

# Комплексный анализ, ФН-12, ИУ-9, 4-й семестр.

## Ответы на вопросы к экзамену

Весна 2024

### Содержание

1	Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции.	4
2	Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.	7
3	Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.	9
4	Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.	12
5	Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.	14
6	Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.	17
7	Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$ . Его свойства.	20
8	Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей	23
9	Интегральная формула Коши для функции и ее производных.	25
10	Степенные ряды в $\mathbb{C}$ , их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.	28
11	Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.	31
12	Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.	33
13	Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.	37
14	Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.	39
15	Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеристикация в терминах ряда Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.	43

16 Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.	48
17 Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки $\infty$ . Вычет в бесконечности.	52
18 Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.	57
19 Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.	61
20 Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана-Шварца, принцип соответствия границ с обратным принципом соответствия границ.	64
21 Вычисление несобственных интегралов с использованием вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.	66
22 Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.	69
23 Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.	72
24 Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.	74

# 1 Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голomorphic функции.

ФКП  $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  непрерывна в точке  $z_0$ , если:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ФКП  $f(z)$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $z_0 \Leftrightarrow$

1.  $f$  определена в окрестности точки  $z_0$ ;
2.  $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$ ,

где  $A \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha(\Delta z) \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$

Предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$  называют производной ФКП  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначают  $f'(z_0)$ .

**Теорема (1-ый критерий  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости):**

ФКП  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$

$\Leftrightarrow$

$\exists$  производная  $f'(z_0)$  функции  $f$  в точке  $z_0$ , при этом  $f'(z_0) = A$ .

*Доказательство.*

” $\Rightarrow$ ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta z)) = A \quad (\alpha(\Delta z) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists f'(z_0) = A. \end{aligned}$$

” $\Leftarrow$ ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \\ \alpha(\Delta z) &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z. \end{aligned}$$

□

Функция  $w = f(z)$  называется **голоморфной (аналитической)** в точке  $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f - \mathbb{C}$  – дифференцируема в окрестности точки  $z_0$ .

### Теорема (об условиях Коши-Римана):

Функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $z = x + iy$ ,  $\mathbb{C}$  – дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда:

1. Функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$   $\mathbb{R}^2$  – дифференцируемы в точке  $M_0(x_0, y_0)$ ;
2. Выполняются условия (уравнения) Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) \end{cases}$$

При этом  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$ .

*Доказательство.*

” $\Rightarrow$ ”

$\Delta f(z_0, \Delta z) = A\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z$ , но при этом:

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) =$$

$$= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \gamma(\Delta z)\Delta z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) \\ \Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z), \end{cases}$$

где  $\frac{\gamma(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|} \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  ( $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ ), так как

$\gamma(\Delta z) \rightarrow 0$ , а  $\frac{\Delta z}{|\Delta z|}$  – ограничена при  $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \\ \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow 1);$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \alpha = v'_y \\ u'_y = -\beta = -v'_x \end{cases} \Rightarrow 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f'_z = \alpha + i\beta \Rightarrow \Rightarrow f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \\ & \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ .” Аналогично

□

## 2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.

Пусть задана кривая  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ , имеющая касательную в точке  $t_0$  с направляющим вектором  $\xi = x'(t_0) + iy'(t_0)$ . Назовем  $\xi$  касательным вектором в точке  $t_0$  к кривой  $z$ .

**Теорема (геометрический смысл комплексной производной):**

1. Любая голоморфная в т.  $z_0 = z(t_0)$  функция  $f$  определяет линейное отображение касательных касательных векторов  $\eta = f'(z_0)\xi$ , где  $\eta$  – образ касательного вектора  $\xi$ , являющийся касательным вектором к кривой  $f(z)$  в точке  $f(z_0)$ .
2. Это отображение касательных векторов состоит в растяжении с коэффициентом  $|f'(z_0)|$  и повороте на угол  $\arg f'(z_0)$ .

□ а) По правилу дифференцирования сложной функции (в смысле  $\mathbb{R}^2$ )

$$\eta = \frac{df(z(t))}{dt}(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)\xi$$

б)  $|\eta| = |f'(z_0)| \cdot |\xi|$  – растяжение с коэффициентом  $|f'(z_0)|$ ;  
 $\arg \eta = \arg f'(z_0) + \arg \xi \pm 2\pi$  – поворот на угол  $\arg f'(z_0)$ . ■

Отображение  $F$  называется **конформным** в точке  $M_0(x_0, y_0)$  тогда и только тогда, когда касательное отображение в точке  $M_0$  сохраняет углы.

