运 筹 学

第五章　　动态规划的最短路径问题

主 要 内 容

1 动态规划的基本思想

2 最短路径应用

一、动态规划的基本思想

- **1、贝尔曼最优化原理：**一个过程的最优策略具有这样的性质，即无论其初始状态和初始决策如何，今后的诸决策，对以第一个决策所形成的状态作为初始状态的过程而言，必须构成最优策略。
- 这个原理是动态规划的理论基础。

一、动态规划的基本思想

2、建立动态规划模型的步骤

（1）划分阶段

划分阶段是运用动态规划求解多阶段决策问题的第一步，在确定多阶段特性后，按时间或空间先后顺序，将过程划分为若干相互联系的阶段。对于静态问题要人为地赋予“时间”概念，以便划分阶段。

（2）正确选择状态变量

选择变量既要能确切描述过程演变又要满足无后效性，而且各阶段状态变量的取值能够确定。一般地，状态变量的选择是从过程演变的特点中寻找。

一、动态规划的基本思想

3、确定决策变量及允许决策集合

通常选择所求解问题的关键变量作为决策变量，同时要给出决策变量的取值范围，即确定允许决策集合。

4、确定状态转移方程

根据k 阶段状态变量和决策变量，写出$k+1$阶段状态变量，状态转移方程应当具有递推关系。

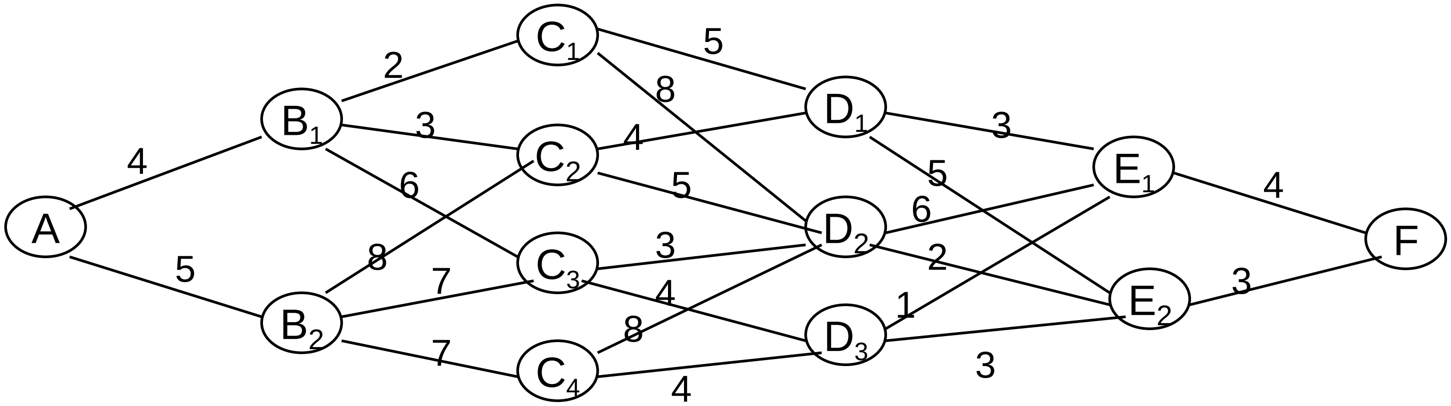
一、动态规划的基本思想

5、确定阶段指标函数和最优指标函数，建立动态规划基本方程

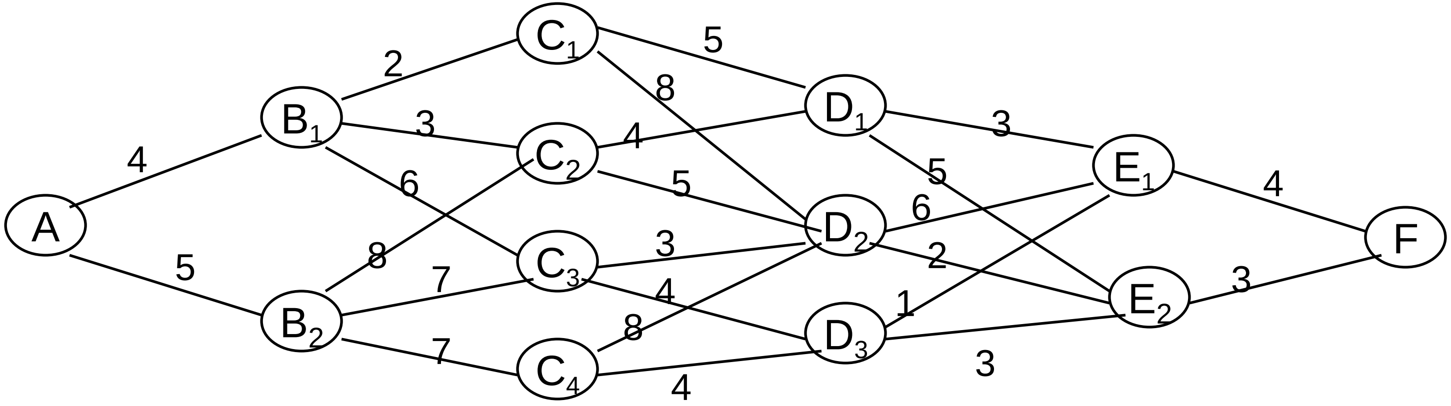
阶段指标函数是指第k 阶段的收益，最优指标函数是指从第k 阶段状态出发到第n 阶段末所获得收益的最优值，最后写出动态规划基本方程。

