第七章 常微分方程数值解法

欧拉方法

- 欧拉公式
- 向后欧拉公式（隐式欧拉法）
- 梯形公式
- 改进的欧拉公式

Runge-Kutta 法

- 二级 Runge-Kutta 公式
- 三级 Runge-Kutta 公式
- 四级 Runge-Kutta 公式

线性多步法

常微分方程问题

我们重点考虑一阶常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

一般来说，只有当 f 是比较特殊的形式时，我们才可得到其解析解。

例：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = by \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 则 $y(x) = y_0 e^{-bx_0} e^{bx}$.

常微分方程问题

定理. 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times R^1$ 上连续，且关于 y 是 Lipschitz 连续，

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|,$$

那么模型问题在 $[a,b]$ 存在唯一解。

Lipschitz 连续： $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$.

(1) 比连续性强：$y_1 \to y_2$ 可推出 $f(x,y_1) \to f(x,y_2)$；

(2) 比连续的 1 阶导弱：具有连续的 1 阶导，则

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi)\right| |y_1 - y_2| \le L|y_1 - y_2|.$$

常微分方程数值解法

目标： 计算出解析解 $y(x)$ 在一系列节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处的近似值 $y_i \approx y(x_i)$，即所谓的数值解。节点间距 $h_i = x_{i+1} - x_i$，一般取为等距节点。

常微分方程初值问题的数值解法一般分为两大类：

(1)**单步法：** 在计算 y_{n+1} 时，只用到前一步的值，即用到 x_{n+1}, x_n, y_n，则给定初值之后，就可逐步计算。例如 Euler 法、向后欧拉法、梯形公式、龙格-库塔法；

(2)**多步法：** 这类方法在计算 y_{n+1} 时，除了用到 x_{n+1}, x_n, y_n 外，还要用到 $x_{n-l+1}, y_{n-l+1} (l = 1,2,\cdots,k; k>0)$，即前面 k 步的值，如 Adams 方法等。

欧拉公式

欧拉公式：形式为 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$，可以通过以下几种方式来理解：

（1） Taylor 展开

给定 $y_i \approx y(x_i)$，要计算 $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$.

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \cdots$$

丢掉高阶项，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) \approx y(x_i) + hy'(x_i) \approx y_i + hf(x_i, y_i)$$

$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

欧拉公式

（2）差商代替微商（向前差商）

用向前差商 $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$ 近似代替 $y'(x_i)$，并用 y_i 近似代替 $y(x_i)$，

则 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$；

（3）数值积分

两边同时从 $[x_i, x_{i+1}]$ 积分，

有 $y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \approx hf(x_i, y(x_i))$。

（其中用到左矩形数值积分公式）

注：每一种理解方式都对应着不同的推广途径。

例：设步长为h，利用欧拉公式求解

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\\ y(1)=1\end{cases}。$$

例：设步长为$h=0.1$，利用欧拉公式求解

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}\\ y(1)=1\end{cases}。$$

局部截断误差

定义：局部截断误差

在假设$y_i=y(x_i)$，即第i步计算是精确的前提下，考虑的截断误差

$R_i:=y(x_{i+1})-y_{i+1}$称为局部截断误差。

定义：若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则称该算法有p阶精度。

Euler 法局部截断误差：$O(h^2)$（1 阶精度）

整体截断误差

定义：整体截断误差

称$\varepsilon_i:=y(x_i)-y_i$为整体截断误差。

Euler 法整体截断误差：

由 $\varepsilon_i=\varepsilon_{i-1}+h(f(x_{i-1},y(x_{i-1}))-f(x_{i-1},y_{i-1}))+R_{i-1}$，

令$R=\max\limits_i|R_i|$，有

$|\varepsilon_i|\le|\varepsilon_{i-1}|+hL|y(x_{i-1})-y_{i-1}|+R\le e^{L(b-a)}|\varepsilon_0|+\dfrac{R}{Lh}(e^{L(b-a)}-1)$

当$|\varepsilon_0|=0$时，对应的$|\varepsilon_i|=O(h)$。

注：一般情况下，整体截断误差比局部截断误差低一阶。

向后欧拉公式（隐式欧拉公式）

向后欧拉公式：形如$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$，可以理解为：

（1）向后差商代替微商

用向后差商$\dfrac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$近似代替$y'(x_{i+1})$，并用$y_i$近似代替$y(x_i)$，

