4 动态规划和静态规划关系

线性规划和非线性规划所研究的问题，通常都是与时间无关的，故又可以称为静态规划。

对于某些静态规划问题,可以人为引入时间因素,适当引入阶段变量、状态、决策变量可把它看作是按阶段进行的动态规划问题。

动态规划方法

逆序解法

顺序解法

关键：正确写出动态规划的递推关系式

逆推形式，当初始状态给定时，用逆推比较方便

顺推形式，当终止状态给定时，用顺推比较方便

逆推（序）解法：

设已知初始状态为s_1，并假定最优值函数$f_k(s_k)$表示第k阶段的初始状态为s_k，从k阶段到n阶段所得到的最大效益。

从第n阶段开始，则有 $f_n(s_n)=\max\limits_{x_n\in D_n(s_n)} v_n(s_n,x_n)$

其中 $D_n(s_n)$ 是由状态 s_n 所确定的第n阶段的允许决策集合。

解此一维极值问题，就得到 最优解 $x_n^*=x_n(s_n)$, 最优值 $f_n(s_n)$

注意：若 $D_n(s_n)$ 只有一个决策，则 $x_n\in D_n(s_n)$ 就应写成

$$x_n=x_n(s_n)$$

在第n-1阶段，有

$$f_{n-1}(s_{n-1}) = \max_{x_{n-1} \in D_n(s_{n-1})} \left[v_{n-1}(s_{n-1}, x_{n-1}) * f_n(s_n) \right]$$

其中

$$s_n = T_{n-1}(s_{n-1}, x_{n-1})$$

解此一维极值问题，

得最优解 $x^*_{n-1} = x_{n-1}(s_{n-1})$,

最优值 $f_{n-1}(s_{n-1})$

在第k阶段

$$f_k(s_k)=\max_{x_k\in D_k(s_k)}[v_k(s_k,x_k)*f_{k+1}(s_{k+1})]$$

$$s_{k+1}=T_k(s_k,x_k);$$

$$\text{最优解 } x_k^*=x_k(s_k),\text{最优值 } f_k(s_k)$$

如此类推，直到第一阶段，有

$$f_1(s_1)=\max_{x_1\in D_1(s_1)}[v_1(s_1,x_1)*f_2(s_2)]$$

$$s_2=T_1(s_1,x_1);$$

$$\text{得最优解 } x_1^*=x_1(s_1),\text{最优值 } f_1(s_1)$$

由于初始状态s_1已知， 可确定$x_1^*=x_1(s_1)$和$f_1(s_1)$

按递推过程的相反顺序推算可得所要求结果

例 $\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c\,(c > 0) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

用逆推解法

按变量个数划分为3个阶段，

设状态变量为$s_1, s_2\ s_3, s_4$ ，s_1 = c。

取x_1,x_2,x_3为决策变量；

指标函数按乘积方式结合。

最优值函数$f_k(s_k)$表示为第k阶段的初始状态为s_k，从k阶段到3阶段所得的最大值。

设$s_1 = c, s_2 = s_1 - x_1 = c - x_1, s_3 = s_2 - x_2 = c - x_1 - x_2 = x_3$

或$s_3 = x_3, s_3 + x_2 = s_2, s_2 + x_1 = s_1 = c$

则有$x_3 = s_3, 0 \leq x_2 \leq s_2, 0 \leq x_1 \leq s_1 = c$

$$f_3(s_3)=\max_{x_3=s_3}(x_3)=s_3\text{及最优解}x_3^*=s_3$$

$s_3=s_2-x_2$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2\cdot f_3(s_3)]=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2\cdot s_3]$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2\cdot(s_2-x_2)]=\max_{0\le x_2\le s_2}h_2\cdot(s_2,x_2)$$

$$\text{由}\frac{dh_2}{dx_2}=2x_2s_2-3x_2^2=0\text{得}x_2=\frac{2}{3}s_2\text{和}x_2=0(\text{舍去})$$

$$\frac{d^2h_2}{dx_2^2}=2s_2-6x_2,\quad\text{而}\frac{d^2h_2}{dx_2^2}\Big|_{x_2=\frac{2}{3}s_2}=-2s_2<0,$$

$$\therefore x_2=\frac{2}{3}s_2\text{为极大值点}$$

$$f_2(s_2)=\frac{4}{27}s_2^3\text{及最优解}x_2^*=\frac{2}{3}s_2$$

$s_2=s_1-x_1$

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}[x_1\cdot f_2(s_2)]=\max_{0\le x_1\le s_1}[x_1\cdot\frac{4}{27}(s_1-x_1)^3]=\max_{0\le x_1\le s_1}h_1\cdot(s_1,x_1)$$

$$\therefore x_1^* = \frac{1}{4}s_1;\ f_1(s_1) = \frac{1}{64}s_1^4$$

$$\because s_1 = c \therefore x_1^* = \frac{1}{4}c;\ f_1(c) = \frac{1}{64}s_1{}^4 = \frac{1}{64}c^4$$

$$s_2 = s_1 - x_1^* = c - \frac{1}{4}c = \frac{3}{4}c$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}s_2 = \frac{1}{2}c;\ f_2(s_2) = \frac{4}{27}s_2^3 = \frac{4}{27}(\frac{3}{4}c)^3 = \frac{1}{16}c^3$$

$$s_3 = s_2 - x_2^* = \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c$$

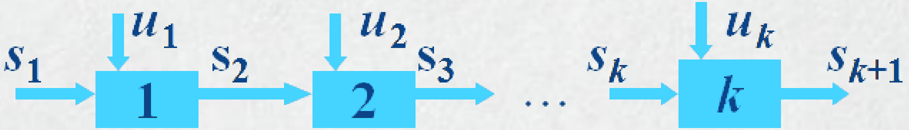
$$x_3^* = \frac{1}{4}c;\ f_3(s_3) = s_3 = \frac{1}{4}c$$

