### 第五章 曲线拟合和函数逼近

### 最小二乘原理和多项式拟合

- 最小二乘原理
- 多项式拟合

### 一般的最小二乘拟合

### 正交多项式曲线拟合

函数逼近

最小二乘原理 例:已知一组实验数据							
$X_i$	-1	0	1	2			
$\mathcal{Y}_i$	-0.9	1	3	5.1			

如何建立x与y之间的关系?

观察得知两个变量之间大约成线性关系,我们就用直线方程 来描述,设 $P_1(x) = ax + b$ ,如何来确定系数a,b?

若将系数直接代入方程
$$P_1(x) = ax + b$$
,则有

有
$$\begin{cases}
-a+b=-0.9\\ 0\times a+b=1\\ a+b=3\\ 2a+b=5.1
\end{cases}$$

这是一个矛盾方程组,  $P_1(x) = ax + b$  一般不会通过所有点,那么就会有误差

 $r_i = P_1(x_i) - y_i$ , 那么将误差 $r_i$ 的大小作为衡量系数a,b好坏的标志。

常用的有最小二乘原理,即使得误差的平方和 $\sum r_i^2$ 最小,也就是使得 $\|r\|$ ,最小。

在本例中记 $Q(a,b) = \sum_{i=1}^{3} r_i^2 = \sum_{i=1}^{3} (ax_i + b - y_i)^2$ , 要求a,b使Q(a,b)最小。根据

求极值的思想,则需满足

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a,b)}{\partial a} = 12a + 4b - 28.2 = 0\\ \frac{\partial Q(a,b)}{\partial b} = 4a + 8b - 16.4 = 0 \end{cases}$$

求解线性方程组有 a = 2, b = 1.05。

### 最小二乘原理

**曲线拟合问题:** 对给定的数据 $(x_i, y_i)$  $(i = 0, 1, \dots, m)$ , 在取定的函

数类 $\Phi$ 中,求函数 $P(x) \in \Phi$ ,使偏差 $r_i = P(x_i) - y_i$ ,  $(i = 0,1,\dots,m)$ 的平方和最小,即

$$\sum_{i=0}^{m} r_i^2 = \sum_{i=0}^{m} (P(x_i) - y_i)^2 = \min$$

这就是最小二乘曲线拟合问题。这样的P(x)称为最小二乘拟

合函数或者最小二乘解,求最小二乘拟合函数P(x)的方法叫做曲 线拟合的最小二乘法。

### 给定实验数据

## 多项式拟合

١	ACALAN						
	$X_i$	$x_0$	$x_1$		$X_m$		
	$\mathcal{Y}_i$	$\mathcal{Y}_0$	$\mathcal{Y}_1$		$\mathcal{Y}_m$		

求 n 次多项式  $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n (n \le m)$ ,使得

$$Q = \sum_{i=0}^{m} (P_n(x_i) - y_i)^2 = \min$$

将拟合函数取为多项式的曲线拟合问题称为**多项式拟合问题**。拟合曲线  $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$  也称最小二乘拟合多项式。

### 问题:如何求解系数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ ?

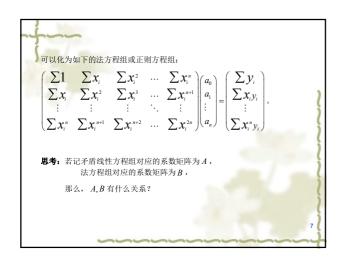
$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \sum_{i=0}^m (a_0 + a_1x_i + \cdots a_nx_i^n - y_i)^2 \ , \ \ \mathbb{F} \ \oplus \ Q \ \mathbb{F} \ \cdot \ , \ \ \mathbb{F} \ \stackrel{\text{def}}{\otimes} \frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0 \ ,$$

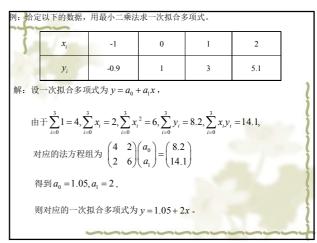
 $j=0,\cdots,n$ ,  $\square$ 

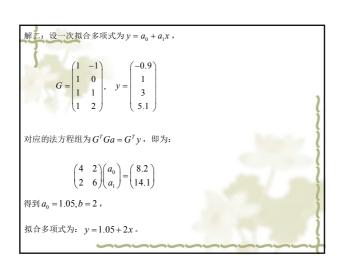
$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=0} (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) = 0$$