则 $y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$；

（2）数值积分（右矩形公式）

两边同时从$[x_i,x_{i+1}]$积分，有

$$y(x_{i+1})-y(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))dx\approx hf(x_{i+1},y(x_{i+1}))。$$

局部截断误差：$O(h^2)$（1 阶精度）

梯形公式

梯形公式：形如$y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})]$，可以理解为：

（1）数值积分（梯形公式）

两边同时从$[x_i,x_{i+1}]$积分，有

$$\begin{aligned}y(x_{i+1})-y(x_i)&=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y(x))dx\\&\approx\frac{h}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))]\end{aligned}$$

局部截断误差：$O(h^3)$（2 阶精度）

改进的欧拉格式

梯形公式为隐格式，一般不好求解，实际中常用以下预估校正格式：

$$\begin{cases}\bar{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) & \text{预估}\\ y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},\bar{y}_{i+1})] & \text{校正}\end{cases}$$

该预估校正格式又称为改进的 Euler 法。

局部截断误差：$O(h^3)$（2 阶精度）

Runge-Kutta法

改进的 Euler 法可以写成如下形式：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{cases}$$

将其做一个推广：

二级 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + ah, y_i + bhK_1) \end{cases}$$

m级Runge-Kutta方法

m 级 Runge-Kutta 法形如

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + \cdots + c_mK_m) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) \\ K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2) \\ \cdots \\ K_m = f(x_i + a_mh, y_i + b_{m1}hK_1 + b_{m2}hK_2 + \cdots + b_{m,m-1}hK_{m-1}) \end{cases}$$

目的：利用 Taylor 展开选取适当的 a_i, b_{ij}, c_i，使公式有尽可能高的精度。

二级Runge-Kutta法

为简单起见，考虑以下二级 Runge-Kutta 法

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + ah, y_i + ahK_1) \end{cases}$$

为得到尽可能高的精度，截断误差 $R_i = y(x_{i+1}) - [y(x_i) + h(c_1K_1 + c_1K_2)]$

（K_1, K_2 中的 y_i 为精确值）尽可能小。

二级Runge-Kutta法

一方面，利用 Taylor 展开

$$K_2 = f(x_i + ah, y(x_i) + ahK_1)$$
$$= f(x_i, y(x_i)) + ahf_x(x_i, y(x_i)) + ahf_y(x_i, y(x_i))f(x_i, y(x_i)) + O(h^2)$$

故

$$y(x_i) + h(c_1K_1 + c_1K_2)$$
$$= y(x_i) + h(c_1 + c_2)f(x_i, y(x_i)) + c_2ah^2(f_x + ff_y) + O(h^3),$$

另一方面

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + O(h^3)$$
$$= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + O(h^3)$$

二级Runge-Kutta法

因此，要使得精度尽可能高，要满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

常用的二级二阶 R-K 方法

1. $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a = 1$，对应着改进的 Euler 方法：

格式为：$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{cases}$

二级Runge-Kutta法

2. $c_1 = 0, c_2 = 1, a = \frac{1}{2}$，对应着中点公式：

格式为：$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hK_2 \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1) \end{cases}$

3. $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{3}{4}, a = \frac{2}{3}$，对应着二阶 Heun（休恩）方法：

格式为：$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\frac{1}{4}K_1 + \frac{3}{4}K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hK_1) \end{cases}$

三级Runge-Kutta方法

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) & a_2 = b_{21} \\
K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2) & a_3 = b_{31} + b_{32}
\end{cases}
$$

三级三阶R-K方法

要使局部截断误差达到$O(h^4)$，要满足

$$
\begin{cases}
c_1 + c_2 + c_3 = 1, & c_2a_2 + c_3a_3 = \frac{1}{2} \\
c_2a_2^2 + c_3a_3^2 = \frac{1}{3}, & c_3a_2b_{32} = \frac{1}{6}
\end{cases}
$$

常用三级三阶 R-K 方法：

$$
\begin{cases}
c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4} \\
a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad b_{32} = \frac{2}{3}
\end{cases}
$$
，为三阶 Heun（休恩）方法，

$$
\begin{cases}
c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{1}{6} \\
a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1, \quad b_{32} = 2
\end{cases}
$$
，为三阶 Kutta 方法。