Отображение  $F$  называется **конформным** в области  $U \subset \mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда оно конформно в любой из точек  $U$ .

$U \subset \mathbb{C}$ ,  $H(U)$  – множество голоморфных в  $U$  функций.

**Теорема (о связи конформности и дифференцируемости):**

$U$  – область в  $\mathbb{C}$ . Если  $f \in H(U)$  и  $\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0$ , тогда  $f$  – конформное в  $U$  отображение.

□ Доказательство следует из предыдущей теоремы:

В каждой точке  $z_0 \in U$  лин.отображение  $f'(z_0)$  растигивает в  $|f'(z_0)| \neq 0$  и поворачивает на угол  $\arg f'(z_0) \Rightarrow$  лин.отображение в  $z_0$  сохраняет углы.



**Определение:** Угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $\infty$  равен углу между касательными к  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$  в точке 0, где  $\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{\gamma_1}$  и  $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{\gamma_2}$ .

Отображение  $F$  называется **конформным** в точке  $\infty$  тогда и только тогда, угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $\infty$  равен углу между кривыми  $f(\gamma_1)$  и  $f(\gamma_2)$  в точке  $\infty$ .

### 3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

**Конформность:**

Любое ДЛО — конформное отображение  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

*Доказательство.*

1) Рассмотрим точки  $z_0 \neq -\frac{d}{c}, \infty$  :

$$\text{Тогда } w' = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Значит функция  $w$  голоморфна в точках  $z_0$  и по теореме о конформности голоморфных отображений, она конформна в этих точках  $z_0$ .

2) Рассмотрим точку  $z_0 = -\frac{d}{c}$  :

$$z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d} \xrightarrow{L_0} \xi = \frac{1}{w}$$

$$-\frac{d}{c} \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L_0} 0$$

Отображение  $\xi = \frac{1}{w}$  сохраняет углы, то есть  $L_0$  конформно.



Рассмотрим  $L_0 \circ L$  в точке  $z_0 = -\frac{d}{c}$ :

$$(L_0 \circ L)'_{|z=-\frac{c}{d}} = \frac{cb - ad}{(az + b)^2}_{|z=-\frac{c}{d}} \neq 0$$

Значит отображение  $L_0 \circ L$  конформно в точке  $z_0 = -\frac{c}{d}$ .  
 $L = L_0^{-1} \circ (L_0 \circ L)$  конформно, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.

3) Рассмотрим точку  $z_0 = \infty$ :

$$\xi = \frac{1}{z} \xleftarrow{L_0} z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$0 \xleftarrow{L_0} \infty \xrightarrow{L} \frac{a}{c}$$

Рассмотрим отображение  $L \circ L_0^{-1}$ :

$$w = \frac{a \cdot \frac{1}{\xi} + b}{c \cdot \frac{1}{\xi} + d} = \frac{b \cdot \xi + a}{d \cdot \xi + c}$$

$$w'_{|0} = \frac{dc - da}{(d \cdot \xi + c)^2}_{|\xi=0} \neq 0$$

Значит отображение  $L \circ L_0^{-1}$  конформно в точке  $\xi_0 = 0$ .

Тогда отображение  $L = (L \circ L_0^{-1}) \circ L_0$  конформно в точке  $z_0 = \infty$ , так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.  $\square$

### Групповое свойство ДЛО:

Совокупность всех ДЛО  $\Lambda$  образует некоммутативную группу  $(\Lambda; \circ)$  относительно операции композиции.

*Доказательство.*

0) Замкнутость:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad \xi = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$$

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_1 \cdot \frac{az+b}{cz+d} + b_1}{c_1 \cdot \frac{az+b}{cz+d} + d_1} = \frac{a_1(az+b) + b_1(cz+d)}{c_1(az+b) + d_1(cz+d)} = \\ &= \frac{(a_1a + b_1c)z + a_1b + b_1d}{(c_1a + d_1c)z + c_1b + d_1d}\end{aligned}$$

Определитель  $\begin{vmatrix} a_1a + b_1c & a_1b + b_1d \\ c_1a + d_1c & c_1b + d_1d \end{vmatrix}$  не равен 0, так как иначе композиция ДЛО была бы отображением в одну точку, но композиция биекций есть биекция.