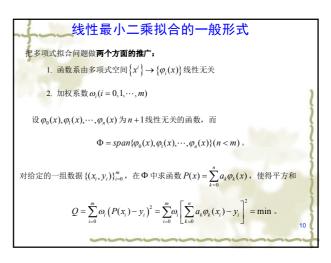
$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=0}^m (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i = 0$$

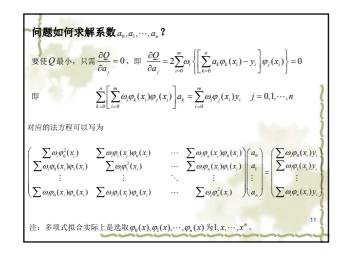
$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m} (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i) x_i^n = 0$$

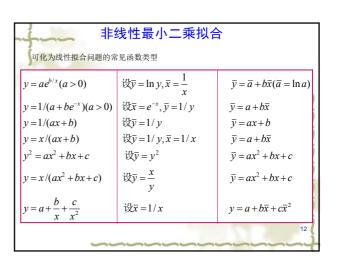












例、给定数据如下表,用最小二乘法求形如 $y = ae^{bx}$ 的经验公式。

 $\widetilde{\mathbf{w}}: \ \ y = ae^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx, \ \ \exists \ \overline{a} = \ln a, \ \ \overline{y} = \overline{a} + bx,$ 

ln y 4.1744 4.0943 3.9703 3.9120 3.8286

法方程组为 
$$\begin{pmatrix} 5 & 17.3 \\ 17.3 & 64.223 \end{pmatrix}$$
  $\begin{pmatrix} \overline{a} \\ b \end{pmatrix}$  =  $\begin{pmatrix} 19.9797 \\ 68.5512 \end{pmatrix}$   $\Rightarrow$   $\begin{pmatrix} \overline{a} \\ b \end{pmatrix}$  =  $\begin{pmatrix} 4.4538 \\ -0.1323 \end{pmatrix}$ 

故 
$$a = e^{\bar{a}} = 85.9527$$
,  $b = -0.1323$ .

### 正交多项式曲线拟合

**定义:** 设有 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ ,若其在点集 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 上满足

$$(\varphi_{j}, \varphi_{k}) = \sum_{i=0}^{m} \omega_{i} \varphi_{j}(x_{i}) \varphi_{k}(x_{i}) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \|\varphi_{j}\|_{2}^{2}, & j = k \end{cases},$$

则称  $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$  为点集  $\{x_i\}_{i=0}^m$  上带权  $\omega_i$  的**离散正交函数系**。

注: 若  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} = \{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ ,  $P_k(x)$  为 k 次多项式,

则称  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$  为点集  $\{x_i\}_{i=0}^m$  上带权  $\omega_i$  的**离散正交多项式系**。

在离散正交函数系条件下,法方程组对应的系数矩阵就化为对角阵,方程组求 解非常容易。因此,问题化为如何构造正交函数系,而正交多项式系是最简单的正 交函数系。

### 正交多项式的构造

假设已知节点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ ,及权重 $\omega_i$ ,可用递推公式给出带权 $\omega_i$ 的正交多项式序

例  $\{P_i(x)\}_{i=0}^n$ :

$$P_0(x) = 1$$

$$\begin{cases} P_1(x) = (x - \alpha_1)P_0(x) \end{cases}$$

$$P_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x)$$
  $k = 1, 2, \dots, n-1$ 

例. 试构造点集 {-1,-0.75,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,0.75,1} 上的离散正交

多项式系  $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ .

利用所求的离散正交多项式系,对下表中的数据求二次拟合多项式。

解: 
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x - \alpha_1, \quad \text{$\not=$} \ \, \text{$\not=$} \ \, \text{$\not=$} \ \, \alpha_1 = \frac{\sum x_i P_0^2(x_i)}{\sum P_0^2(x_i)} = \frac{\sum x_i}{\sum 1} = 0 \, \, , \quad \text{$\not\approx$} \ \, P_1(x) = x \, \,$$

$$P_2(x) = (x - \alpha_2)P_1(x) - \beta_1, \quad \text{$\not = $} \\ \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{\sum_{i=1}^{n} x_i^3} = 0$$

$$\beta_1 = \frac{\sum P_1^2(x_i)}{\sum P_0^2(x_i)} = \frac{\sum x_i^2}{\sum 1} = \frac{5}{12}$$

