x_1-x)}{x_1-x_0}\right)\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}.$$

$$\psi_0(x)=(x-x_0)\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2}.$$

$$\psi_1(x)=(x-x_1)\frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2}.$$

23

对于一般情形：

已知 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ ($x_i\in[a,b]$)处的值以及导数值

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$
$f'(x)$	$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	$\cdots$	$f'(x_n)$

要寻找一个次数 $\le 2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)$，满足:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n$$
$$H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

24

构造方法1

(1) Newton 型 Hermite 插值

$$\begin{aligned}H_{2n+1}(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2\\ &+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)+\cdots\\ &+f[x_0,x_0,x_1,x_1,\cdots,x_i,x_i,\cdots x_n,x_n](x-x_0)^2\cdots(x-x_{n-1})^2(x-x_n).\end{aligned}$$

25

构造方法2

(2) Lagrange 型 Hermite 插值

基本思路：寻求基函数$\varphi_0(x),\cdots\varphi_n(x),\psi_0(x),\cdots,\psi_n(x)$，满足

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases} \qquad \psi_i(x_j)=0,\quad \forall j$$

$$\varphi_i'(x_j)=0,\quad \forall j, \qquad \psi_i'(x_j)=\begin{cases}1, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}$$

若这样的基存在，则对应的 Hermite 插值多项式可以写成如下形式：

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i)\varphi_i(x)+f'(x_i)\psi_i(x)\right)$$

26

其中

$$\varphi_i(x)=(1-2l_i'(x_i)(x-x_i))l_i^2(x),$$

$$\psi_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x).$$

这里

$$l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

误差估计

$$R_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2\cdots(x-x_n)^2$$

27

4. 分片多项式插值

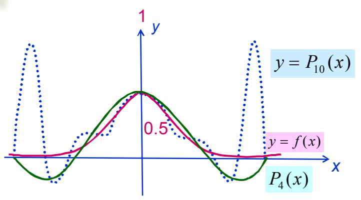
在插值方法中，为了提高插值多项式的逼近程度，常常需要增加节点个数，即提高多项式的次数，当插值节点增多，插值多项式的次数逐步提高时，是否逼近程度也越来越好呢？

一般总认为$P_n(x)$为的次数n越高，逼近$f(x)$的程度就越好。但实际并非如此。

28

插值多项式的Runge现象

例：在区间[-1,1]上，给定函数$f(x)=1/(1+25x^2)$，并将区间[-1,1]做n等分，以$P_n(x)$表示n+1个节点对应的n次插值多项式。



在端点附近$P_{10}(x)$波动很大，可以证明：$P_n(x)$在端点附近与$f(x)$偏离很大，不收敛于$f(x)$。高次多项式插值产生的这种不收敛现象称为龙格（Runge）现象。

29

Runge现象产生的原因

给定n+1个节点$x_0, x_1,\ldots,x_n$，n次插值多项式$P_n(x)$与函数$f(x)$的误差为

$$|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

这里 $M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$.

原因：

当n增大时，误差估计式中的$M_{n+1}(x)$与$|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$可能相应地增大！

解决方法：采用分段低次插值多项式。

30

分段插值多项式

基本想法: 分而治之

对于给定区间 $[a,b]$，我们利用节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 将其分成 n 个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,\cdots,n-1$，$h_i=x_{i+1}-x_i$ 为区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的长度, $h=\max_i\{h_i\}$.

31

分段线性插值

在上述子区间构造分片多项式。我们首先来考虑分片线性插值：

$$P_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},\qquad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=0,1,\cdots,n-1.,$$

插值余项：

$$|f(x)-P_1(x)|\le\frac{h^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|，\text{其中}\ \ h=\max_i\{h_i\}.$$

32

分段抛物插值

在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上加一个中点 $x_{i+\frac{1}{2}}$，相应的节点为

$$x_0,x_{\frac{1}{2}},x_1,x_{\frac{3}{2}},x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n-\frac{1}{2}},x_n,$$

在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上构造分片二次多项式：

$$P_2(x)=y_i\frac{(x-x_{i+\frac{1}{2}})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})(x_i-x_{i+1})}+y_{i+\frac{1}{2}}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})}$$
$$+y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+\frac{1}{2}})},\qquad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