1) Ассоциативность выполняется, так как композиция отображений ассоциативна

2) Существование единицы:

$$E : w = z, \begin{pmatrix} a=1 & b=0 \\ c=0 & d=1 \end{pmatrix}, \det = 1 \neq 0$$

3) Существование обратного:

Пусть  $L : w = \frac{az+b}{cz+d}$  — ДЛО.

Построим обратное:

$$w(cz+d) = az+b$$

$$z(wc-a) = b-dw$$

$$L^{-1} : z = \frac{b-dw}{wc-a} \text{ — ДЛО, так как } \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$$

4) Некоммутативность:

Приведем контрпример

$$L_1 : w = z + a, \quad L_2 : w = \frac{1}{z}$$

$$L_1 \circ L_2 : z \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z} \xrightarrow{L_1} w = \frac{1}{z} + a$$

$$L_2 \circ L_1 : z \xrightarrow{L_1} w = z + a \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z+a}$$

Получили, что  $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$

□

#### 4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

**Геометрическая интерпретация:** ДЛО — взаимно-однозначное непрерывное отображение  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

##### **Теорема о трех точках**

Для любых трех различных точек  $z_1, z_2, z_3$  и других трех различных точек  $w_1, w_2, w_3$  существует единственное ДЛО  $L(z) : L(z_i) = w_i$

##### **Доказательство**

1) *Существование*

Для любых 3-х точек  $z_1, z_2, z_3$  существует ДЛО, отображающее их в  $0, \infty, 1$  соответственно:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Тогда рассмотрим отображения  $L_1 : \xi = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$  и  $L_2 :$

$\xi = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$ . Из группового свойства ДЛО следует, что  $L_2^{-1}$  — тоже ДЛО, и композиция ДЛО — тоже ДЛО. Тогда

получаем, что отображение  $L = L_2^{-1} \circ L_1$  есть ДЛО, причем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то есть  $L$  есть искомое ДЛО.

2) *Единственность* Пусть  $\lambda$  – ДЛО, отличное от  $L$ , построенного в пункте 1, удовлетворяющее условиям теоремы.

Рассмотрим отображение  $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$ . Из группового свойства ДЛО полученное отображение – ДЛО, причем

$$\mu : \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Теперь покажем, что  $\mu = id$ :

$$\mu = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$a) \mu(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$$

$$b) \mu(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$c) \mu(1) = \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d$$

В итоге получаем, что  $\mu(z) = z \Rightarrow \mu = id$ , то есть  $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = id \Rightarrow \lambda = L_2^{-1} \circ L_1 = L$ , что и требовалось доказать.

## 5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

### Круговое свойство ДЛО

Любое ДЛО преобразует обобщенную окружность (окружность и ли прямая в  $\overline{\mathbb{C}}$ ) в обобщенную окружность.

*Доказательство.*

1) случай, когда  $c = 0$ :

$$L : w = az + b$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = az \xrightarrow{L_2} z_2 = z_1 + b$$

$L_1$  — растяжение с поворотом: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

$L_2$  — сдвиг: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

2) случай, когда  $c \neq 0$ :

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \frac{a}{c} + \frac{caz + bz - acz - ad}{c(cz + d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

$$\text{Обозначим } A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c}, \quad C = \frac{d}{c} :$$

$$L : w = A + \frac{B}{z + C}$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = z + C \xrightarrow{L_2} z_2 = \frac{1}{z_1} \xrightarrow{L_3} z_3 = B \cdot z_2 \xrightarrow{L_4} w = A + z_3$$

Отображения  $L_1$  и  $L_4$  — сдвиги,  $L_3$  — растяжение с поворотом. Они переводят окружности в окружности, а прямые в прямые.