二、最短路径应用

例1： 给定一个线路网络，两点之间连线上的数字表示两点间距离。试求一条由A到F的部队机动路线，使总距离最短？



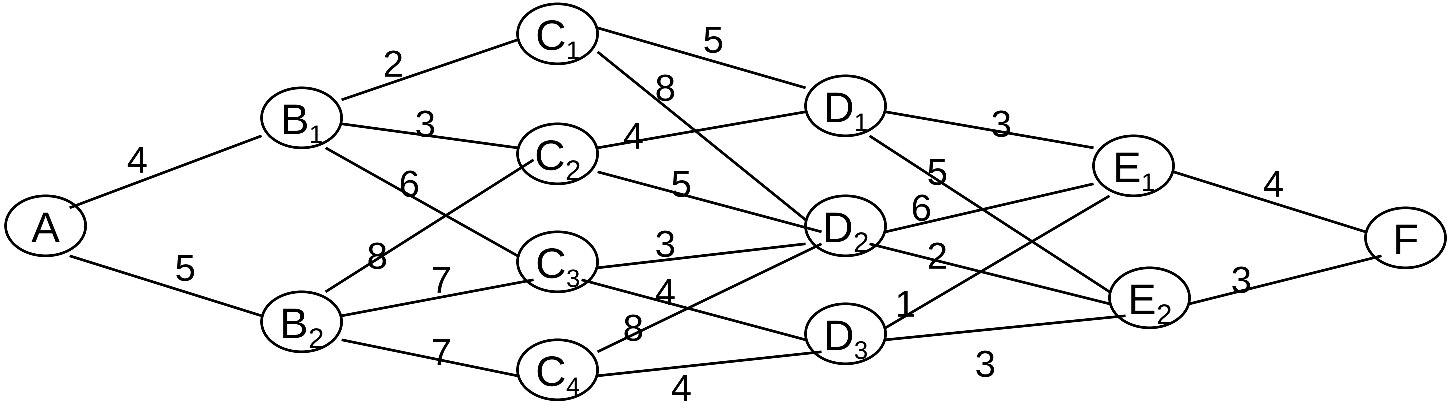
二、最短路径应用



逆序递推方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\limits_{u_k}\{d_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} & k = 5,4,3,2,1 \\ f_6(s_6) = 0 \end{cases}$$