33

分段三次Hermite插值

在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上作 Hermite 插值：

$$H_3(x)=\frac{(x-x_{i+1})^2[h_i+2(x-x_i)]}{h_i^3}y_i+\frac{(x-x_i)^2[h_i-2(x-x_{i+1})]}{h_i^3}y_{i+1}$$
$$+\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{h_i^2}y_i'+\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{h_i^2}y_{i+1}',\qquad x\in[x_i,x_{i+1}].$$

插值余项：

$$|f(x)-H_3(x)|\le\frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|.$$

34

5. 样条插值

样条函数是指具有一定连续性的分片多项式。假设给定 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 满足 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，也就是我们所谓的节点。给定整数 $k\ge 0$，节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的 k 次样条函数 S 满足：

1. 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，S 是次数 $\le k$ 的多项式；
2. 在 $[x_0,x_n]$ 上，S 具有 $(k-1)$ 次连续导数的。

因此，S 是 $k-1$ 连续可导且次数不超过 k 的分片多项式。

35

例

0 次样条函数是分片常数，可以表示成如下形式

$$S(x)=\begin{cases}S_0(x)=c_0, & x\in[x_0,x_1]\\ S_1(x)=c_1, & x\in[x_1,x_2]\\ \vdots & \vdots\\ S_{n-1}(x)=c_{n-1}, & x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

1 次样条函数是连续的分片线性多项式。

问题：

函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\le x<0\\ x^3, & 0\le x<1\\ x^3+(x-1)^2, & 1\le x\le 2\end{cases}$ 与函数 $g(x)=\begin{cases}x^3+2x+1, & -1\le x<0\\ 2x^3+2x+1, & 0\le x\le 1\end{cases}$ 中，哪个为 3 次样条函数？

36

三次样条插值

给定以下条件

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

要构造一个三次样条函数 $S(x)$ 以满足插值条件 $S(x_i)=y_i$。在每个区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，$S(x)$ 都是给定的不同的三次多项式，要求满足：

1. $S(x)$ 是连续的：由插值条件 $S_i(x_i)=y_i$，$S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$；
2. $S'(x)$ 是连续的：每个内部节点处 $S_{i-1}'(x_i)=S_i'(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1$；
3. $S''(x)$ 是连续的：每个内部节点处 $S_{i-1}''(x_i)=S_i''(x_i), i=1,2,\cdots,n-1$；

需要额外的边界条件

1. $S'(x_0)=f'(x_0),\quad S'(x_n)=f'(x_n)$：（固支边界条件）

2. $S''(x_0)=f''(x_0),\quad S''(x_n)=f''(x_n)$：

（简支边界条件，

特别地，$f''(x_0)=f''(x_n)=0$ 为自然边界条件，其对应的样条函数称自然样条函数）

3. $S'(x_0)=S'(x_n),\quad S''(x_0)=S''(x_n)$ （适用于周期函数）。

三转角法：以节点上的一阶导数值来表示 $S(x)$

假设每个节点上 $S'(x_i)=m_i$，则 $S_i(x)$ 满足 $S_i'(x_i)=m_i$ 及 $S_i'(x_{i+1})=m_{i+1}$，因此在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上可利用 Hermite 插值，有

$$S_i(x)=\frac{(x-x_{i+1})^2[h_i+2(x-x_i)]}{h_i^3}y_i+\frac{(x-x_i)^2[h_i-2(x-x_{i+1})]}{h_i^3}y_{i+1}$$
$$+\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{h_i^2}m_i+\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{h_i^2}m_{i+1}$$

问题转化为如何确定 $m_0,m_1,\cdots,m_n$。

为确定 $m_0,m_1,\cdots,m_n$，我们需要利用到二阶导的连续性。

$$S_i(x)''=\frac{6}{h_i^3}(x_{i+1}+x_i-2x)(y_{i+1}-y_i)+\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_i^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_i^2}m_{i+1}$$

故在每个 x_i 处，有 $\quad S_i(x_i)''=\frac{6}{h_i^2}(y_{i+1}-y_i)-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1}$

同理有 $\quad S_{i-1}(x_i)''=\frac{6}{h_{i-1}^2}(y_{i-1}-y_i)+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i$

