第二章 非线性方程求解

二分法

迭代法

- 迭代法基本思想
- 迭代法的收敛条件
- 迭代法的收敛速度
- Aitken 外推加速法

牛顿法及其变形

- 牛顿法
- 牛顿法的变形
- 计算重根的牛顿法

引言

很多科学计算问题常归结为求解方程： $f(x)=0$

$$\text{方程}\begin{cases}\text{代数方程：形如}f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\,(a_0\neq 0)\\ \text{超越方程：非代数方程}\end{cases}$$

$$\text{方程}\begin{cases}\text{线性方程：}\ n=1\text{的代数方程}\\ \text{非线性方程：}\ n\neq 1\text{的代数方程、超越方程}\end{cases}$$

问题：如何求解非线性方程？比如

$$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0,$$

或 $$e^{-x}-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0。$$

引言

记 非线性方程为 $f(x)=0$。

定义：如果有一个数 x^*，使得 $f(x^*)=0$，则称 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的根，又称 x^* 为函数 $f(x)$ 的零点。

定义：如果 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中 m 为正整数，$g(x)$ 的分母不含有因子 $(x-x^*)$，且 $g(x^*)\neq 0$，则称 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重零点，x^* 为 $f(x)=0$ 的 m 重根。当 $m=1$ 时，称 x^* 为单根。

方程求根的几个问题

1 根的存在性：方程是否有根？如果有根，有几个根？

2 根的隔离：确定根所在的区间，使方程在这个小区间内有且仅有一个根，这一过程称为根的隔离，完成根的隔离，就可得到方程的各个根的近似值。

3 根的精确化：已知一个根的粗略近似值后，建立计算方法将近似解逐步精确化，直到满足给定精度为止。

几个重要结论

1 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$，根据连续函数的介值定理，那么在区间 (a,b) 必存在零点；若 $f(x)$ 在 (a,b) 严格单调，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内只有一个根。

2 n 次代数方程在复数域上恰有 n 个根（一个 r 重根算 r 个根），实系数代数方程的复根会成对出现。

求隔根区间的一般方法

1.作图法：画出 $y=f(x)$ 的草图，由 $f(x)$ 与 x 轴交点的大概位置来确定有根区间。

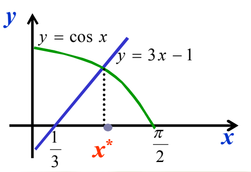
例 1：求 $f(x)=3x-1-\cos x=0$ 的隔根区间。

解：将方程变形为 $3x-1=\cos x$

绘出曲线 $y=3x-1$ 及 $y=\cos x$，

由右图可知，方程只有一个实根：

$x^*\in(\frac{1}{3},\frac{\pi}{2})$



求隔根区间的一般方法

2.利用 $f'(x)$ 的正、负与 $f(x)$ 的单调性的关系来确定根的大概位置。

例 2：求 $f(x)=x^4-4x^3+1=0$ 的隔根区间。

解：令 $f'(x)=4x^3-12x^2=0$，可得驻点 $x_1=0, x_2=3$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	减	+	减	-	增
隔根区间			$(0,3)$		$(3,+\infty)$

因 $f(4)>0$，所以，二个隔根区间确定为 $(0,3),(3,4)$。

求隔根区间的一般方法

3.逐步搜索法：从区间 $[a,b]$ 的左端点 a 出发，按选定的步长 h 一步步向右搜索，若：

$$f(a+jh)\cdot f(a+(j+1)h)<0 \quad j=0,1,2,\dots$$

则区间 $[a+jh, a+(j+1)h]$ 内必有根。搜索过程也可以从 b 开始，这时应取步长 $h<0$。

注：求出根的隔离区间后，就可采用适当的方法，使其进一步精确化。

§1 二分法

根的存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$。

二分法基本思想：用对分区间的方法，通过判别函数 $f(x)$ 在每个对分区间中点的符号，逐步将隔根区间缩小，最终求得一个具有相当精确程度的近似根。

二分法具体步骤：

取 $a_0=a, b_0=b, x_0=\frac{a_0+b_0}{2}$，

- 若 $f(x_0)=0$，则 x_0 为方程的根，跳出循环；
- 若 $f(a_0)f(x_0)<0$，令 $a_1=a_0, b_1=x_0, x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$；
- 若 $f(a_0)f(x_0)>0$，令 $a_1=x_0, b_1=b_0, x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$；
- $[a_1,b_1]$ 为新的隔根区间，重复上述过程。