四级Runge-Kutta方法

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) & a_2 = b_{21} \\
K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2) & a_3 = b_{31} + b_{32} \\
K_4 = f(x_i + a_4h, y_i + b_{41}hK_1 + b_{42}hK_2 + b_{43}hK_3) & a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43}
\end{cases}
$$

四级四阶R-K方法

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_1) \\
K_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hK_2) \\
K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)
\end{cases}
$$

m级Runge-Kutta方法

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + \cdots + c_mK_m) \\
K_1 = f(x_i, y_i) \\
K_2 = f(x_i + a_2h, y_i + b_{21}hK_1) & a_2 = b_{21} \\
K_3 = f(x_i + a_3h, y_i + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2) & a_3 = b_{31} + b_{32} \\
\cdots \\
K_m = f(x_i + a_mh, y_i + b_{m1}hK_1 + b_{m2}hK_2 + \cdots + b_{m,m-1}hK_{m-1}) & a_m = b_{m1} + b_{m2} + \cdots + b_{m,m-1}
\end{cases}
$$

一般地，m 级显式 Runge-Kutta 法的最高精度不一定能达到m 阶，有

m 级 R-K 法	1	2	3	4	5	6	7	$m \ge 8$
最高精度	1	2	3	4	4	5	6	$m-2$

收敛性

定义：算法的收敛性

若某算法对于任意固定的$x = x_i = x_0 + ih$，当$h \to 0$时有$y_i \to y(x_i)$，则称该算法是收敛的。

例：就初值问题$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$考察欧拉显式格式的收敛性。

解：精确解为$y(x) = y_0e^{\lambda x}$。

$$y_i = y_{i-1} + h\lambda y_{i-1} = (1+h\lambda)y_{i-1} = \cdots = (1+h\lambda)^i y_0 = y_0((1+h\lambda)^{1/\lambda h})^{x_i\lambda} \to y_0e^{\lambda x_i}$$

即当$h \to 0$时有$y_i \to y(x_i)$，欧拉显式格式对该初值问题是收敛的。

稳定性

定义：算法的稳定性

若误差传播连续依赖于初值，则称算法稳定，即由两初值 $y_0, \tilde{y}_0$ 所生成的序列 $y_i, \tilde{y}_i$，有 $\max_i |y_i - \tilde{y}_i| \le C|y_0 - \tilde{y}_0|$。

例：欧拉法是稳定的。

证明：

$|e_i| = |y_i - \tilde{y}_i| = |[y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})] - [\tilde{y}_{i-1} + hf(x_{i-1}, \tilde{y}_{i-1})]|$

$\le (1+hL)|y_{i-1} - \tilde{y}_{i-1}|$

$= (1+hL)|e_{i-1}| \le \cdots \le (1+Lh)^i |e_0| \le e^{L(b-a)}|e_0|$

绝对稳定性

定义：算法的绝对稳定性

若某算法在计算过程中任一步产生的误差在以后的计算中都逐步衰减，则称该算法是绝对稳定的。

该过程与具体的问分方程中的 f 有关，但考虑一般方程过于困难，为简化，只考虑试验方程 $y' = \lambda y$，其中 $\lambda < 0$ 为常数。当给定步长为 h 时，将该算法应用于试验方程，并假设在初值产生误差 $e_0 = y_0 - \tilde{y}_0$，则若此误差以后逐步衰减，则将该算法相对于 $\bar{h} = \lambda h$ 是绝对稳定的。

例：考察显式欧拉格式，有

$y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1+\bar{h})y_i$，$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\lambda\tilde{y}_i = (1+\bar{h})\tilde{y}_i$，

则 $|e_{i+1}| = |\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}| = |1+\bar{h}||\tilde{y}_i - y_i| = |1+\bar{h}||e_i|$，

要使其逐步衰减，则要求 $|1+\bar{h}| < 1$，对应的绝对稳定域为区间 $(-2, 0)$

线性多步法

所谓线性多步法，是用若干个节点处的 y 及 y' 值的线性组合来近似 $y(x_{i+1})$，线性 k 步法通式可以写为

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \cdots + \alpha_{k-1} y_{i-k+1} \\
&\quad + h(\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \cdots + \beta_{k-1} f_{i-k+1})
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1}, \beta_{-1}, \beta_0, \cdots, \beta_{k-1}$ 为待定系数，$f_j := f(x_j, y_j)$

