运 筹 学

第五章　　动态规划的基本概念

主 要 内 容

1 动态规划的研究对象及特点

2 动态规划的基本概念与基本方程

引 言

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。该方法是由美国数学家贝尔曼（R. E. Bellman）等人在20世纪50年代初提出的。Bellman在1957年出版了《Dynamic Programming》一书，是动态规划领域中的第一本著作。

R.Bellman

一、动态规划的研究对象及特点

- 动态规划解决问题的特点是：它可以把一个n 维决策问题变换为几个一维最优化问题，从而一个一个地去解决。
- 需指出：动态规划是求解某类问题的一种方法，是考察问题的一种途径，而不是一种算法。必须对具体问题进行具体分析，运用动态规划的原理和方法，建立相应的模型，然后再用动态规划方法去求解。

一、动态规划的研究对象及特点

- 这种“分而治之，逐步调整”的方法，在一些比较难以解决的复杂问题中已经显示出优越性。经过半个世纪的发展，动态规划解决问题的方法已经广泛应用于经济、管理、军事、生物、工程等诸多领域，并取得了很好效果。

一、动态规划的研究对象及特点

动态规划的研究对象：多阶段决策问题

—最短路问题

—资源分配问题

—生产调度问题

—设备更新问题

—库存问题

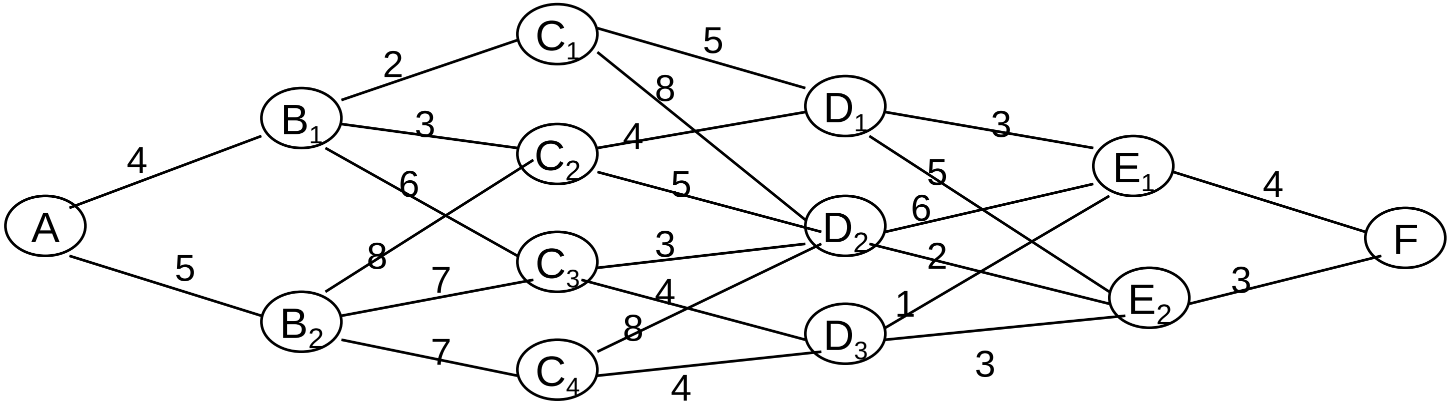
—背包问题

一、动态规划的研究对象及特点

- **所谓多阶段决策问题是**是动态决策问题的一种特殊形式；在多阶段决策过程中，系统的动态过程可以按照时间进程分为状态相互联系而又相互区别的各个阶段；每个阶段都要进行决策，目的是使整个过程的决策达到最优效果。