Рассмотрим отображение  $L_2 : w = \frac{1}{z}$

Общее уравнение обобщённой окружности на плоскости  $xOy$ :

$$E(x^2 + y^2) + F_1x + F_2y + G = 0$$

$$E, F_1, F_2, G \in \mathbb{R}, (E, F_1, F_2, G) \neq (0, 0, 0, 0)$$

Запишем это уравнение через переменную  $z = x + iy$ :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = i \frac{\bar{z} - z}{2}$$

$$Ez\bar{z} + F_1 \frac{z + \bar{z}}{2} + F_2 i \frac{\bar{z} - z}{2} + G = 0$$

$$Ez\bar{z} + Fz + \bar{F}\bar{z} + G = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}iF_2 \in \mathbb{C}, \bar{F} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}iF_2$$

Тогда кривая, полученная в результате преобразования  $L_2$  задается уравнением:

$$E \frac{1}{z} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + F \frac{1}{z} + \bar{F} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + G = 0 \mid \cdot z\bar{z}$$

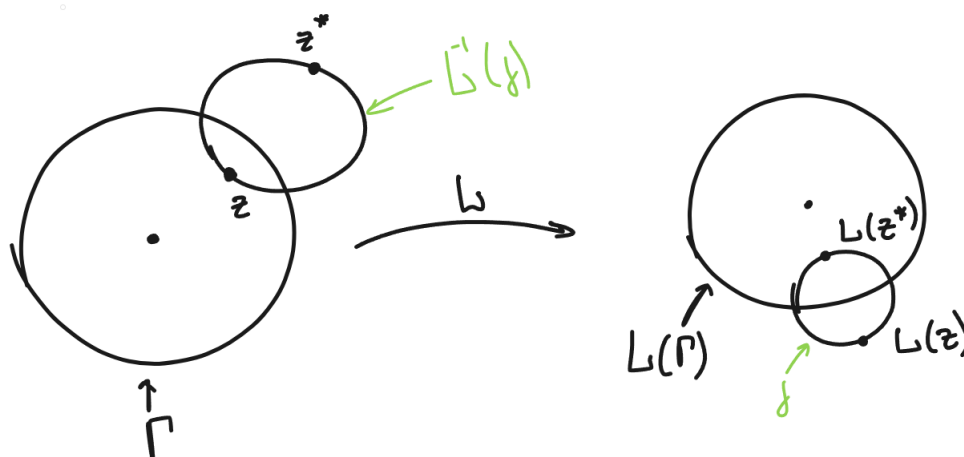
$$E + F\bar{z} + \bar{F}z + Gz\bar{z} = 0,$$

что является уравнением обобщенной окружности. Значит отображение  $L_2$  переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность.  $\square$

### Свойство ДЛО сохранения симметричности

Произвольное ДЛО  $L$  преобразует любые точки  $z$  и  $z^*$ , симметричные относительно обобщенной окружности  $\Gamma$ , в точки

$L(z)$  и  $L(z^*)$ , симметричные относительно обобщенной окружности  $L(\Gamma)$ .



*Доказательство.*

Пусть  $\gamma$  — произвольная обобщенная окружность, проходящая через точки  $L(z)$  и  $L(z^*)$ . Тогда  $L^{-1}(\gamma)$  — обобщенная окружность по круговому свойству ДЛО.

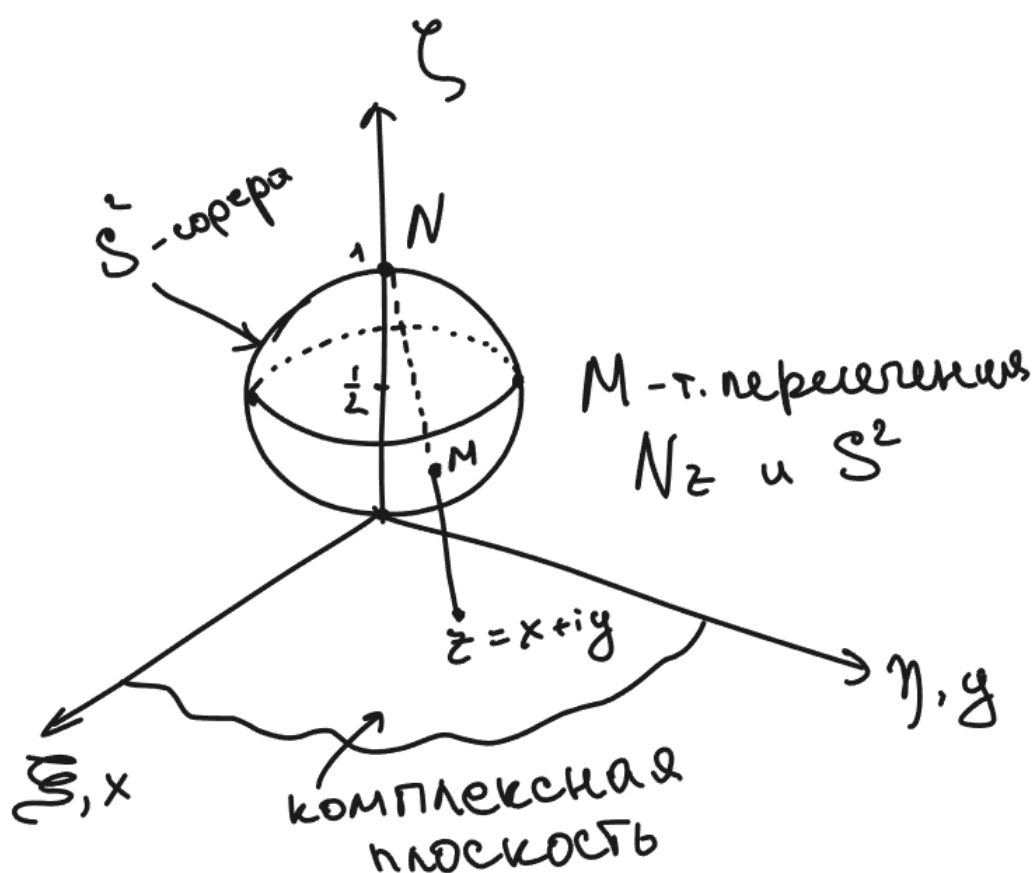
Так как  $L(z), L(z^*) \in \gamma$ , то:

$$L^{-1}(L(z)) = z \in L^{-1}(\gamma) \text{ и } L^{-1}(L(z^*)) = z^* \in L^{-1}(\gamma).$$

По определению симметричных точек окружности  $\Gamma$  и  $L^{-1}(\gamma)$  ортогональны. ДЛО  $L$  сохраняет углы, а значит  $L(\Gamma)$  ортогональна  $L(\gamma)$ .  $\square$

**6 Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.**

Выберем ДСК с осями  $\xi, \eta, \zeta$ , причем оси  $\xi, \eta$  совпадают с осями  $x, y$ . Рассмотрим сферу радиуса  $\frac{1}{2}$  в этой системе коор-



динат, которая описывается уравнением

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



а также луч, исходящий из точки  $N(0, 0, 1)$ , и пересекающий плоскость  $0xy$  в точке  $(x, y)$ , заданный параметрически:

$$\begin{cases} \xi = 0 + tx \\ \eta = 0 + ty \\ \zeta = 1 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Точка пересечения луча со сферой  $(\xi, \eta, \zeta)$  (подставляем в уравнение сферы уравнения луча):

$$\begin{aligned} t^2 x^2 + t^2 y^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ t^2(x^2 + y^2 + 1) - t &= 0 \quad | : t \neq 0 \\ t &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2} \\ \begin{cases} \xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Обратное отображение:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{|z|^2 + 1 - 1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta \\ \Rightarrow \xi &= x(1 - \zeta), \eta = y(1 - \zeta) \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{\xi}{1 - \zeta} \\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Отображения (3) и (4) являются однозначными отображениями между  $\mathbb{C}$  и  $S^2 \setminus N$ , так как в преобразованиях не возникали неоднозначности.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .  $\overline{\mathbb{C}}$  называется **расширенной комплексной плоскостью**.

**Топология  $\overline{\mathbb{C}}$ :**

Открытое множество на  $S^2 - U \cap S^2$ , где  $U$  – открытое в  $\mathbb{R}^3$ .

Условимся, что точке  $N(0, 0, 1)$  соответствует точка  $\infty$  поля  $\overline{\mathbb{C}}$ , тем самым определяется биекция между  $S^2$  и  $\overline{\mathbb{C}}$ , точка  $\infty$  называется **бесконечно удаленной точкой**.

**Окрестностью**  $U$  бесконечно удаленной точки называется множество точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > R, R \in \mathbb{R}$$

Функция  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$ , **дифференцируема в точке  $\infty$** , если функция  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  дифференцируема в нуле.

Функция  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$ , **конформна в точке  $\infty$** , если функция  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  конформна в нуле.

## 7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$ . Его свойства.

**Путь** – параметризованная кривая, возможно с самопересечением (непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ).