根据上述过程，我们可以得到一系列隔根区间套：

$$[a,b]=[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots[a_n,b_n]\supset\cdots$$

且有 $\qquad b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$，

若取 $[a_n,b_n]$ 的中点 $x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ 作为 x^* 的近似值，则有以下误差估计式： $\qquad |x_n-x^*|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}$。

注：上式不仅可以用于估计对分区间法的误差，而且可以对给定的误差限 ε 估计出对分区间的次数，我们有

$$|x_n-x^*|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}\le\varepsilon\Rightarrow n\ge\frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}-1$$

例 3：用二分法求例 1 中方程的实根，要求误差不超过 0.005。

解：由例 1 知 $x^*\in(\frac{1}{3},\frac{\pi}{2})$，要想 $|x_n-x^*|\le 0.005$，则要

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)=\frac{1}{2^{n+1}}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3})\le 0.005$$

由此解得 $n\ge 6.95$，因此取 $n=7$。

例 4. 方程 $f(x)=x^2-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 中有一实根，若用二分法求此根，使其误差不超过 10^{-2}，问应将区间对分几次？并请用二分法求此根。

解：假设区间对分 n 次，

$$|x_n-x^*|\le\frac{1}{2^{n+1}}(3-2)=\frac{1}{2^{n+1}}\le10^{-2}$$

$$\Rightarrow 2^{n+1}\ge100\Rightarrow n\ge\frac{2}{\lg2}-1\approx5.6$$

故应将区间对分 6 次。

0.[2 3]	$x_0=2.5$
1.[2 2.5]	$x_1=2.25$
2. [2 2.25]	$x_2=2.125$
3. [2.125 2.25]	$x_3=2.1875$
4. [2.1875 2.25]	$x_4=2.21875$
5. [2.21875 2.25]	$x_5=2.234375$
6.[2.234375 2.25]	

取 $x_6=2.2421875$ 作为根的近似

二分法优缺点

优点：计算简单，方法可靠，容易估计误差。
缺点：收敛较慢，不能求偶重根，也不能求复根。

因此，一般在求方程近似根时，很少单独使用，常用于为其它高速收敛算法（如牛顿法）提供初值。

§2 迭代法

迭代法的基本思想：

对给定方程 $f(x)=0$，将它转换成等价的形式 $x=\varphi(x)$。给定初值 x_0，构造序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=1,2,3,\cdots$，如果迭代收敛

$$\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=x^*,$$

则 x^* 即为方程 $f(x)=0$ 的根。

这种求根方法称为**迭代法**，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 称为**迭代格式**，$\varphi(x)$ 称为**迭代函数**，若迭代序列收敛，则称迭代格式**收敛**，否则称为**发散**。

例 5：方程 $x^2-2x-3=0$ 有以下三个等价形式：

$x=\sqrt{2x+3}$；$x=\dfrac{2x+3}{x}$；$x=\dfrac{1}{2}(x^2-3)$

取初始近似值 $x_0=4$，分别考虑用迭代公式计算：

(1). $x_{k+1}=\sqrt{2x_k+3}$

$x_1=3.316624790355400$；$x_2=3.103747667048789$；

$x_3=3.034385495301739$；$x_4=3.011440019426500$；

$x_5=3.003810919291193$；$x_6=3.001270037597814$；

可以看出：随着 k 的增大，序列收敛于 3。

(2). $x_{k+1}=\dfrac{2x_k+3}{x_k}$

$x_1=2.750000000000000$；$x_2=3.090909090909091$；

$x_3=2.970588235294118$；$x_4=3.009900990099010$；

$x_5=2.996710526315789$；$x_6=3.001097694840834$；

可以看出：随着 k 的增大，序列收敛于 3。

(3). $x_{k+1}=\dfrac{1}{2}(x_k{}^2-3)$

$x_1=6.500000000000000$；$x_2=19.625000000000000$；

$x_3=191.0703125000000$；$x_4=18252.43215942383$；

可以看出：随着 k 的增大，序列不收敛。

例 6：用迭代法求方程 $x^4+2x^2-x-3=0$ 在 $[1,1.2]$ 的实根。

解：利用等价形式

$x=\varphi_1(x)=(3+x-2x^2)^{\frac{1}{4}}$；

$x=\varphi_2(x)=\sqrt{\sqrt{x+4}-1}$；

$x=\varphi_3(x)=x^4+2x^2-3$

取初始近似值 $x_0=1$，分别考虑用迭代公式计算：

(1) $x_{k+1}=\varphi_1(x_k)=(3+x_k-2x_k^{\ 2})^{\frac{1}{4}}$； $x_{26}\approx x_{27}\approx 1.124123$

