动态规划的应用举例

一、资源分配问题

把有限的资源(如资金、材料、设备、人力等)分配给若干使用者，而使某一指标为最优的问题即为资源分配问题。

资源可以有一种或若干种，

只有一种资源可供分配的问题称之为一维资源分配问题。

设有某种资源（如电、煤等）可用于n项活动，假设资源数量为a，已知用于第 i 项活动的资源数为x_i，

可以得到收益 $g_i(x_i), i = 1,2,\cdots,n$

试确定资源分配方案使总收益最大。

该问题的数学模型可以表示为：

$$\max z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_n(x_n)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

当 $g_i(x_i), i=1,2,\cdots,n$ 是线性函数时，上述问题是线性规划问题；而当是非线性函数时，如果采用非线性规划的方法是比较麻烦的。

然而这类问题可以将其看成是一个多阶段决策问题，并采用动态规划的方法求解。

在用动态规划方法处理这类一维资源分配问题时,通常将资源分给每项活动的过程看是一个阶段，每个阶段都要确定对一种资源的投放量。

设状态变量 s_k 表示分配用于生产第k种产品至第n种产品原料的数量。

决策变量 u_k 表示分配给生产第k种产品的原料量，即 $u_k = x_k$

状态转移方程： $s_{k+1} = s_k - u_k = s_k - x_k$

允许决策集合： $D_k(s_k) = \{u_k \mid 0 \le u_k = x_k \le s_k\}$

$f_k(s_k)$ 表示以数量 s_k的原料分配给第k种产品至第n种产品所得到的最大利润，则有

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)\}, k = n-1, n-2, \cdots, 1 \\ f_n(s_n) = \max\limits_{x_n = s_n} g_n(x_n) \end{cases}$$

例7-6：某工业部门按国家计划的安排，拟将某高效率的设备五台，分配给所属的甲、乙、丙三个工厂，各工厂若获得这种设备之后，可以为国家提供的盈利如下表所示。问：这五台设备如何分配给各工厂，才能使国家得到的盈利最大。

设备台数 \ 工厂 盈利/万元	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6
3	9	11	11
4	12	11	12
5	13	11	12

动态规划的数学模型

将三个分厂看作是三个阶段，即阶段变量 $k=1,2,3$;

状态变量s_k表示第k阶段初可分配的设备台数,$0\le s_k \le 5$;

决策变量x_k表示第k阶段分配给分厂k的设备台数，

允许决策集合$X_k(s_k)=\{ x_k \mid 0\le x_k \le s_k\}$;

状态转移方程为 $s_{k+1} = s_k - x_k$；

阶段指标$P_k(s_k, x_k)$ 表示第k 阶段从s_k台设备中分配给k 分厂x_k 台设备的阶段效益;

最优指数函数$f_k(s_k)$表示第k阶段从s_k 开始到最后阶段采用最优分配策略取得的最大的效益值;

递推方程函数式

$$\begin{cases} \text{基本方程}: f_k(s_k) = \max\limits_{x_k \in X_k(S_k)} \{P_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ \text{边界条件}: f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

逆序求解

第三阶段：设将S_3台设备（S_3 = 0,1,2,3,4,5）全部分配给丙厂时，此时只有一个工厂，有多少台设备就全部分配给工厂丙，故它的盈利值就是该段的最大盈利值。最大盈利值为：$f_3(S_3) = max[P_3(X_3)]$ 其中$X_3 = S_3$ = 0,1,2,3,4,5　　X_3^*表示使得$f_3(S_3)$为最大值时的最优决策。

表7 - 1

S_3 \ X_3	$P_3(X_3)$						$f_3(S_3)$	X_3^*
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
0	0						0	0
1		4					4	1
2			6				6	2
3				11			11	3
4					12		12	4
5						12	12	5

第二阶段：设将S_2台设备（$S_2=0,1,2,3,4,5$）分配给乙厂和丙厂时，对每一个S_2值，都有一种最优分配方案.

如果给乙工厂x_2台，其盈利为$P_2(x_2)$,余下s_2-x_2台就是给丙厂的，则丙的盈利最大值为：$f_3(s_2-x_2)$,现在要选择x_2的值,使得$\boldsymbol{P_2(x_2)+f_3(S_2-x_2)}$取最大值.