当 $\beta_{-1} = 0$ 时，为显式公式；当 $\beta_{-1} \ne 0$ 时，为隐式公式。

构造线性多步法一般有两种途径：

- 基于数值积分的构造方式
- 基于 Taylor 展开的方式

基于数值积分的构造法

1. Adams 外插法（显式多步法）

$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$

基本思想：将 $f(x, y(x))$ 在节点 $x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-k+1}$（$k$ 个节点）上做插值，有

$f(x, y(x)) = N_{k-1}(x) + R_{k-1}(x)$，

多步法计算公式：$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{k-1}(x)dx$

误差：$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_{k-1}(x)dx$

例 1：$k=1$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_0(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i dt = hf_i$

计算公式：$y_{i+1} = y_i + hf_i$，为显式欧拉公式；

误差：$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\frac{f'(\xi_i)}{1!}dx = f'(\eta_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)dx = \frac{1}{2}h^2 y''(\eta_i)$。

例 2：$k=2$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(x)dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} f_{i-1})dx = h(\frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1})$

计算公式：$y_{i+1} = y_i + h(\frac{3}{2}f_i - \frac{1}{2}f_{i-1})$；

误差：

$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i-1})\frac{f''(\xi_i)}{2!}dx = \frac{f''(\eta_i)}{2!}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i-1})dx = \frac{5}{12}h^3 y'''(\eta_i)$。

基于数值积分的构造法

2. Adams 内插法（隐式多步法）

$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{dx}dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$

基本思想：将 $f(x, y(x))$ 在节点 $x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, \cdots, x_{i-k+1}$（$k+1$ 个节点）上做插值，有

$f(x, y(x)) = N_k(x) + R_k(x)$，

多步法计算公式：$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_k(x)dx$

误差：$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_k(x)dx$。

例 1：$k=1$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1(x)dx=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f_{i+1}+\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f_i\right)dx=h\left(\frac{1}{2}f_{i+1}+\frac{1}{2}f_i\right)$$

计算公式：$y_{i+1}=y_i+h(\frac{1}{2}f_{i+1}+\frac{1}{2}f_i)$，为梯形公式；

误差：$R_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)(x-x_{i+1})\frac{f''(\xi_i)}{2!}dx=-\frac{1}{12}h^3y'''(\eta_i)$。

基于Taylor展开的构造法

例：设 $y_{i+1}=\alpha_0y_i+\alpha_1y_{i-1}+h(\beta_0f_i+\beta_1f_{i-1})$，确定 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$，使公式具有 2 阶精度。

解：$y(x_{i-1})=y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)$

$y'(x_{i-1})=y'(x_i)-hy''(x_i)+O(h^2)$

而 $y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+O(h^3)$，

故要使公式具有 2 阶精度，要满足 $\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1=1\\-\alpha_1+\beta_0+\beta_1=1\\\frac{1}{2}\alpha_1-\beta_1=\frac{1}{2}\end{cases}$，

取 $\alpha_0=1,\alpha_1=0,\beta_0=\frac{3}{2},\beta_1=-\frac{1}{2}$，即为上面推导的两步 Adams 显式格式。

例：设 $y_{i+1}=\alpha_0y_i+\alpha_1y_{i-1}+h(\beta_{-1}f_{i+1}+\beta_0f_i+\beta_1f_{i-1})$，确定 $\alpha_0,\alpha_1,\beta_{-1},\beta_0,\beta_1$，使公式具有 3 阶精度。

解：$y(x_{i-1})=y(x_i)-hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+O(h^4)$

$y'(x_{i-1})=y'(x_i)-hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)+O(h^3)$

$y'(x_{i+1})=y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)+O(h^3)$

而 $y(x_{i+1})=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+O(h^4)$，

故要使公式具有 3 阶精度，要满足

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1=1\\-\alpha_1+\beta_{-1}+\beta_0+\beta_1=1\\\frac{1}{2}\alpha_1+\beta_{-1}-\beta_1=\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{1}{2}\beta_{-1}+\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{6}\end{cases},$$

取 $\alpha_0=1,\alpha_1=0,\beta_{-1}=\frac{5}{12},\beta_0=\frac{2}{3},\beta_1=-\frac{1}{12}$，即为上面推导的两步 Adams 隐式格式。

思考：取 $\alpha_0=0,\alpha_1=1,\beta_{-1}=\frac{1}{3},\beta_0=\frac{4}{3},\beta_1=\frac{1}{3}$，对应着什么形式？