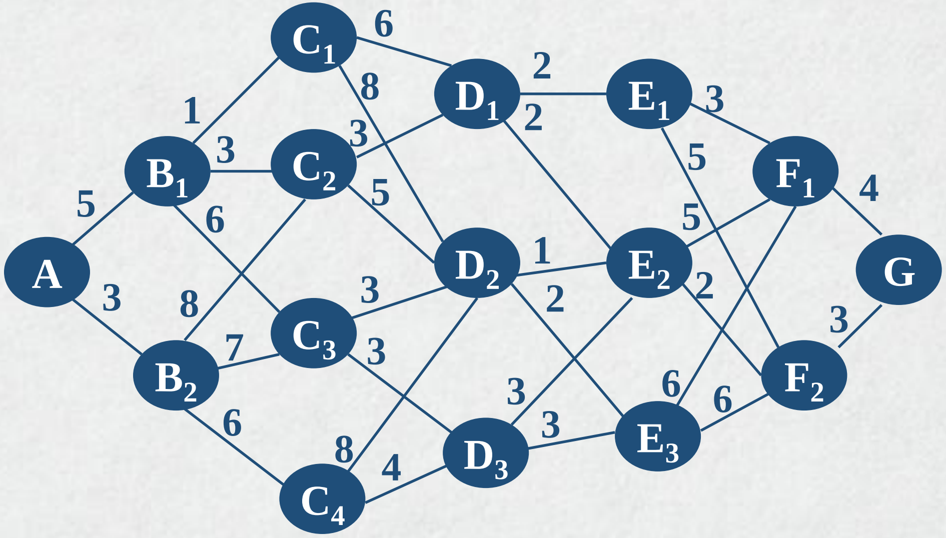
动态规划的基本方程和最优性原理

例1:最短路问题：如图给定一个线路网络，两点之间连线上的数字表示两点间的距离(或费用)。试求一条从A到G的铺管线路，使总距离最短(或总费用最小)。



从A点到G点可分成6个阶段。以A为起点，终点有两个B_1、B_2，有两个选择。若选择B_2，则B_2为第一阶段决策的结果。同时它又是第二阶段的开始状态。当每个阶段做出决策的结果，直接影响到后面的选择和决策的结果。

最短路线有一个重要特性：

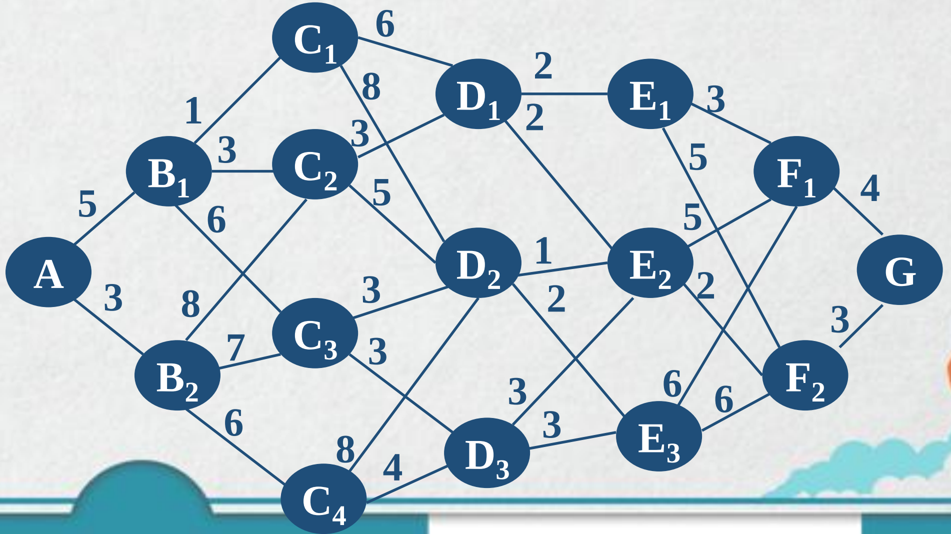
如果从起点A经过C_2点和D_1点到达终点G是一条最短的路线，则由C_2 点经过D_1 点到达G点的这条子路线，是由C_2 点出发到达G点所有路线中的最短路线。

寻找最短路线的方法，从最后一段开始，由后向前逐步推进，找出各点到G点的最短路线，最后就能确定一条从A点到G点的最短路线。

阶 段 6			
本阶段始点（状态）	本阶段各终点（决策） G	到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
F_1	4	4	G
F_2	3	3	G