即将$\boldsymbol{s_2}$台设备分给乙丙获得最大盈利值为：

$$f_2(S_2)=max[P_2(x_2)+f_3(S_2-x_2)]\ ,\ x_2=0,1,2,3,4,5$$

计算过程如下.

[illegible]

乙厂在不同设备台数下所获利润

第丙厂在设备台数为s_3下所获得的最大利润

s_2 \ x_2	$P_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$: 0	1	2	3	4	5	$f_2(s_2)$	x^*_2
0	**0**						0	0
1	**0+4**	**5+0**					5	1
2	**0+6**	**5+4**	**10+0**				10	2
3	**0+11**	**5+6**	**10+4**	**11+0**			14	2
4	**0+12**	**5+11**	**10+6**	**11+4**	**11+0**		16	1，2
5	**0+12**	**5+12**	**10+11**	**11+6**	**11+4**	**11+0**	21	2

利润	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6

利润	甲	乙	丙
3	9	11	11
4	12	12	11
5	13	11	12

表7 - 2

S_2 \ X_2	$P_2(X_2)+f_3(S_2-X_2)$						$f_2(S_2)$	X_2^*
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**		
0	0						0	0
1	0+4	5+0					5	1
2	0+6	5+4	10+0				10	2
3	0+11	5+6	10+4	11+0			14	2
4	0+12	5+11	10+6	11+4	11+0		16	1,2
5	0+12	5+12	10+11	11+6	11+4	11+0	21	2

第一阶段：设将S_1台设备（$S_1=5$）分配给甲厂、乙厂和丙厂时，因为给甲工厂x_1台，其盈利值为 $p_1(x_1)$，剩下的$5-x_1$台设备就分别给乙和丙工厂，则它的盈利值为$f_2(5-x_1)$，现要选择 x_1的值，使$P_1(x_1)+f_2(5-x_1)$ 最大值，则最大盈利值为：

$f_1(S_1)=\max[P_1(X_1)+f_2(5-X_1)]$ 其中，$x_1=0,1,2,3,4,5$

甲厂在不同设备台数下所获利润

乙厂在设备台数为s_2下所获得的最大利润

S_1 \ X_1	$P_1(X_1)+f_2(5-X_1)$						$f_1(5)$	X_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0,2

利润	甲	乙	丙
0	0	0	0
1	3	5	4
2	7	10	6

利润	甲	乙	丙
3	9	11	11
4	12	12	11
5	13	11	12

按计算表格的顺序反推，可知最优分配方案有两个：

1）由$X_1^* = 0$，$S_2 = S_1 - X_1^* = 5 - 0 = 5$。 再由表7 - 2 ，

可知$X_2^* = 2$。$S_3 = S_2 - X_2^* = 5 - 2 = 3$，故$X_3^* = S_3 = 3$。

即得甲厂分得0台，乙厂分得2台，丙厂分得3台。

2）由$X_1^* = 2$，$S_2 = S_1 - X_1^* = 5 - 2 = 3$。再由表7 - 2，

可知$X_2^* = 2$。$S_3 = S_2 - X_2^* = 3 - 2 = 1$，故$X_3^* = S_3 = 1$。

即得甲厂分得2台，乙厂分得2台，丙厂分得1台。

以上两种最优方案的总盈利均为21万元。

如果原设备台数不是5台，而是4台或3台，

用其它方法解时，往往要从头再算。但用动态规划解时，这些列出的表仍然有用，只需修改最后的表格，就可以得到。

S_1 \ X_1	$P_1(X_1)+f_2(5-X_1)$						$f_1(5)$	X_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	0+21	3+16	7+14	9+10	12+5	13+0	21	0,2

S_1 \ X_1	$P_1(X_1)+f_2(4-X_1)$						$f_1(4)$	X_1^*
	0	1	2	3	4			
4	0+16	3+14	7+10	9+5	12+0		17	1,2

S_1 \ X_1	$P_1(X_1)+f_2(3-X_1)$						$f_1(3)$	X_1^*
	0	1	2	3				
3	0+14	3+10	7+5	9+0			13	1