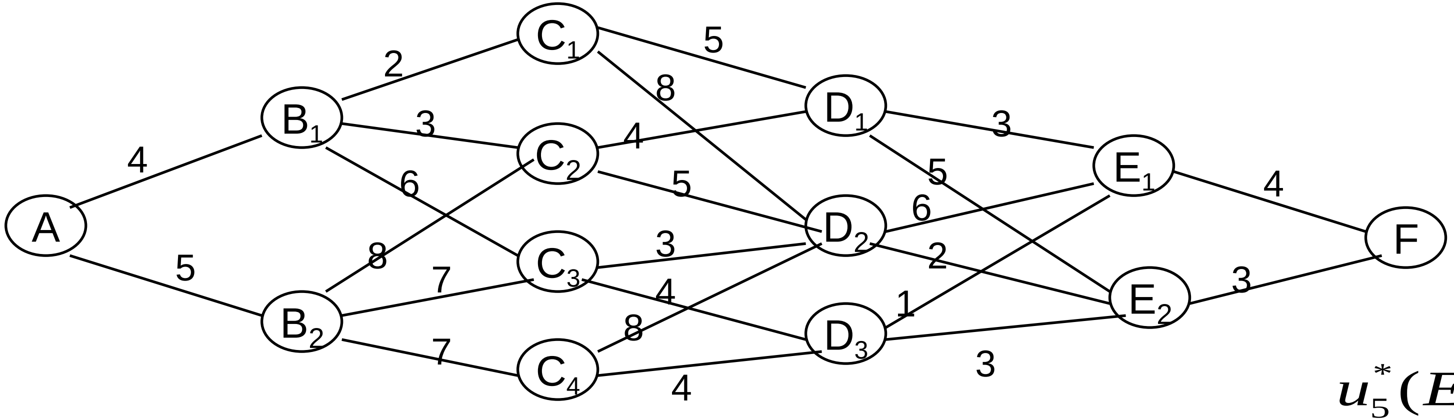
二、最短路径应用



（1）k=5 时，状态 $S_5=\{E_1, E_2\}$ 它们到F 点的距离即为最短路。

$$f_5(E_1)=4, \quad f_5(E_2)=3; \quad u_5^*(E_1)=F, \quad u_5^*(E_2)=F.$$

二、最短路径应用



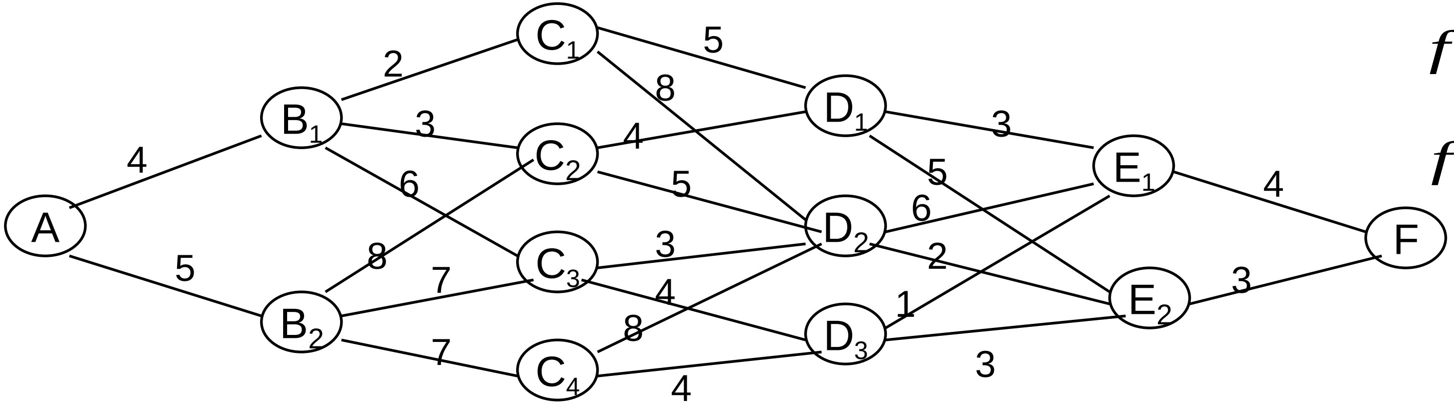
$$u_5^*(E_1)=F,$$

$$u_5^*(E_2)=F.$$

（2）k=4 时，状态 $S_4=\{D_1,D_2,D_3\}$ 它们到F 点需经过中途

点E，需一一分析从E 到 F的最短路：先说从D_1到F 的最短路有两种选择：经过E1， E2， 比较最短。

二、最短路径应用



$f_5(E_1)=4,$

$f_5(E_2)=3;$

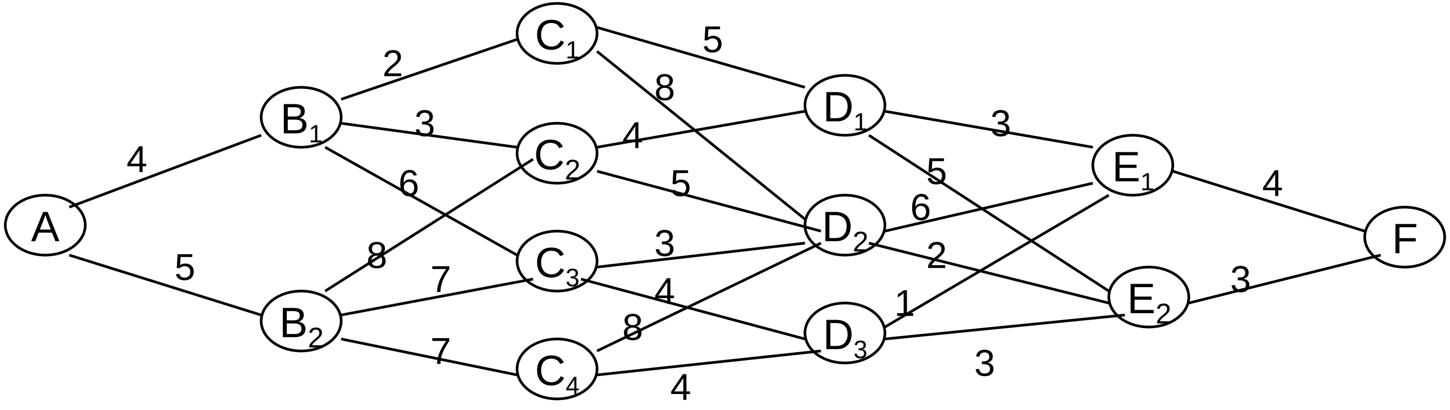
$$f_4(D_1)=\min\{d_4(D_1,E_1)+f_5(E_1),d_4(D_1,E_2)+f_5(E_2)\}$$

$$=\min\{3+4,5+3\}=7.$$

这说明由 D_1 到F 的最短距离为7，其路径为 $D_1\to E_1\to F.$

相应的决策为： $u_4^*(D_1)=E_1.$

二、最短路径应用



$$f_5(E_1)=4,$$

$$f_5(E_2)=3;$$

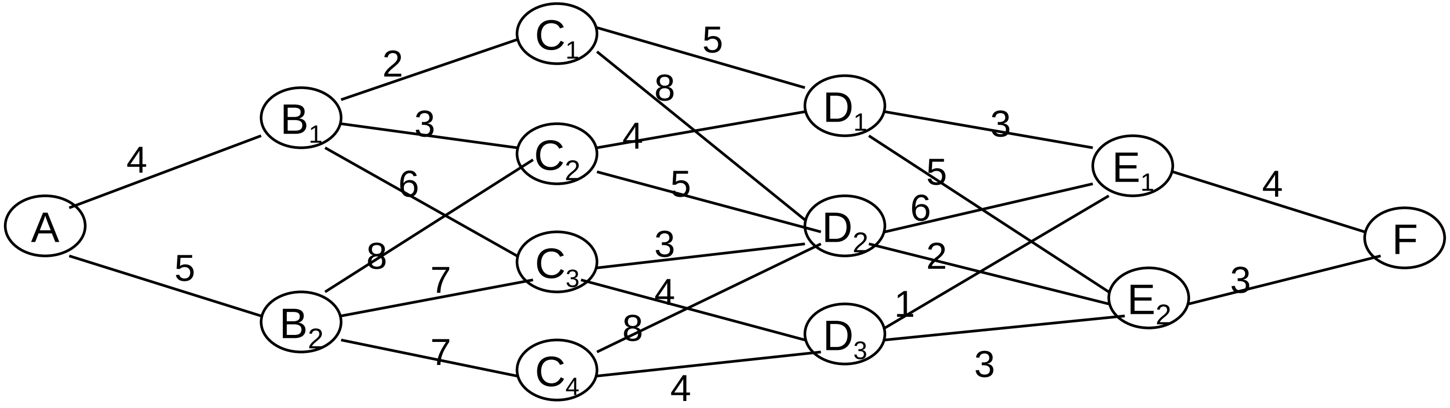
$$f_4(D_2)=\min\{d_4(D_2,E_1)+f_5(E_1),d_4(D_2,E_2)+f_5(E_2)\}$$

