

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ "КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ"
для ИУ9 и ФН12, лектор Четвериков В. Н.

1. Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши–Римана. Голоморфные функции.
2. Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.
3. Дробно–линейные функции, их конформность и групповое свойство.
4. Дробно–линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.
5. Дробно–линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.
6. Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно–линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.
7. Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в \mathbb{C} . Его свойства.
8. Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей.
9. Интегральная формула Коши для функции и ее производных.
10. Степенные ряды в \mathbb{C} , их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.
11. Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.
12. Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.
13. Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.
14. Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
15. Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеристизация в терминах рядов Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.

16. Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.
17. Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки ∞ . Вычет в бесконечности.
18. Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.
19. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.
20. Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана–Шварца, принцип соответствия границ и обратный принцип соответствия границ.
21. Вычисление несобственных интегралов с использованием вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.
22. Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.
23. Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.
24. Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.

Типовые задачи

- 1) Вычислите контурный интеграл.
- 2) Найдите все особые точки функции. Определите их характер и вычеты в них. Найдите вычет в бесконечно удалённой точке.
- 3) Вычислите интеграл, используя вычет относительно бесконечно удаленной точки.
- 4) Отобразить заданную область на верхнюю полуплоскость при помощи конформного отображения.
- 5) Методами операционного исчисления найдите решение задачи Коши.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 1971:

задачи 241, 267, 272, 288, 373, 524, 541.

Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 2002. - 312 с.:

задачи 2.167, 4.117, 4.118.

Типовой вариант

1. Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши–Римана. Голоморфные функции. (6 баллов)

2. Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение. (6 баллов)

3. Вычислите контурный интеграл: $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z dz}{1-z^2}$. (7 баллов)

4. Отобразить полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/2$, на верхнюю полуплоскость при помощи конформного отображения. (7 баллов)