(2) $x_{k+1}=\varphi_2(x_k)=\sqrt{\sqrt{x_k+4}-1}$； $x_6\approx x_7\approx 1.124123$

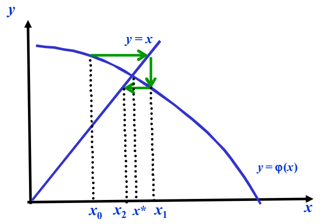
(3) $x_{k+1}=\varphi_3(x_k)=x_k^{\ 4}+2x_k^{\ 2}-3$； $x_3=96,\quad x_4=8.495307\times10^7$

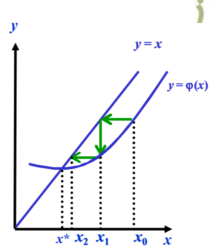
迭代格式不同，收敛情况也不同。选择迭代函数的**基本原则**是：

- 首先必须保证迭代产生的迭代序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$ 收敛；
- 其次在收敛的基础上，要求迭代序列尽可能收敛得快。

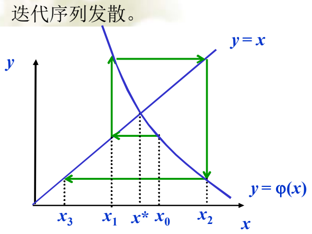
迭代法的几何含义

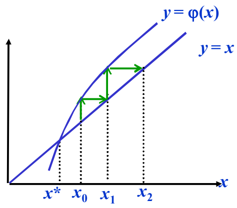
从几何上看，迭代法是将求曲线 $y=f(x)$ 的零点问题化为求曲线 $y=\varphi(x)$ 与直线 $y=x$ 的交点，迭代过程下图所示，





当然，迭代过程也可能出现下图所示的情况，此时 x_n 越来越远离 x^*，迭代序列发散。





迭代法的收敛条件 –定理1

定理 1：方程 $x=\varphi(x)$，$\varphi(x)\in C[a,b]$，且满足以下两条件：

(1)当 $x\in[a,b]$，$\varphi(x)\in[a,b]$；

(2) 存在常数 $0<L<1$，对任意的 $x,y\in[a,b]$，有 $|\varphi(x)-\varphi(y)|\le L|x-y|$；

则(1) $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^*；

(2)任取 $x_0\in[a,b]$，由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，即有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$；

迭代法的收敛条件-定理1

(3) 成立误差估计式：

$$|x_k-x^*|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|, \qquad (2.1)$$

$$|x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|,\quad k=1,2,3,\cdots。\qquad (2.2)$$

注 1：(2.1)式称为事后估计式，表示可用相邻两次迭代值之差的绝对值来估计误差，可作为迭代终止条件。
注 2：(2.2)式称为事前估计式，可以估计出要达到给定精度 ε 所需次数 n。

迭代法的收敛条件 –定理2

定理 2：将定理 1 条件改为：

方程 $x=\varphi(x)$，$\varphi(x)\in C[a,b]$，$\varphi(x)$ 在 (a,b) 可导，且满足以下两条件：

（1） 当 $x\in[a,b]$，$\varphi(x)\in[a,b]$；

（2） $|\varphi'(x)|\le L<1$，当 $x\in[a,b]$；

则结论同定理 1.

迭代法的收敛条件–定理3

定理 3. x^* 是方程 $x=\varphi(x)$ 的根，$\varphi(x)$ 在 x^* 的一个邻域 $R=\{x \mid |x-x^*|<\delta\}$ 内导数存在，且存在正常数 $L<1$，使 $|\varphi'(x)|\le L<1$，则任取初值 $x_0\in R$，迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于 x^*。

反之，若在 x^* 的邻域 R 内 $|\varphi'(x)|\ge 1$，则迭代格式发散。

25

迭代法的收敛条件

定理 3 强调迭代初值 x_0 应取在根 x^* 的邻域中。如果对任意给定的 x_0，迭代格式均收敛，则称此格式具有**全局收敛性**，但这样的格式是极其稀少的。如果对根 x^* 的某邻域内的任一点 x_0，迭代格式均收敛，则此格式具有**局部收敛性**。