$$=\min\{6+4,2+3\}=5.$$

这说明由 D_2 到F 的最短距离为5，其路径为 $D_2 \to E_2 \to F.$

相应的决策为： $u_4^*(D_2)=E_2.$

二、最短路径应用



$$f_5(E_1) = 4,$$

$$f_5(E_2) = 3;$$

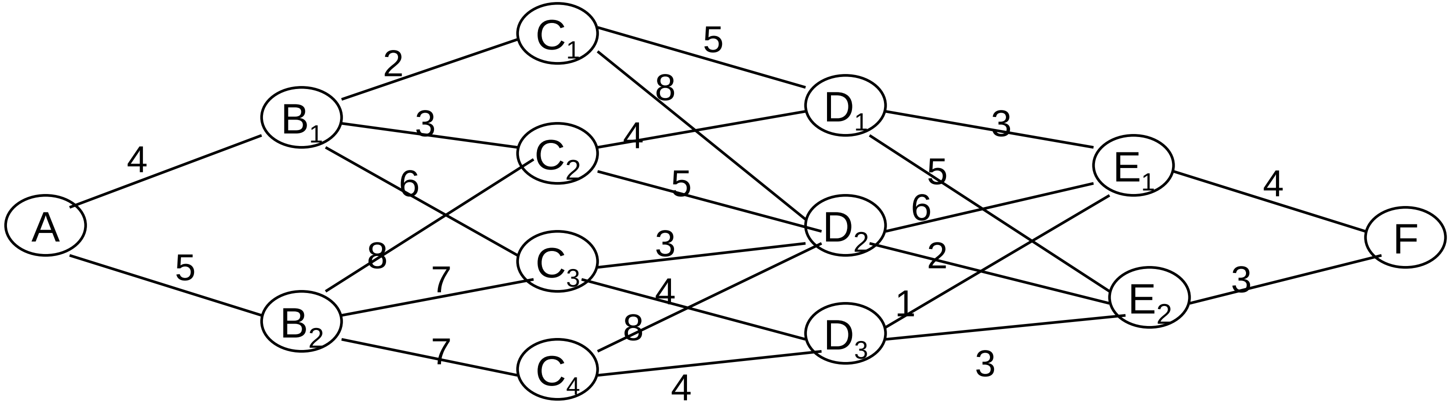
$$f_4(D_3) = \min\{d_4(D_3, E_1) + f_5(E_1), d_4(D_3, E_2) + f_5(E_2)\}$$

$$= \min\{1 + 4, 3 + 3\} = 5.$$

即 D_3 到F 的最短距离为5，其路径为 $D_2 \to E_2 \to F.$

相应的决策为： $u_4^*(D_3) = E_1.$

二、最短路径应用



$$f_4(D_1)=7$$

$$f_4(D_2)=5$$

（3）k=3 时，状态 $S_4=\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$

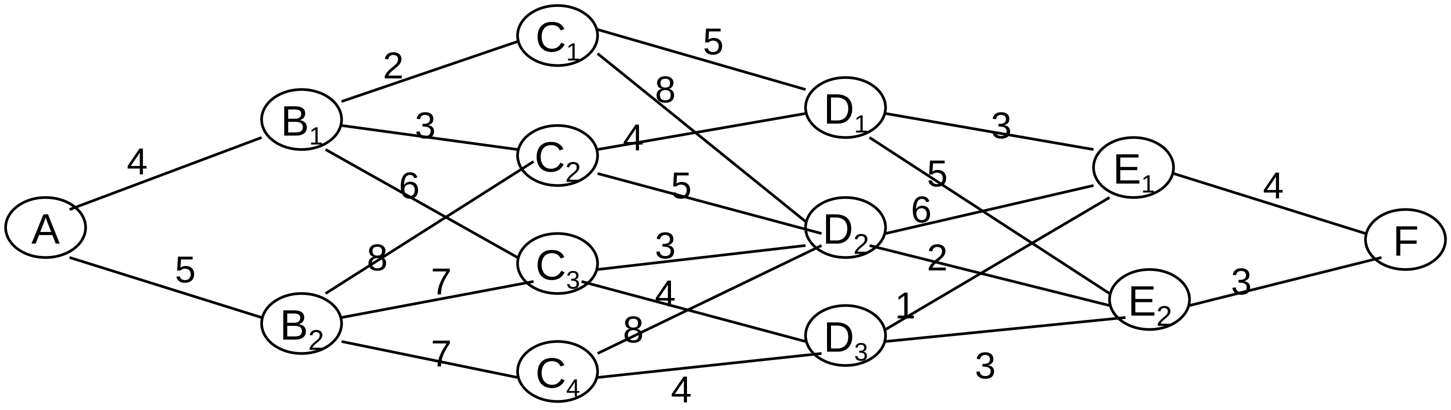
$$f_3(C_1)=\min\{d_3(C_1,D_1)+f_4(D_1),d_3(C_1,D_2)+f_4(D_2)\}$$