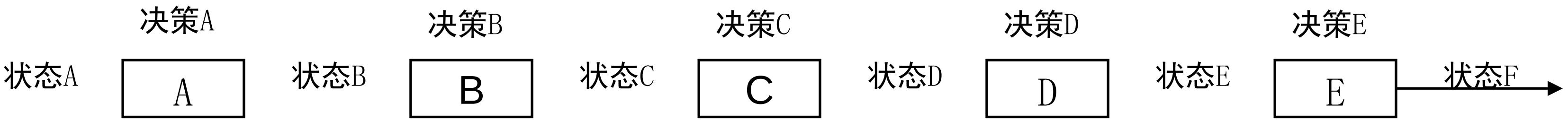
一、动态规划的研究对象及特点

例1　给定一个线路网络，两点之间连线上的数字表示两点间距离。试求一条由A到F的部队机动路线，使总距离最短？



动态规划是解决多阶段决策问题的一种方法。

一、动态规划的研究对象及特点



当每一阶段的决策选定以后，就构成一个决策序列，称为一个策略，它对应着一个确定的效果。多阶段决策问题就是寻找使此效果最好的策略。

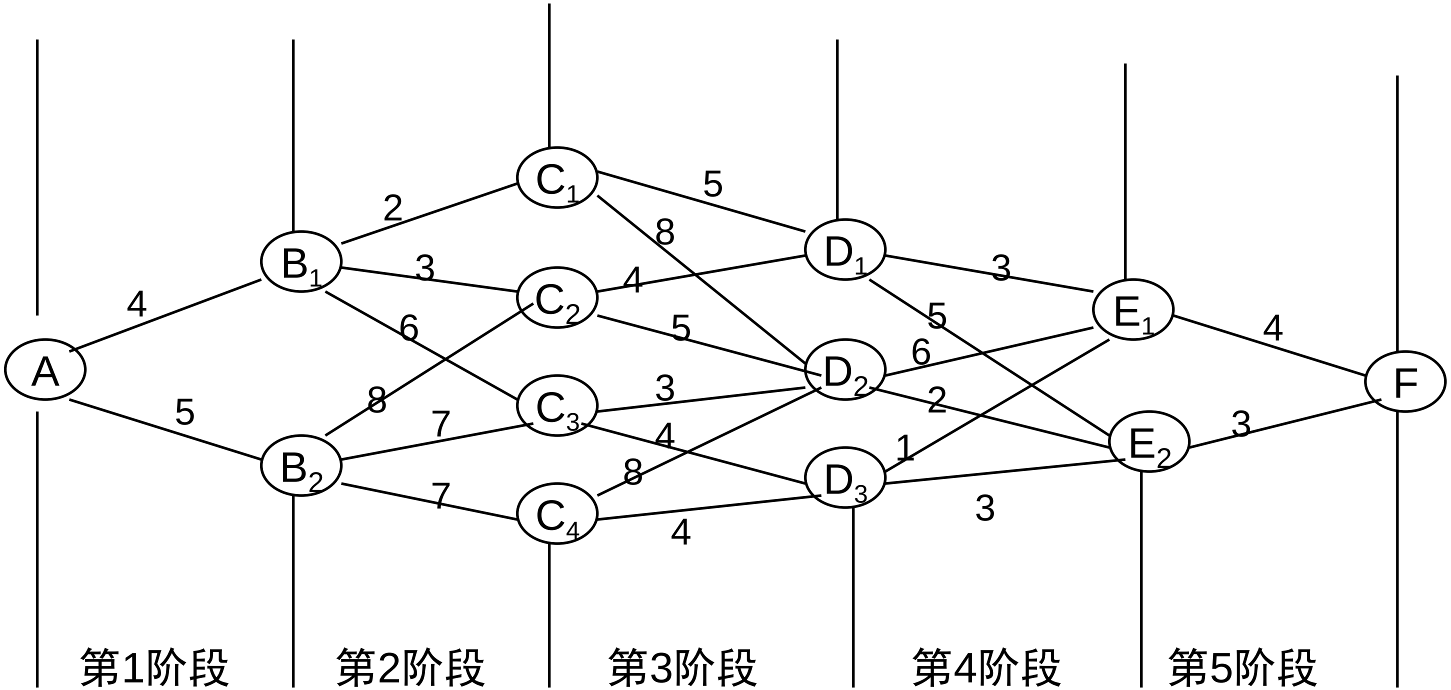
二、 动态规划的基本概念与原理

基本概念

1. 阶段：是指问题需要做出决策的步数。阶段总数常记为n，相应的是n个阶段的决策问题。阶段的序号常记为k，称为阶段变量，k=1, 2, …, n. k即可以是顺序编号也可以是逆序编号，常用顺序编号。