Пусть  $\gamma$  – гладкий путь, то есть  $\gamma : z = z(t), t \in J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, z(t) \in \mathbb{C}, z(J) \subset \mathbb{C}$ , функция  $f(z)$  определена на  $z(J)$  и функция

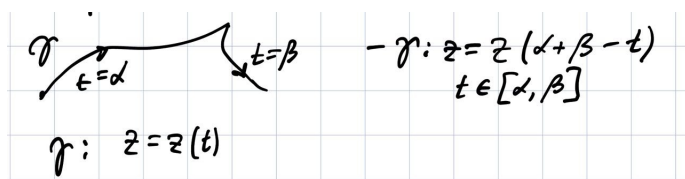
$f(z(t)) : J \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна (говорят, что  $f$  непрерывна на  $\gamma$ ).

Число  $\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt$  называют **интегралом от функции  $f$  вдоль пути  $\gamma$**  и обозначают  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , где  $z(t) = x(t) + iy(t), z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

**Свойства интеграла:**

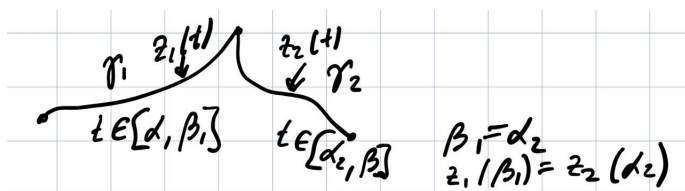
1. Линейность:  $\int_{\gamma} [af(z) + bf(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} f(z) dz;$

2. Ориентированность:



$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

3. Аддитивность:



$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : z = \begin{cases} z_1(t), t \in [\alpha, \beta_1]; \\ z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz;$$

4. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой:

Пусть  $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\gamma_1 : z = z_1(\tau), \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$  – два непрерывно дифференцируемых пути,  $z_1(\tau) = z(t(\tau)) \forall \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ , где  $t = t(\tau) : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha, \beta]$  – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция,  $f$  непрерывна на  $\gamma$ .

Тогда 
$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz;$$

5. Оценка интеграла:

Если  $f$  – непрерывная функция на кусочно-гладком пути

$$\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta], \text{ то } \left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |z'(t)| dt$$

(  $|z'(t)| dt = |dz|$  – дифференциал длины дуги).

*Доказательство.*

4. Независимость интеграла:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt =$$

$$\left| t = t(\tau), dt = t'(\tau) d\tau, \frac{dz(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz(t(\tau))}{dt} \right|$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(z))) \cdot z'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(\tau)) z'(\tau) d\tau = \int_{\gamma_1} dz$$

5. Оценка интеграла:

Пусть 
$$I = \int_{\gamma} f dz \in \mathbb{C} = |I| \cdot \exp^{i\theta}$$

$$|I| = \exp^{-i\theta} \cdot I = \int \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t) dt$$

Обозначим  $g(t) = \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t)$ .

$$\text{Тогда } |I| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} g(t) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\exp^{-i\theta}| \cdot |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt$$

□

## 8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей

### Теорема 1 (Коши для односвязной области)

Если  $D \subset \mathbb{C}$  – односвязная область,  $f \in H(D)$  ( $f$  голоморфна),  $\gamma \subset D$  – замкнутая кривая, то  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

*Доказательство.*

Для случая, когда  $f'(z)$  непрерывная в  $D$ :

$$z = x + iy; f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$I = \int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot$$

$$[x'(t) + it'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} [u \cdot x' - v \cdot y'] + i(uy' + vx') dt = \int_{\alpha}^{\beta} (ux' -$$

$$vy') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (uy' + vx') dt = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx =$$

Разрежем  $\gamma$  на простые контуры  $\gamma_i$ :

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j, G_j - \text{область внутри } \gamma_j$$

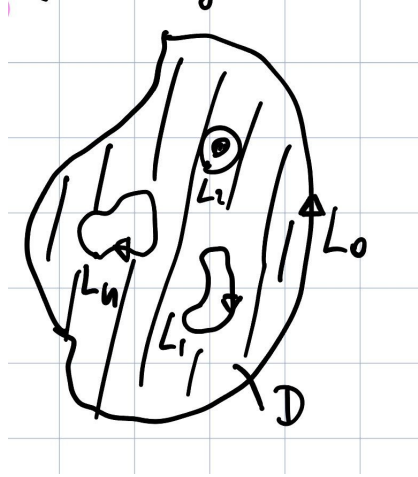
$$I = \sum_{j=1}^k \left[ \oint_{\gamma_j} u dx - v dy + i \oint_{\gamma_j} v dx + u dy \right] =$$

$$= \sum_j \left[ \iint_{G_j} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{G_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0$$

□

### Теорема 2 (Коши для многосвязной области)

Пусть многосвязная область  $D$  ограничена внешним конту-



ром  $L_0$  и внутренними контурами  $L_1, \dots, L_n$ , контуры  $L_1, \dots, L_n$  – кусочно-гладкие,  $f \in H(D \cup L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n)$ .