$$=\min\{5+7,8+5\}=12.$$

这说明由 C_1 到F 的最短距离为12，相应的决策为

$$u_3^*(C_1)=D_1.$$

二、最短路径应用



$f_4(D_1)=7$

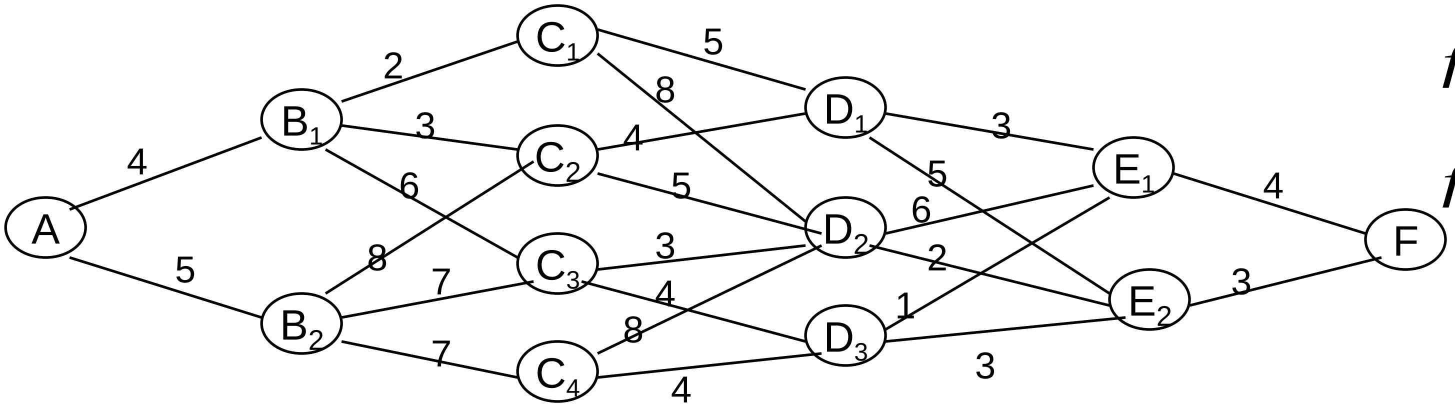
$f_4(D_2)=5$

$$f_3(C_2)=\min\{d_3(C_2,D_1)+f_4(D_1),d_3(C_2,D_2)+f_4(D_2)\}$$

$$=\min\{4+7,5+5\}=10.$$

即由 C_2 到F 的最短距离为10，相应的决策为 $u_3^*(C_2)=D_2$.