最优解为：

$$x_1^* = \frac{1}{4}c; x_2^* = \frac{1}{2}c; x_3^* = \frac{1}{4}c$$

$$\max z = f_1(c) = \frac{1}{64}c^4$$

顺推解法：



设已知终止状态为s_{n+1}，并假定最优值函数$f_k(s_{k+1})$为表示第k阶段的结束状态为s_{k+1}，从1阶段到k阶段得到最大效益。

状态转移方程为：

$$s_k = T_k^*(s_{k+1}, x_k)$$

在第1阶段

$$f_1(s_2) = \max_{x_1 \in D_1(s_1)} v_1(s_1, x_1), 其中 s_1 = T_1^*(s_2, x_1)$$

$$最优解 x_1^* = x_1(s_2), 最优值 f_1(s_2)$$

在第2阶段

$$f_2(s_3) = \max_{x_2 \in D_2(s_2)} [v_2(s_2, x_2) * f_1(s_2)]$$

$$s_2 = T_2^*(s_3, x_2);$$

$$得最优解 x_2^* = x_2(s_3), 最优值 f_2(s_3)$$

在第n阶段 $$f_n(s_{n+1}) = \max_{x_n \in D_n(s_n)} [v_n(s_n, x_n) * f_{n-1}(s_n)]$$

$$s_n = T_n^*(s_{n+1}, x_n);$$

最优解 $x_n^* = x_n(s_{n+1})$, 最优值 $f_n(s_{n+1})$

由于终止状态s_{n+1}已知，

可确定$x_n^* = x_n(s_{n+1})$和$f_n(s_{n+1})$

按计算过程的相反顺序推算可得所要求结果

例 $\max \quad z = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = c(c > 0) \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

用顺推解法

按变量个数划分为3个阶段，

设状态变量为s_1, s_2, s_3, s_4 ，$s_4 = c$。

取x_1,x_2,x_3为决策变量；

指标函数按乘积方式结合。

最优值函数$f_k(s_{k+1})$表示为第k阶段末的结束状态为s_{k+1}，从1阶段到k阶段所得的最大值。

设$s_4 = c, s_3 = s_4 - x_3 = c - x_3, s_2 = s_3 - x_2 = s_4 - x_3 - x_2 = c - x_3 - x_2 = x_1$

或 $s_2 = x_1, s_2 + x_2 = s_3, s_3 + x_3 = s_4 = c$

则有$x_1 = s_2, 0 \leq x_2 \leq s_3, 0 \leq x_3 \leq s_4 = c$

$$f_1(s_2)=\max_{x_1=s_2}(x_1)=s_2\text{及最优解}x_1^*=s_2$$

$s_2=s_3-x_2$

$$f_2(s_3)=\max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2\cdot f_1(s_2)]=\max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2\cdot s_2]$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_3}[x_2^2\cdot(s_3-x_2)]=\max_{0\le x_2\le s_3}h_2\cdot(s_3,x_2)$$

$$\text{由}\frac{dh_2}{dx_2}=2x_2s_3-3x_2^2=0\text{得}x_2=\frac{2}{3}s_3\text{和}x_2=0(\text{舍去})$$

$$\frac{d^2h_2}{dx_2^2}=2s_3-6x_2,\quad\text{而}\frac{d^2h_2}{dx_2^2}\Big|_{x_2=\frac{2}{3}s_3}=-2s_3<0,$$

$$\therefore x_2=\frac{2}{3}s_3\text{为极大值点}$$

$$f_2(s_3)=\frac{4}{27}s_3^3\text{及最优解}x_2^*=\frac{2}{3}s_3$$

$s_3=s_4-x_3$

$$f_3(s_4)=\max_{0\le x_3\le s_4}[x_3\cdot f_2(s_3)]=\max_{0\le x_3\le s_4}[x_3\cdot\frac{4}{27}s_3{}^3]$$

$$=\max_{0\le x_3\le s_4}[x_3\cdot\frac{4}{27}(s_4-x_3)^3]=\max_{0\le x_3\le s_4}h_3\cdot(s_4,x_3)$$

$$\therefore x_3^* = \frac{1}{4}s_4;\ f_3(s_4) = \frac{1}{64}s_4^4 \quad \because s_4 = c$$

$$\therefore x_3^* = \frac{1}{4}c;\ f_3(s_4) = \frac{1}{64}c^4$$

$$s_3 = s_4 - x_3^* = c - \frac{1}{4}c = \frac{3}{4}c$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}s_3 = \frac{1}{2}c;\ f_2(s_3) = \frac{1}{16}c^3$$

$$s_2 = s_3 - x_2^* = \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c$$

$$x_1^* = \frac{1}{4}c;\ f_1(s_2) = \frac{1}{4}c$$

最优解为：

$$x_1^* = \frac{1}{4}c; x_2^* = \frac{1}{2}c; x_3^* = \frac{1}{4}c \qquad \max z = f_3(s_4) = \frac{1}{64}c^4$$