根据内部节点二阶导的连续性，即 $S_{i-1}(x_i)''=S_i(x_i)''$，有

$$\frac{6}{h_{i-1}^2}(y_{i-1}-y_i)+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i=\frac{6}{h_i^2}(y_{i+1}-y_i)-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

即有

$$\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+4(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i})m_i+\frac{2}{h_i}m_{i+1}=6(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}),\quad i=1,2,\cdots,n-1$$

两边同除以 $2(\frac{1}{h_{i-1}}+\frac{1}{h_i})$，得到

$$\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}m_{i-1}+2m_i+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}m_{i+1}=3(\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}),$$

有 $n-1$ 个方程。

令 $\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},g_i=3(\lambda_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\mu_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i})$

化为 $\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$。

从而得到线性方程组

$$\begin{cases}\lambda_1 m_0+2m_1+\mu_1 m_2=g_1\\ \lambda_2 m_1+2m_2+\mu_2 m_3=g_2\\ \lambda_3 m_2+2m_3+\mu_3 m_4=g_3\\ \cdots\cdots\\ \lambda_{n-1}m_{n-2}+2m_{n-1}+\mu_{n-1}m_n=g_{n-1}\end{cases}$$

由于 m_i 为细梁在 x_i 截面处的转角，上述方程也称为三转角方程，其含有 $n+1$ 个未知数，$n-1$ 个方程，增加边界条件（1），（2）后，可得关于参数 m_i 的三对角方程组，增加边界条件（3），得广义三对角方程组。这些方程组的系数矩阵为严格对角占优阵，故方程组有唯一解，求解出参数 m_i 后，即可得到三次样条插值函数。

三弯矩法：以节点上的二阶导数值来表示 $S(x)$

假设每个节点上 $S''(x_i)=M_i$，则 $S_i(x)$ 满足 $S_i''(x_i)=M_i$ 及 $S_i''(x_{i+1})=M_{i+1}$，

因此在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，有

$$S_i''(x)=M_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+M_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

做两次积分，有

$$S_i(x)=\frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3+\frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3+C(x_{i+1}-x)+D(x-x_i)$$

其中 C 和 D 待定.

根据插值条件 $S_i(x_i)=y_i$，有 $C=\left(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6}\right)/h_i$

根据插值条件 $S_i(x_{i+1})=y_{i+1}$，有 $D=\left(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right)/h_i$

得到

$$S_i(x)=\frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3+\frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3+\left(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+\left(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$

问题转化为如何确定 $M_0,M_1,\cdots,M_n$。

为确定 $M_0,M_1,\cdots,M_n$，我们利用 $S'(x)$ 的连续性。

$$S_i'(x)=-\frac{M_i}{2h_i}(x_{i+1}-x)^2+\frac{M_{i+1}}{2h_i}(x-x_i)^2+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}+\frac{(M_i-M_{i+1})}{6}h_i$$

故在每个 x_i 处，有 $S_i'(x_i)=-\frac{h_i}{3}M_i-\frac{h_i}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}$

同理，有 $S_{i-1}'(x_i)=\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$

根据内部节点一阶导的连续性，即 $S_{i-1}'(x_i)=S_i'(x_i)$，有

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{1}{3}(h_i+h_{i-1})M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}},\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

即对 $i=1,2,\cdots,n-1$，有

$$\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}M_{i+1}=6[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}]/(h_{i-1}+h_i).$$

取 $\lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\mu_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},d_i=\frac{6}{h_{i-1}+h_i}(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}})$，有

$$\lambda_iM_{i-1}+2M_i+\mu_iM_{i+1}=d_i,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

得到线性方程组

$$\begin{cases}\mu_1M_0+2M_1+\lambda_1M_2=d_1\\ \mu_2M_1+2M_2+\lambda_2M_3=d_2\\ \mu_3M_2+2M_3+\lambda_3M_4=d_3\\ \cdots\\ \mu_{n-1}M_{n-2}+2M_{n-1}+\lambda_{n-1}M_n=d_{n-1}\end{cases}$$

加入边界条件，可以求得 M_i，从而有

$$S_i(x)=\frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3+\frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3+\left(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+\left(y_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$