二、最短路径应用



$$f_4(D_2)=5$$

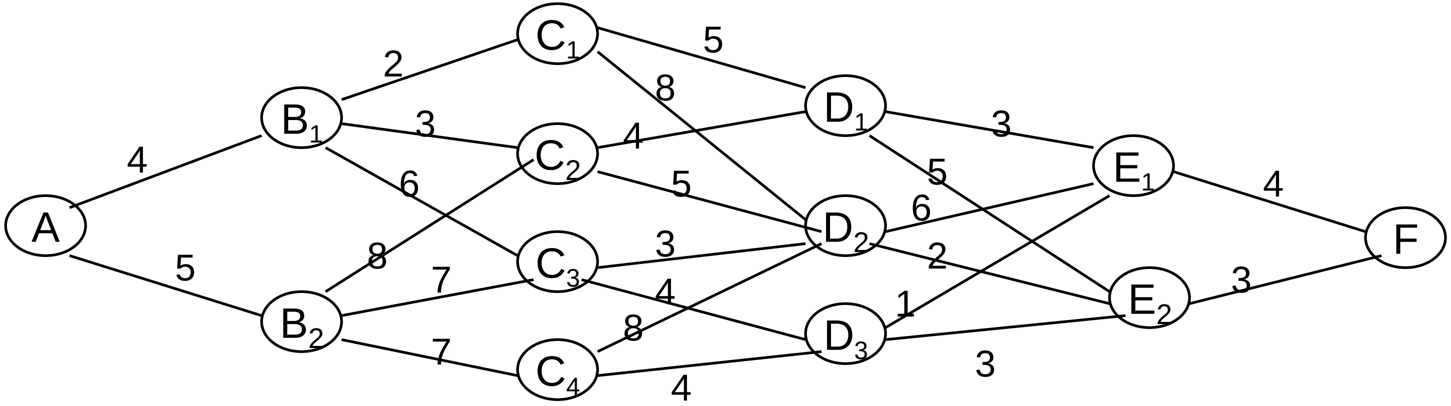
$$f_4(D_3)=5$$

$$f_3(C_3)=\min\{d_3(C_3,D_2)+f_4(D_2),d_3(C_3,D_3)+f_4(D_3)\}$$

$$=\min\{3+5,4+5\}=8.$$

即由 C_3 到F 的最短距离为8，相应的决策为 $u_3^*(C_3)=D_2.$

二、最短路径应用



$$f_4(D_2) = 5$$

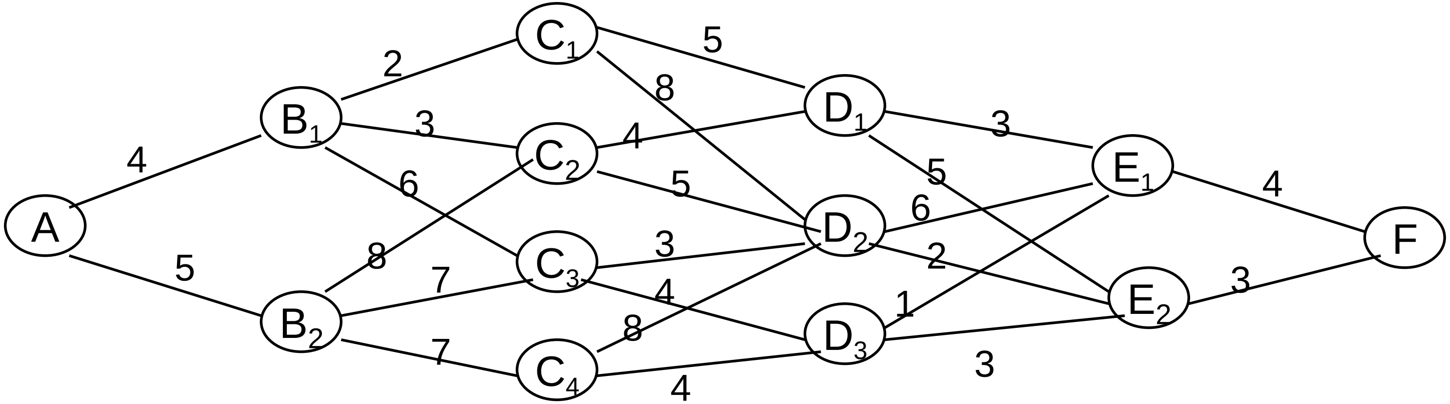
$$f_4(D_3) = 5$$

$$f_3(C_4) = \min\{d_3(C_4, D_2) + f_4(D_2), d_3(C_4, D_3) + f_4(D_3)\}$$

$$= \min\{8+5, 4+5\} = 9.$$

即由 C_4 到F 的最短距离为9，相应的决策为 $u_3^*(C_4) = D_3.$

二、最短路径应用



$$f_3(C_1)=12$$

$$f_3(C_2)=10$$

$$f_3(C_3)=8$$

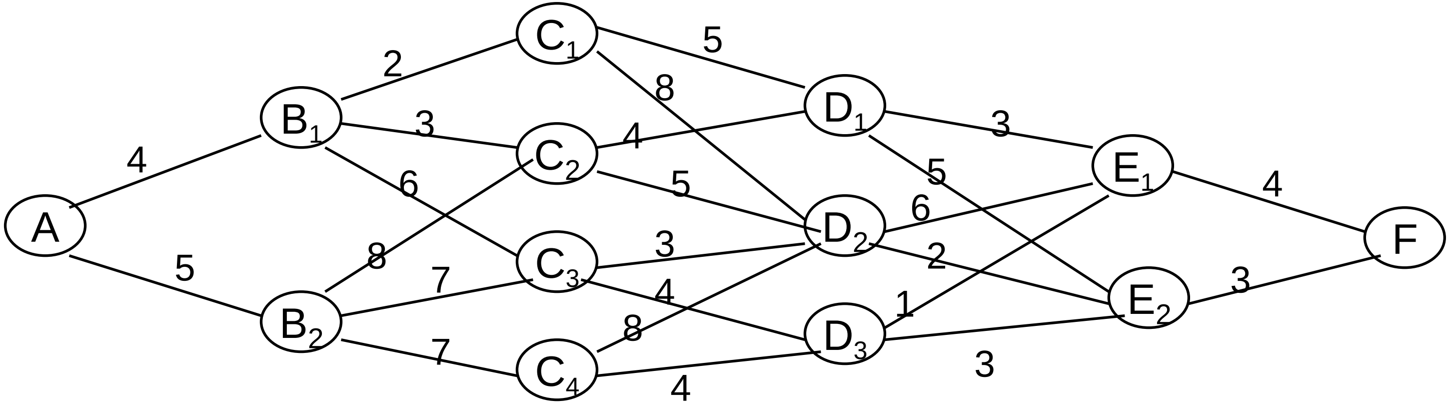
（4）k=2时，状态 $S_2=\{B_1,B_2\}$

$$f_2(B_1)=\min\{d_2(B_1,C_1)+f_3(C_1),d_2(B_1,C_2)+f_3(C_2),$$

$$d_2(B_1,C_3)+f_3(C_3)\}=\min\{2+12,3+10,6+8\}=13.$$