事实上：定理 3 为局部收敛性条件。具体解题时，虽然无法判别隔根区间是否为以 x^* 为中心的邻域，但只要它足够小，且在邻域中满足：$|\varphi'(x)|\le L<1$，即可保证对其中任取的一点 x_0 迭代收敛。

26

例 7：判断用以下迭代法求 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 在 $(1,2)$ 的实根时的敛散性。

(1) $x=\frac{1}{3}(x^3+1)$

(2) $x=\sqrt[3]{3x-1}=(3x-1)^{\frac{1}{3}}$

27

迭代法的收敛速度

定义：设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果迭代误差 $e_k=x_k-x^*$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c\ne 0$ 成立，则称序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^* 具有 p 阶收敛速度，简称 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的。常数 c 称为渐近收敛常数，也称为收敛因子。

当 $p=1$ 时称为线性收敛，此时必有 $0<c<1$；

当 $p>1$ 时称为超线性收敛；

当 $p=2$ 时称为平方收敛。

28

迭代法的收敛速度

定理 4. 设 x^* 为 $x=\varphi(x)$ 的根，在 x^* 的邻域内有连续的 p 阶导数（$p\ge 1$），那么

（1）若 $0<|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代过程在 x^* 的附近线性收敛；

（2）若 $\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，但 $\varphi^{(p)}(x^*)\ne 0$，则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 x^* 附近 p 阶收敛。

（3）$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^{\,p}}=\frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(x^*)$

29

例 8 求迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{x_k}$ 的收敛阶。

例 9. 证明迭代式 $x_{k+1}=x_k(x_k^2+3a)/(3x_k^2+a)$ 是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法。假设 x_k 充分靠近 x^*，求

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}。$$

30

例 10：对于迭代函数 $\phi(x)=x+C(x^2-2)$，试讨论：

(1) C 为何值时，$x_{k+1}=\phi(x_k)(k=0,1,\cdots)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$；

(2) C 为何值时，收敛速度最快？

(3)取 $C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，取初值 $x_0=1.2$，计算方程 $x=\phi(x)$ 的根的近似值，

要求：$|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$.

埃特金Aitken加速收敛法

Aitken 法基本思路：

$$x_{k+1}-x^*=\varphi(x_k)-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi_k)(x_k-x^*),$$

$$x_{k+2}-x^*=\varphi(x_{k+1})-\varphi(x^*)=\varphi'(\xi_{k+1})(x_{k+1}-x^*),$$

当 x_{k+1} 与 x_k 相差不大远时，$\varphi'(\xi_k)\approx\varphi'(\xi_{k+1})$，因此有比例式

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_{k+2}-x^*}\approx\frac{x_k-x^*}{x_{k+1}-x^*}$$

有 $$x^*\approx\frac{x_{k+2}x_k-x_{k+1}{}^2}{x_{k+2}+x_k-2x_{k+1}}=x_k-\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$

Aitken加速收敛法

算法描述如下：

$$\begin{cases} y_k=\varphi(x_k) \\ z_k=\varphi(y_k) \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{(y_k-x_k)^2}{z_k-2y_k+x_k} \end{cases}$$

Steffensen 迭代法

定理 5：设 $x^*=\varphi(x^*)$，$\varphi(x)$ 在包含 x^* 的某开区间内具有二阶连续导数，并且 $\varphi'(x^*)\neq 1$，则 Steffensen 迭代法至少是二阶收敛的。

注：若 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 为线性收敛，则 Steffensen 法为平方收敛。

§3 牛顿法及其改进

一、 牛顿法

牛顿法的基本思想：将非线性方程线性化，以线性方程的解逐步逼近非线性方程的解。

若取 x_0 为 $f(x)=0$ 的一个初始近似值，则 $f(x)$ 在 x_0 附近的泰勒展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots,$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

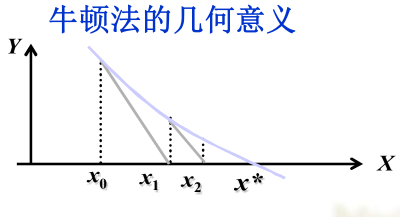
得到 $$x\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

取 $$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,3,\cdots$$

按上式求方程 $f(x)=0$ 近似解称为 Newton 法。其对应的迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$。