故 
$$P_2(x) = x^2 - \frac{5}{12}$$

$$a_0 = \frac{(y, P_0)}{(P_0, P_0)} = 2.0131$$

$$a_1 = \frac{(y, P_1)}{(P_1, P_1)} = 2.2516$$

$$a_2 = \frac{(y, P_2)}{(P_2, P_2)} = 0.0313$$

二次拟合多项式为:

$$a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) = 2.0131 + 2.2516x + 0.0313(x^2 - 5/12)$$

### 函数逼近

在已知一个函数 y = f(x) 情况下,寻求一个简单、易于计算的函数来代替 f(x),

以便用此简单函数来代替求 f(x) 的值。如何度量两个函数的近似程度,我们首先需要 给出以下定义:

定义: 设  $f(x) \in C[a,b]$ , 其范数为

$$||f||_{\infty} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|,$$

$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

**注:** 2 范数可以推广到带权 2 范数:  $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx}$ , 这里  $\rho(x)$  称为权函数

### 函数逼近目的

函数逼近目的:

对于给定的函数 y = f(x), 希望在  $span\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  中找一个

函数 $P(x) = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n$ , 使得

1. 
$$||P(x)-f(x)||_{\infty} = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |P(x)-f(x)| = \min$$
,

P(x) 称为 f(x) 的最佳一致逼近;

2. 
$$||P(x)-f(x)||_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x)(P(x)-f(x))^2 dx} = \min$$
,

P(x) 称为 f(x) 的最佳平方逼近。

### 最佳平方逼近

定义: 设 $f(x),g(x) \in C[a,b]$ ,  $\rho(x)$ 是权函数,

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

称为函数 f(x) 和 g(x) 在 [a,b] 上的内积。

### 最佳平方逼近:

在  $span\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  中找一个函数  $P(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$ 

$$||P(x)-f(x)||_2 = \sqrt{\int_a^b \rho(x)(P(x)-f(x))^2 dx} = \min$$

$$\Leftrightarrow Q(a_0, a_1, \dots, a_n) := \int_a^b \rho(x) (P(x) - f(x))^2 dx = \min$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \underline{Q}}{\partial a_j} = 2 \int_a^b \rho(x) (\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k - f(x)) \varphi_j dx = 0 , \quad \forall j = 0, 1, \dots, n .$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_{k} \int_{a}^{b} \rho(x) \varphi_{k} \varphi_{j} dx = \int_{a}^{b} \rho(x) f(x) \varphi_{j} dx, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (\varphi_k, \varphi_j) a_k = (f, \varphi_j), \quad \forall j = 0, 1, \dots, n.$$

对应线性方程组为

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{vmatrix}$$

例. 设  $f(x) = |x| \in C[-1,1]$ , 试求 f(x) 在  $\Phi = span\{1, x^2, x^4\}$  上的最佳平 方逼近函数。

解: 法方程组为 
$$\begin{pmatrix} (\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & (\phi_0,\phi_2) \\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & (\phi_1,\phi_2) \\ (\phi_2,\phi_0) & (\phi_2,\phi_1) & (\phi_2,\phi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ (f,\phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{BP} \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} 1 dx & \int_{-1}^{1} x^{2} dx & \int_{-1}^{1} x^{4} dx \\ \int_{-1}^{1} x^{2} dx & \int_{-1}^{1} x^{4} dx & \int_{-1}^{1} x^{6} dx \\ \int_{-1}^{1} x^{4} dx & \int_{-1}^{1} x^{6} dx & \int_{-1}^{1} x^{8} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0} \\ a_{1} \\ a_{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} |x| dx \\ \int_{-1}^{1} |x| x^{2} dx \\ \int_{-1}^{1} |x| x^{4} dx \end{pmatrix}$$

最佳平方逼近函数为

 $P(x) = 0.1171875 + 1.640625x^2 - 0.8203125x^4$ 

**例:** 设 
$$f(x) \in C[0,1]$$
,  $\rho(x) = 1$ , 如果在  $span\{1, x, \dots, x^n\}$  上作逼近,则

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{k+j} dx = \frac{1}{k+j+1},$$

对应的法方程系数矩阵为

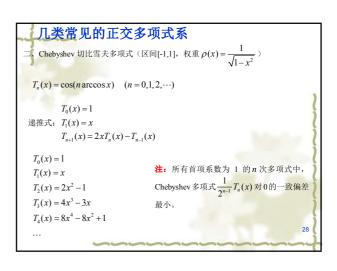
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