这说明由 B_1 到F 的最短距离为13，相应的决策为 $u_2^*(B_1)=C_2.$

二、最短路径应用



$f_3(C_1)=12$

$f_3(C_2)=10$

$f_3(C_3)=8$

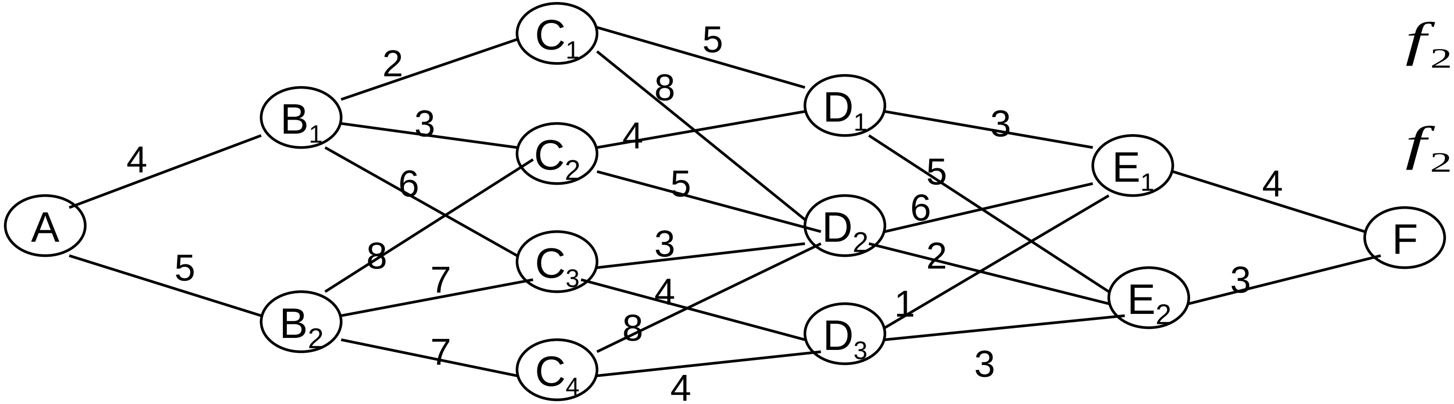
（4）k=2时，状态 $S_2=\{B_1,B_2\}$

$$f_2(B_2)=\min\{d_2(B_2,C_2)+f_3(C_2),d_2(B_2,C_3)+f_3(C_3),$$

$$d_2(B_2,C_4)+f_3(C_4)\}$$

即由 B_2到F 的最短距离为15，相应的决策为 $u_2^*(B_2)=C_3.$

二、最短路径应用



$f_2(B_1)=13$

$f_2(B_2)=15$

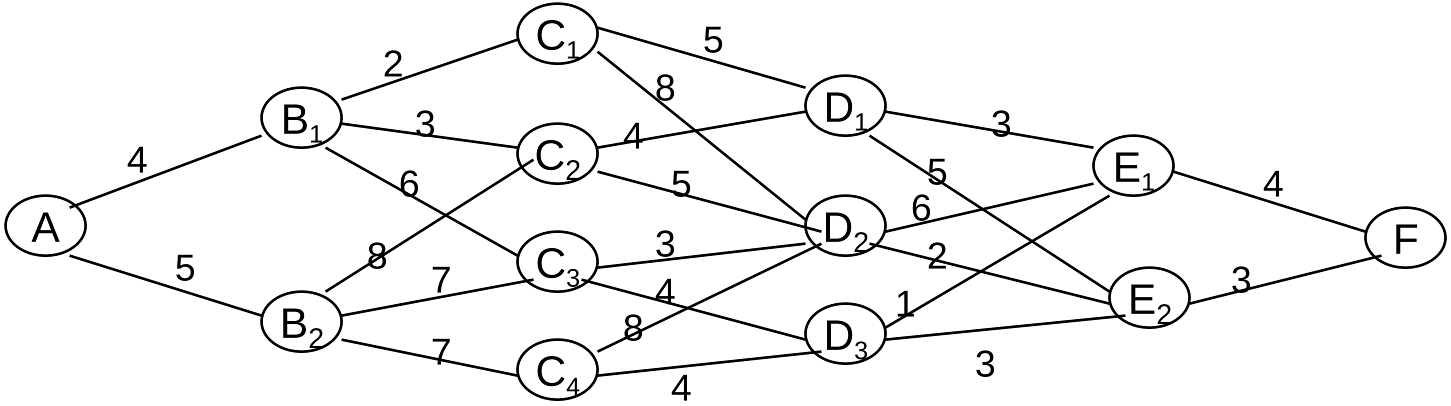
（1）k=1 时，只有一个状态点A，则

$$f_1(A)=\min\{d_1(A,B_1)+f_2(B_1),d_1(A,B_2)+f_2(B_2)\}$$

$$=\min\{4+13,5+15\}=17.$$

即由 A到F 的最短距离为17，相应的决策为 $u_1^*(A)=B_1.$

二、最短路径应用



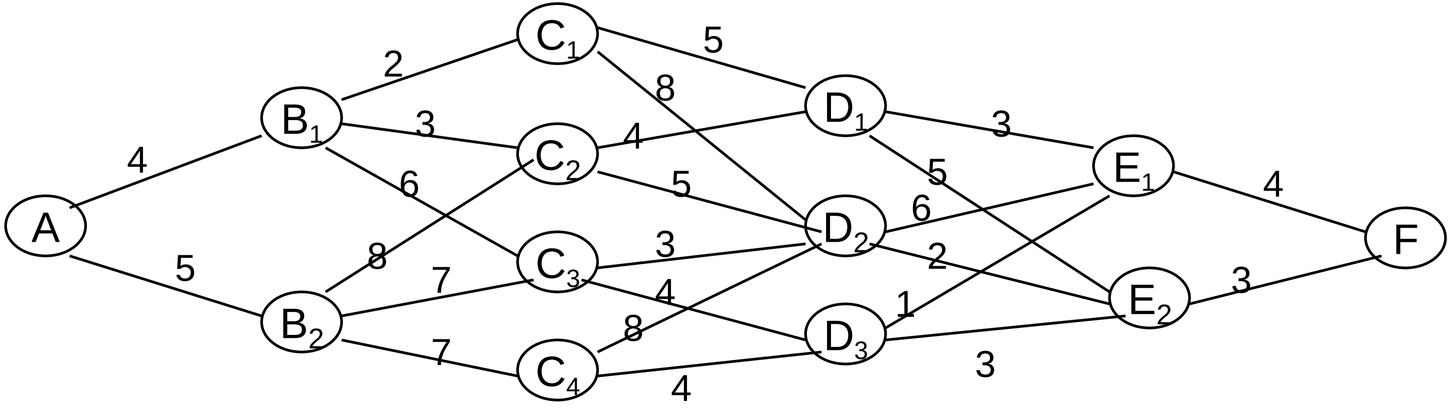
$u_5^*(E_1) = F,\quad u_4^*(D_1) = E_1.\quad u_3^*(C_1) = D_1.\ u_2^*(B_1) = C_2.\ u_1^*(A) = B_1.$