最短路线$F_1 \rightarrow G$

最短路线$F_2 \rightarrow G$

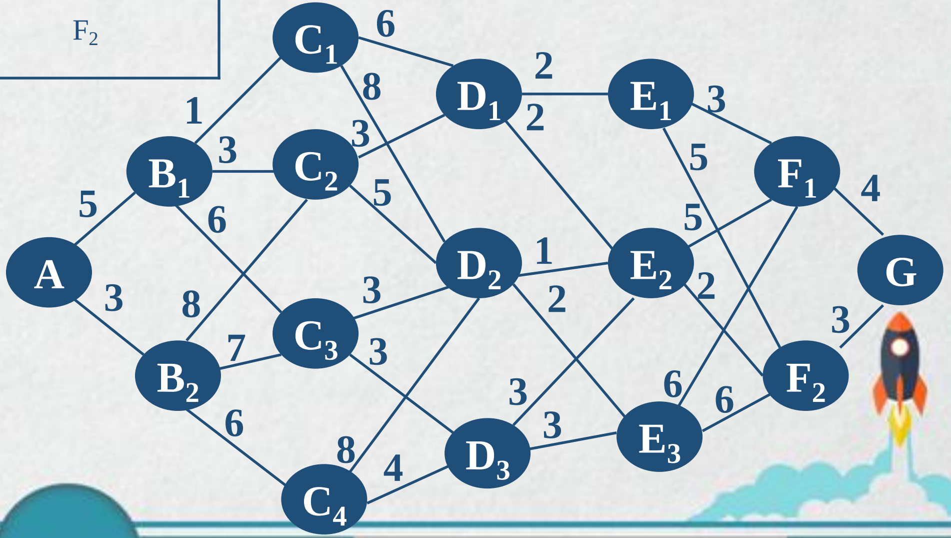


阶段5				
本阶段始点（状态）	本阶段各终点（决策）		到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
	F_1	F_2		
E_1	3+4=7	5+3=8	7	F_1
E_2	5+4=9	2+3=5	5	F_2
E_3	6+4=10	6+3=9	9	F_2

最短路线$E_1 \to F_1 \to G$

最短路线$E_2 \to F_2 \to G$

最短路线$E_3 \to F_2 \to G$



阶 段 4					
本阶段始点(状态)	本阶段各终点（决策）			到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
	E_1	E_2	E_3		
D_1	2＋7＝9	2＋5＝7		7	E_2
D_2		1＋5＝6	2＋9＝11	6	E_2
D_3		3＋5＝8	3＋9＝12	8	E_2

最短路线$D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$

最短路线$D_2 \to E_2 \to F_2 \to G$

最短路线$D_3 \to E_2 \to F_2 \to G$

阶 段 3					
本阶段始点(状态)	本阶段各终点（决策）			到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
	D_1	D_2	D_3		
C_1	6+7=13	8+6=14		13	D_1
C_2	3+7=10	5+6=11		10	D_1
C_3		3+6=9	3+8=11	9	D_2
C_4		8+6=14	4+8=12	12	D_3

$C_1 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$　　$C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$

$C_3 \to D_2 \to E_2 \to F_2 \to G$　　$C_4 \to D_3 \to E_2 \to F_2 \to G$

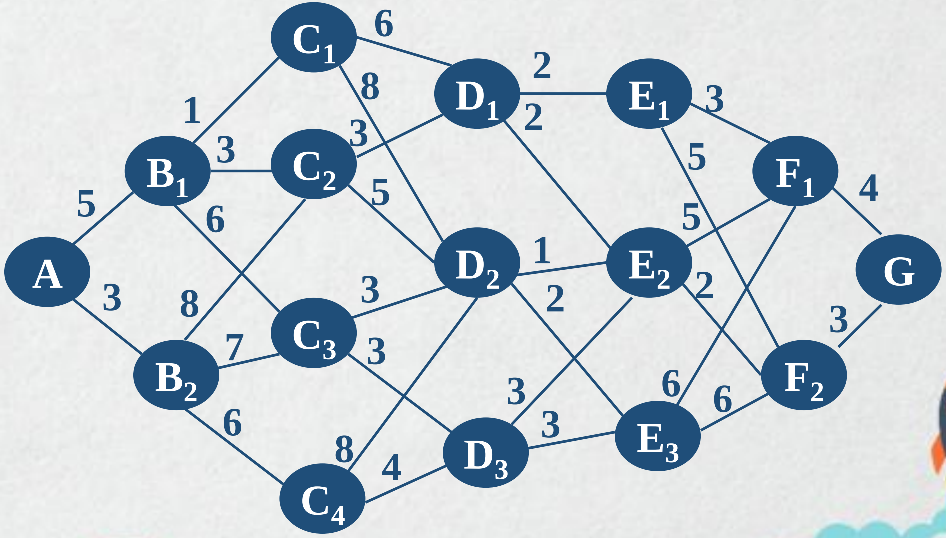
阶 段 2						
本阶段始点(状态)	本阶段各终点（决策）				到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
	C_1	C_2	C_3	C_4		
B_1	1+13=14	3+10=13	6+9=15		13	C_2
B_2		8+10=18	7+9=16	6+12=18	16	C_3

$$B_1 \to C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$$

$$B_2 \to C_3 \to D_2 \to E_2 \to F_2 \to G$$

阶段1				
本阶段始点（状态）	本阶段各终点（决策）		到G点的最短距离	本阶段最优终点（最优决策）
	B_1	B_2		
A	5+13=18	3+16=19	18	B_1