S_k

二、 动态规划的基本概念与原理

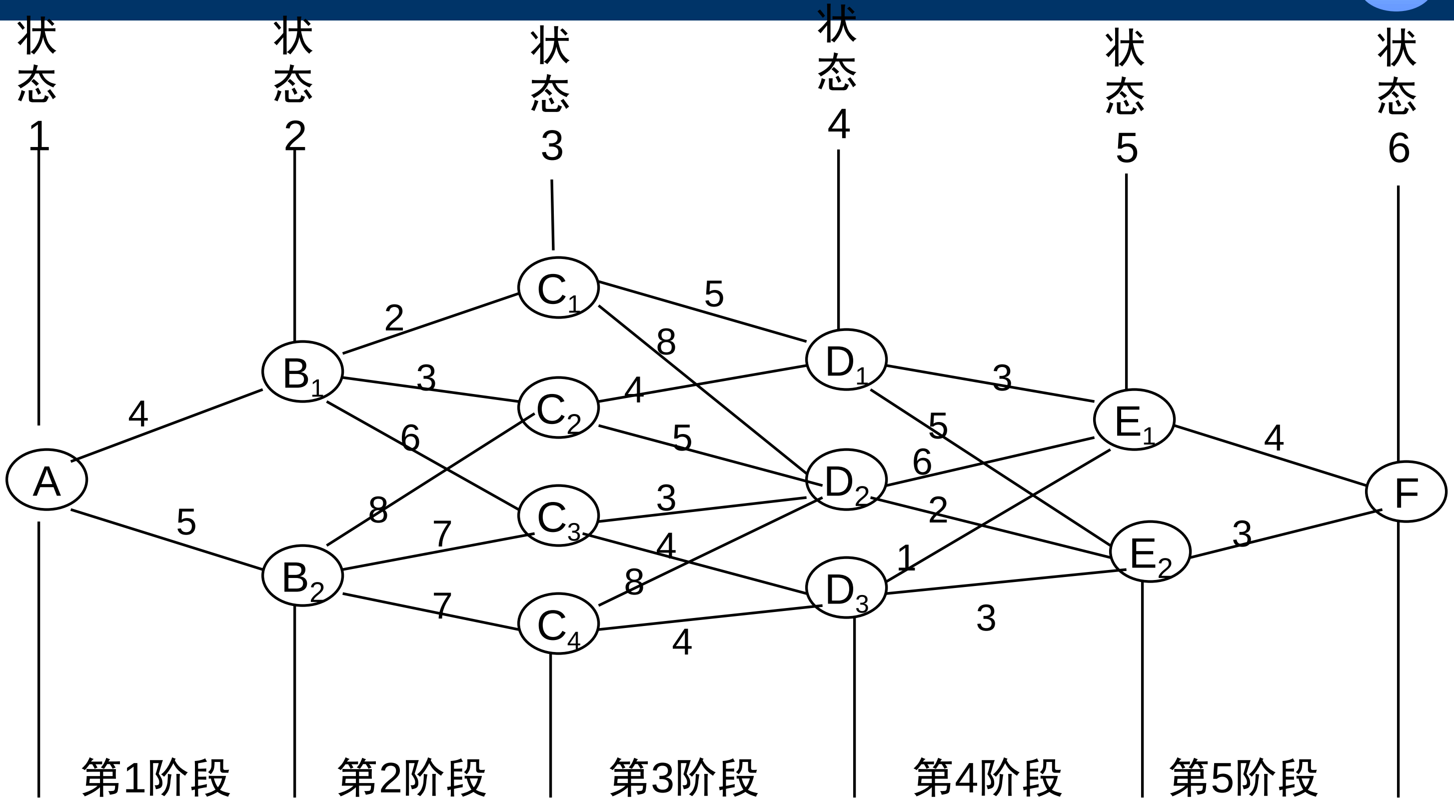


二、 动态规划的基本概念与原理

2. 状态：各阶段开始时的客观条件，第k阶段的状态常用状态变量 s_k 表示，状态变量取值的集合成为状态集合，用 S_k 表示。

例如，例1中， $S_1=\{A\}, S_2=\{B_1, B_2\}.$

二、 动态规划的基本概念与原理



二、 动态规划的基本概念与原理

3.决策：是指从某阶段的某个状态出发，在若干个不同方案中做出的选择。表示决策的变量，称为决策变量，用 $u_k(s_k)$ 表示

例如： $u_3(C_2)=D_1$ 表示走到C阶段，当处于C2 路口时，下一步奔D1.

决策变量允许的取值范围称为允许决策集合，第k阶段状态为时的允许决策集合记为 $D_k(s_k)$例如： $D_2(B_1)=\{C_1,C_2,C_3\}$

二、 动态规划的基本概念与原理

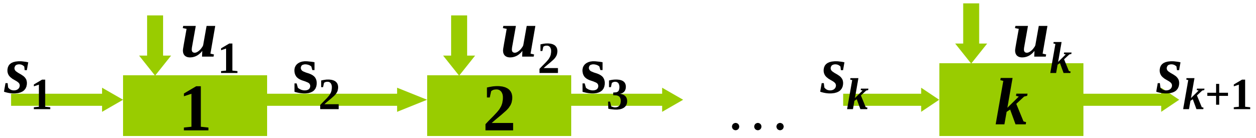
4. 状态转移方程：是从上一阶段的某一状态值转变为下一阶段某一状态值的转移规律，用

$$s_{k+1}=T_k(s_k,u_k)$$ 表示。

状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。如果第k阶段状态变量s_k的值、该阶段的决策变量一经确定，第$k+1$阶段状态变量s_{k+1}的值也就确定。

二、 动态规划的基本概念与原理

图示如下：



能用动态规划方法求解的多阶段决策过程是一类特殊的多阶段决策过程，即具有无后效性的多阶段决策过程。

二、 动态规划的基本概念与原理

无后效性(马尔可夫性)

如果某阶段状态给定后，则在这个阶段以后过程的发展不受这个阶段以前各段状态的影响； 过程的过去历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展；构造动态规划模型时，要充分注意是否满足无后效性的要求；状态变量要满足无后效性的要求。

二、 动态规划的基本概念与原理

5.指标函数：分阶段指标函数和过程指标函数。**在不同的问题中，指标函数的含义是不同的，它可能是距离、利润、成本、产量或资源消耗等。**