Тогда  $\int_L f dz = 0$ , где  $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n$ , обход  $L_0$  – против часовой стрелки,  $L_1, \dots, L_n$  – по часовой стрелке.

**Замечание.**  $\oint_{L_0} f dz = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} f dz$ , где обход  $L_0, L_1, \dots, L_n$  против часовой стрелки.

*Доказательство.*

С помощью разрезов  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  получим односвязную область  $D^*$ . Тогда  $D = D^* \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ .

Так как  $D^*$ –односвязная, то  $0 = \int_{D^*} f dz =$

Граница  $D^* = L_0 \cup \gamma_1 \cup -\gamma_1 \cup L_1 \cup \dots \cup \gamma_n \cup -\gamma_n \cup L_n$ .

Тогда из аддитивности и ориентированности:

$$= \int_{L_0} f dz + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\gamma_i} f dz + \int_{-\gamma_i} f dz + \int_{L_i} f dz \right] = \int_L f dz = 0 \quad \square$$

## 9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных.

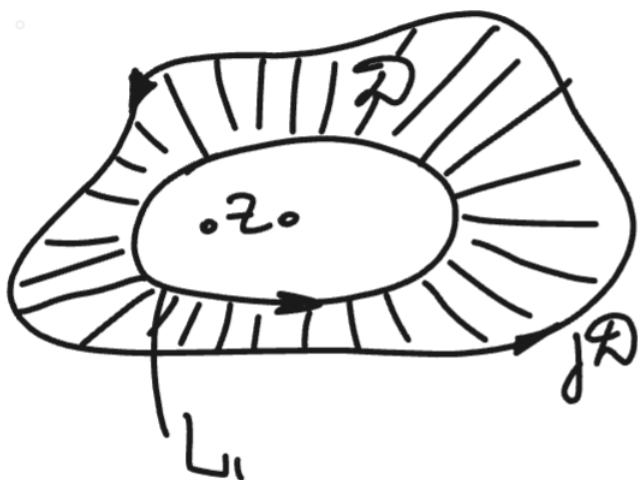
**Интегральная формула Коши для голоморфных функций:**

Пусть  $D$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ ,  $\partial D$  — граница  $D$ ,  $f \in H(D \cup \partial D)$ .

Тогда для  $z_0 \in D$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*Доказательство.*



1) Пусть  $L_1$  — простой контур,  $L_1 \subset D$

Пусть  $D_1$  — область внутри  $L_1$ ,  $G = D \setminus D_1 \setminus L_1$  — многосвязная область

По т. Коши для многосвязной области:

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

т.к.  $\frac{f(z)}{z - z_0} \in H(G)$

Имеем  $\partial G = \partial D \cup (-L_1)$ :



$$\oint \partial D \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

2) Пусть  $\gamma : z = z + r \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi], r > 0$   
 $f(z) = (z - a)^n; n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} (a + r \cdot e^{it} - a)^n \cdot r \cdot i e^{it} dt = r^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \text{ где } L_1 - \text{окр-ть с центром в точке } z_0$$

3) Пусть  $\sigma_1$  – радиус  $L_1$  и  $L_1 \subset D$

$$I = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi|i|} \oint_{L_1} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |z'(t)| dt$$

4) Так как  $f \in H(D)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Имеем  $z \in L_1 : |z - z_0| = \sigma_1$ :

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\sigma_1} : \oint_{L_1} |z'(t)| dt - \text{длина } L_1, \text{ то есть } 2\pi\sigma_1$$

Тогда  $I \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma_1} \cdot 2\pi\sigma_1 = \varepsilon \Rightarrow$  не зависит от  $\varepsilon$

□

### Интегральная формула Коши для производных:

Пусть  $f \in H(D) : G \cup \partial G \subset D; D$  — область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых,  $z_0 \in G$

Тогда:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

*Доказательство.*

По теоремам о разложении голоморфной функции в степенной ряд и теореме о единственности разложения в степенной ряд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \oint_{\gamma_r} \dots = \oint_{\gamma_G} \quad \square$$

## 10 Степенные ряды в $\mathbb{C}$ , их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  — **степенной** ряд,  $c_n \in \mathbb{C}$ .