其为 Hilbert 矩阵,为高度病态的矩阵。因此,若采用正交多项式作基,可 克服病态问题求解。

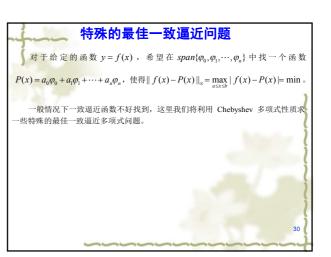
定义: 若函数族 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 満足  $(\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \| \varphi_j \|_2^2, j = k \end{cases}$  则称 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是[a,b]上带权[a,b]上带机[a,b]上中,

# 正交多项式的构造 定义: 若 $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} = \{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ , $P_k(x)$ 为k 次多项 武、则称 $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ 为[a,b] 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式系。 正交多项式构造: $\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = (x - \alpha_1)P_0(x) \\ P_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x) & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$ $\text{由}(P_{k+1}, P_k) = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = \frac{(xP_k, P_k)}{(P_k, P_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ $\text{h}(P_{k+1}, P_{k-1}) = 0 \Rightarrow \beta_k = \frac{(xP_k, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})} = \frac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$

### 



# 特殊的最佳平方逼近问题 例. 求多项式 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ 在 [-1,1]上的二次最佳平方逼近多项式。解 由題意,假设所求的最佳平方逼近多项式为 $p_2^*(x)$ ,则 $f(x) - p_2^*(x) = 2 \times \frac{2}{5} P_3(x)$ 故 $p_2^*(x) = f(x) - 2 \times \frac{2}{5} P_3(x) = x^2 + \frac{16}{5} x - 1$ 例. 求多项式 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ 在 [0,1]上的二次最佳平方逼近多项式。解 令 $x = \frac{t+1}{2}$ , t = 2x - 1,则 $f(x) = \frac{1}{4}t^3 + t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{1}{2} = g(t)$ 问题等价于求 g(t) 在 [-1,1]上的二次最佳平方逼近多项式, $g(t) - p_2^*(t) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} P_3(t)$ $p_2^*(t) = g(t) - \frac{1}{10} P_3(t) = t^2 + \frac{12}{5} t + \frac{1}{2}$ 则 $p_2^*(x) = (2x - 1)^2 + \frac{12}{5}(2x - 1) + \frac{1}{2} = 4x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{9}{10}$



### 应用1: 插值余项极小化

若插值区间为[-1,1],可利用切比雪夫多项式 $T_n(x)$ ,使n-1次插值多项式的

$$w_n^*(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$
,

取  $T_n(x)$  的零点  $x_i=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$  ,  $i=1,2,\cdots,n$  ,  $(x_i\in[-1,1])$  作为插值节点,所构造的 n-1 次插值多项式可以作为近似的最佳一致逼近多项式。

若插值区间不为[-1,1],插值区间为[a,b],可以先把[a,b]做变换到[-1,1],

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$
, 对 $t$ 来说,变化区间是[-1,1]。

$$w_n^*(x) = w_n^*(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t) = w_n^*(t)$$
 31

### 应用2: 多项式降次

对于高次多项式,可以用低一次的最佳一致逼近多项式来代替它。

- 例: 求  $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x 1$ 在[-1,1]上的二次最佳一致逼近多项式。
- 解:  $p_2^*(x)$  应该满足  $f(x) p_2^*(x) = 2(\frac{1}{2^{3-1}}T_3(x)) = \frac{1}{2}(4x^3 3x)$ , 故  $p_2^*(x) = f(x) - \frac{1}{2}(4x^3 - 3x) = x^2 + \frac{7}{2}x - 1$ 。

### 应用2: 多项式降次

例: 求 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$ 在[0,1]上的二次最佳一致逼近多项式。

$$\Re: \ \ x = \frac{t+1}{2}, \quad t = 2x-1,$$

則 
$$f(x) = \frac{1}{4}t^3 + t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{1}{2} = g(t)$$

$$g(t) - p_2^*(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{3-1}} T_3(t) = \frac{1}{16} (4t^3 - 3t)$$

$$g(t) - p_2^*(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{2^{3-1}} T_3(t) = \frac{1}{16} (4t^3 - 3t),$$

$$\text{th} \ p_2^*(t) = g(t) - \frac{1}{16} (4t^3 - 3t) = t^2 + \frac{39}{16} t + \frac{1}{2},$$

对应有 
$$p_2^*(x) = (2x-1)^2 + \frac{39}{16}(2x-1) + \frac{1}{2} = 4x^2 + \frac{7}{8}x - \frac{15}{16}$$
。