阶段指标函数是指第k阶段从状态 s_k 出发，采取决策u_k时的效益，用表示 $v_k(s_k,u_k)$

过程指标函数从第k阶段的某状态出发，采取子策略

$$p_{kn}=\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_n\}$$

时所得到的阶段效益之和：

$$V_{kn}(s_k,p_{kn})=\sum_{j=k}^{n}v_j(s_j,u_j)$$

二、 动态规划的基本概念与原理

最优指标函数：表示从第k阶段状态为 s_k 时采用最佳策略 p_{kn}^* 到过程终止时的最佳效益。记为

$$f_k(s_k) = V_{kn}(s_k, p_{kn}^*) = \underset{p_{kn} \in D_{kn}(s_k)}{opt} V_{kn}(s_k, p_{kn})$$

二、 动态规划的基本概念与原理

其中 opt 可根据具体情况取max 或min。

基本方程：此为逐段递推求和的依据，一般为：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{u_k \in D_k(s_k)}{opt} [v_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})] & k = n, n-1, \cdots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

式中opt 可根据题意取 max 或 min.

二、 动态规划的基本概念与原理

例如，例1的基本方程为：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \min\limits_{u_k}\{d_k(s_k,u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \quad k = 5,4,3,2,1 \\ f_6(s_6) = 0 \end{cases}$$

最优性原理：最优策略的子策略必为最优。不管过去的状态和决策如何，从眼下直到最后的诸决策必构成最优子策略。

小　结

- 1、动态规划的研究对象及特点

- 2、动态规划的基本概念与基本方程

谢　谢！