$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$



基本方程 ：通常动态规划问题的最优值函数满足递推关系式。

设过程指标函数为各阶段指标函数的和的形式，即$V_{k,n} = \sum v_j(s_j,u_j)$，则有

$f_k(s_k) = opt \{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$

$\boldsymbol{u_k \in D_k(s_k) \quad (k = n,n-1,\ldots,1)}$ 递推方程

为了递推方程有递推起点,需要确定一个初始条件,即边界条件。

递推方程和边界条件一起称为动态规划基本方程.

一般当指标函数值是各阶段指标函数值的和时，取$f_{n+1}(S_{n+1})=0$；当指标函数值是各阶段指标函数值的乘积时，取$\boldsymbol{f_{n+1}(S_{n+1})=1}$。当然也有例外的情况。

若过程指标函数为和的形式，则有基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = opt\ \{v_k(s_k,u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ u_k \in D_k(s_k) \qquad (k=n,n-1,\dots,1) & \text{递推方程} \\ f_{n+1}(s_{n+1})=0 & \text{边界条件} \end{cases}$$

若过程指标函数为积的形式，则有基本方程:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = opt\ \{v_k(s_k,u_k)*f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ u_k \in D_k(s_k) \qquad (k=n,n-1,\dots,1) & \text{递推方程} \\ f_{n+1}(s_{n+1})=1 & \text{边界条件} \end{cases}$$

可根据边界条件，从k=n开始，由后向前逆推，逐步求得各阶段的最优决策和相应的最优值，最后求出$f_1(s_1)$时，就得到整个问题的最优解。

动态规划的基本思想:

1、动态规划方法的关键在于正确地写出基本的递推关系式和恰当的边界条件（简称基本方程）。

2、在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一段和未来一段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。因此，每段决策的选取是从全局来考虑的，与该段的最优选择答案一般是不同的。

3、在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每段的决策都是该段状态的函数，故最优策略所经过的各段状态便可逐段变换得到，从而确定了最优路线。

最优化原理：作为整个过程的最优策略具有这样的性质：无论过去的状态和决策如何，相对于前面的决策所形成的状态而言，余下的决策序列必然构成最优子策略。”也就是说，一个最优策略的子策略也是最优的。

（三）、建立动态规划模型的步骤

1、划分阶段

划分阶段是运用动态规划求解多阶段决策问题的第一步，在确定多阶段特性后，按时间或空间先后顺序，将过程划分为若干相互联系的阶段。对于静态问题要人为地赋予“时间”概念，以便划分阶段。

2、正确选择状态变量S_k

选择变量既要能确切描述过程演变又要满足无后效性，而且各阶段状态变量的取值能够确定。一般地，状态变量的选择是从过程演变的特点中寻找。

3、确定决策变量U_k及允许决策集合D_k

通常选择所求解问题的关键变量作为决策变量，同时要给出决策变量的取值范围，即确定允许决策集合。

4、确定状态转移方程$S_{k+1}=T_k(S_k,U_k)$

根据k阶段状态变量和决策变量，写出$k+1$阶段状态变量，状态转移方程应当具有递推关系。

5、正确写出指标函数$V_{k,n}$的关系，它应满足下面三个性质：

- $V_{k,n}$是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数
- 具有可分离性，并满足递推关系，即
- $V_{k,n}(S_k,U_k,S_{k+1},\ldots\ldots S_{n+1})=\varphi_k[S_k,U_k,V_{k+1,n}(S_{k+1},U_{k+1},S_{n+1})]$
- 函数φ_k（S_k，U_k ，$V_{k+1,n}$）对于变量$V_{k+1,n}$要严格单调。

6、恰当地定义最优指标函数

阶段指标函数是指第k 阶段的收益，最优指标函数是指从第k 阶段状态出发到第n 阶段末所获得收益的最优值。

7、写出恰当的边界条件 ，从边界条件开始，逐段递推寻优，在每一个子问题的求解中，均用了它前面的子问题的最优化结果，依次进行，最后一个子问题所得的最优结果，就是这个问题的最优解，并找到相应的最优策略。

- 动态规划模型分类

变量＼过程	确定	随机
离散	离散确定型	离散随机型
连续	连续确定型	连续随机型