$u_5^*(E_2) = F.\quad u_4^*(D_2) = E_2.\quad u_3^*(C_2) = D_2.\, u_2^*(B_2) = C_3.$

$u_4^*(D_3) = E_1.\quad u_3^*(C_3) = D_2.$

$u_3^*(C_4) = D_3.$

二、最短路径应用



再按计算顺序反推可得最优决策序列：

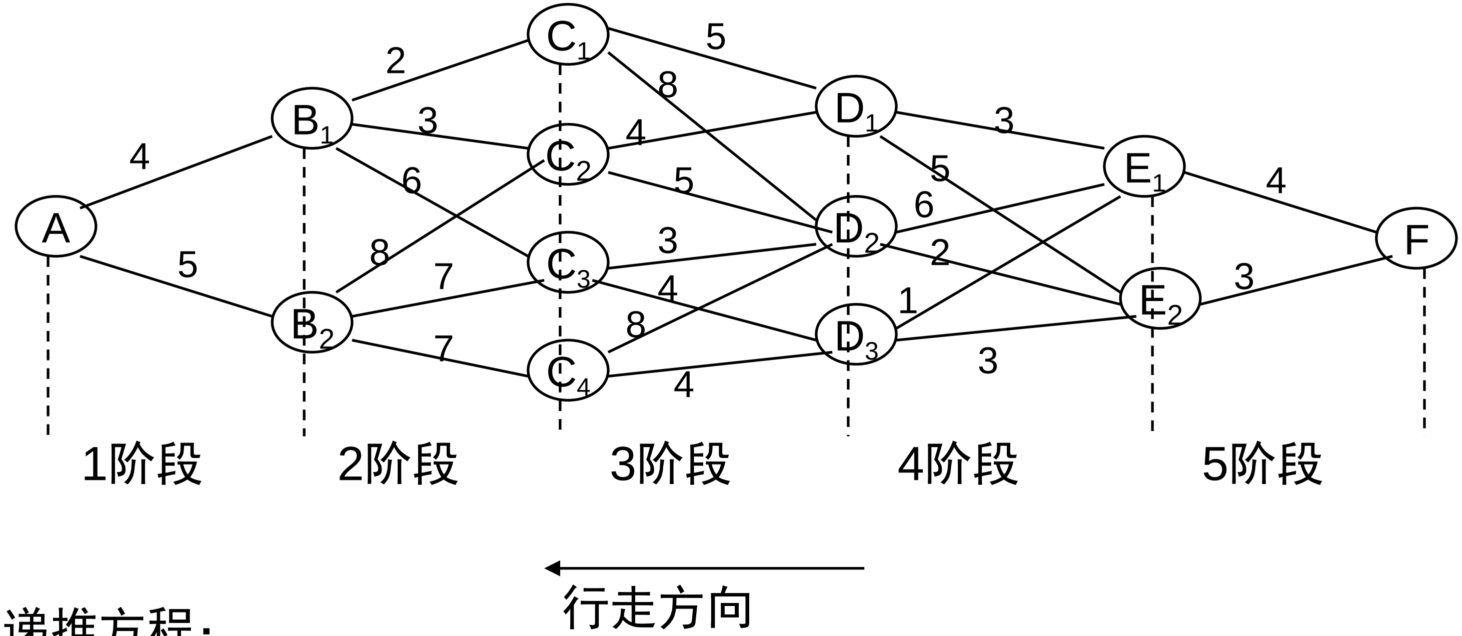
$$u_1^*(A) = B_1, \qquad u_2^*(B_1) = C_2, \qquad u_3^*(C_2) = D_2,$$

$$u_4^*(D_2) = E_2, \qquad u_5^*(E_2) = F.$$

所以最优路线为： $A \to B_1 \to C_2 \to D_2 \to E_2 \to F$

二、最短路径应用

例1：



顺序递推方程：

$$\begin{cases} f_k(s_{k+1}) = \min\limits_{u_k}\{d_k(s_{k+1}, u_k) + f_{k-1}(s_k)\} & k = 1,2,3,4,5 \\ f_0(s_1) = 0 & \text{初始条件} \end{cases}$$

二、最短路径应用

注：顺序解法与逆序解法无本质区别，一般来说，当初始状态给定时用逆序解法，当终止状态给定时用顺序解法。若问题给定了一个初始状态与一个终止状态，则两种方法均可使用。

小　　结

- 1、动态规划的基本思想
- 2、最短路径应用


谢　　谢！