牛顿法的几何意义



过点 $(x_0,f(x_0))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，切线方程为：

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

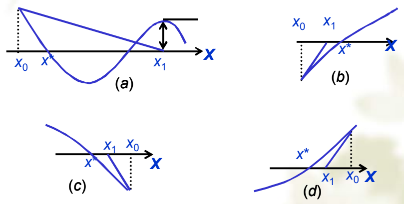
该切线与 x 轴的交点的横坐标即为新的近似值 x_1，而 x_2 则是曲线上点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线与 x 轴的交点。故牛顿法又称为**切线法**。

牛顿法局部收敛定理

定理 6：设 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的根，若在包含 x^* 的某个开区间内 $f''(x)$ 连续且 $f'(x)\neq 0$，则存在 x^* 的一个邻域 $R=\{x \mid |x-x^*|\leq\delta\}$，使任意初值 $x_0\in R$，牛顿法收敛于 x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}。$$

应用中可由实际问题的背景来预测利用对分区间法求得较好的初值x_0。使在其邻近$f'(x)$, $f''(x)$不变号，并且使$f(x_0)\,f''(x_0)>0$，这就能保证收敛，如下图所示:



例 10：用牛顿迭代法求方程 $x=e^{-x}$ 在 $x=0.5$ 附近的根。

解：将方程化为 $f(x)=x-e^{-x}=0$，则牛顿迭代格式有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+e^{-x_k}}$$

取初值 $x_0=0.5$，有

$x_1=0.566311, x_2=0.5671431, x_3=0.5671433$。

例 11：利用牛顿法求方程 $x^2-2=0$ 与 $1-\frac{x^2}{2}=0$ 的根，从而导出求 $\sqrt{2}$ 的迭代格式。

例 12：设法导出计算 $\frac{1}{\sqrt{a}}(a>0)$ 的牛顿法迭代公式，并要求公式中既无开方运算，又无除法运算。

例 13：证明：求开方 $\sqrt{a}(a>0)$ 的格式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)$，对于任意初值 $x_0>0$ 都是收敛的。

牛顿法
优点：计算速度快
缺点：要计算导数值
修正：找 $f'(x_k)$ 的近似，对初值 x_0 要求高

牛顿法的变形

1. 简化牛顿迭代法：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{M}$

   注： 对 M 选取有要求，收敛速度 1 阶。

2. 双点割线法：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)$

   注： 需要两个初值点，收敛速度 **1.618 阶**

3. 单点割线法：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-x_0}{f(x_k)-f(x_0)}f(x_k)$

   注： 需要两个初值点，收敛速度 **1 阶**

牛顿法的变形

4. 牛顿下山法：

牛顿法收敛性依赖于初值 x_0 的选取，如果 x_0 偏离所求根 x^* 较远，则牛顿法可能发散，为防止迭代发散，额外要求

$$|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|. \text{(下山法)}$$

我们将牛顿法的计算结果 $\bar{x}_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 与前一步的结果 x_k 的适当加权平均作为新的改进值：

$$x_{k+1}=\lambda\bar{x}_{k+1}+(1-\lambda)x_k \quad (0<\lambda\le 1),$$

λ 称为下山因子，从 1 开始逐次减半进行计算，直到满足下山条件为止。

43

计算重根的迭代法

问题：在牛顿法的局部收敛定理中我们假设了在包含 x^* 的某个开区间内 $f'(x)\neq 0$，即设 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的单根，若 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的 m 重根，那么情况如何？

44

计算重根的迭代法

我们需要考察该情况下的 $\varphi'(x^*)$。

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

而

$$f(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-x^*)^m$$

$$f'(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1},$$

$$f''(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_3)}{(m-2)!}(x-x^*)^{m-2}$$

45

计算重根的迭代法

因此

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{((m-1)!)^2}{m!(m-2)!}=1-\frac{1}{m}$$

$$|\varphi'(x^*)|=1-\frac{1}{m}<1,$$

因此，当 x^* 为方程 $f(x)=0$ 的 m 重根时，牛顿法依然收敛，但是只有 1 阶收敛速度，且重数 m 越大，收敛速度越慢。

46

计算重根的迭代法

改进一：化 $f(x)=0$ 的重根为某方程的单根。

取 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则 $f(x)=0$ 的 m 重根为 $u(x)=0$ 的单根。

对方程 $u(x)=0$ 作用牛顿法，迭代算法为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2-f(x_k)f''(x_k)}$$

2 阶收敛，缺点：要计算 $f''(x)$，计算量变大

47

计算重根的迭代法

改进二： $x_{k+1}=x_k-\dfrac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$

注：可以证明它是求 m 重根 x^* 的具平方收敛的迭代格式。

问题：重数 m 如何确定？

48