### Свойства:

#### 1. Теорема Абеля:

Если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  сходится в точке  $z_1$ , то этот ряд сходится в круге  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$  и на любом компакте  $K \subset U$  он сходится равномерно.

#### 2. Теорема Коши-Адамара:

Пусть для ряда  $A : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  имеем  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ , где  $0 \leq R \leq \infty$ .

Тогда в любой точке  $z : |z - z_0| < R$  ряд сходится и в любой точке  $z : |z - z_0| > R$  ряд расходится.

### Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$   $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ .

Тогда  $S \in H(U_R(z_0))$  и  $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$  (\*)

*Доказательство.*

$r : 0 < r < R$  — произвольные.

Пусть  $z_1 \in U_R(z_0) : |z_1 - z_0| > r$

$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} :$

$$|n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n} \right| \cdot |(z_1 - z_0)| = n \frac{1}{|z_1 - z_0|}.$$

$$|C_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{n-1} \leq n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1},$$

$$\text{где } M > |C_n(z_1 - z_0)^n|, \quad \rho = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$$

То есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1} = \frac{M}{|z_1 - z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$  — мажорирующий для ряда (\*).

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$  сходится при  $\rho \in (0; 1)$  как ряд из производных ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ . Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (\*) сходится равномерно и абсолютно в  $U_r(z_0)$ .

Для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset U_r(z_0)$  по теореме Коши:

$$\oint_{\gamma} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z - z_0)^{n-1} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$$

Значит функция  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (z - z_0)^{n-1}$  имеет первообразную в  $U_r(z_0)$ , которая равна:

$$\int_{z_0}^z g(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \frac{(z - z_0)^n}{n} =$$

$$S(z) - S(z_0) = S(z) - C_0.$$

Следовательно  $S \in H(U_r(z_0)) \forall r \in (0; R)$ .

Поэтому  $S \in H(U_R(z_0))$  и  $S' = g$ . □

**Следствия** из этой теоремы:

1. Производная функции  $f \in H(D)$  голоморфна в  $D$

*Доказательство.*

$z_0 \in D$  — произвольная точка множества  $D \Rightarrow z_0$  — внутренняя точка  $D$ , так как  $D$  — открытое множество  $\Rightarrow$

$$\exists R > 0 : U_R(z_0) \subset D \Rightarrow$$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow (\text{голом. степенного ряда})$$

$\Rightarrow f'(z)$  – сумма степенного ряда, значит голоморфна  $\square$

2. Если функция  $f$  в области  $D$  первообразную, то  $f \in H(D)$

3.  $f \in H(D) \Rightarrow f$  бесконечно дифференцируема и все ее производные голоморфны

# 11 Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

## Теорема о разложение голоморфной функции в ряд Тейлора:

Пусть  $D$  – область в  $\mathbb{C}$   $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in D$ ,  $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$ .

Тогда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ ,  $z \in U_R(z_0)$ ,  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$ ,  $\gamma_r =$

$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

*Доказательство.*

По интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \text{ если } |z - z_0| < r$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} (=)$$

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n, \frac{1}{2\pi i} f(z) - \text{непрерывна.}$$

Тогда  $\frac{1}{2\pi i} f(z) \cdot \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{0}$  – сходится равномерно, значит можно интегрировать почленно.

Тогда получаем утверждение теоремы:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

□

**Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора:**

Пусть функция  $f \in H(\bar{U})$ , где  $U = \{z : |z - z_0| < r\}$  и  $\partial\bar{U} = \gamma_r$ ,  $|f(z)| \leq M$ .

Тогда коэффициенты ряда Тейлора  $f$  удовлетворяют следующему неравенству:  $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$

*Доказательство.*

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

так как  $|f(\xi)| \leq M$  и  $(\xi - z_0)^{n+1} \leq r^{n+1}$  □

**Теорема Лиувилля:**

$f \in H(\mathbb{C})$  и  $f$  – ограниченная функция  $\Rightarrow f = \text{const}$

*Доказательство.* По теореме о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора функция  $f$  представима в виде  $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  внутри окружности любого радиуса  $R$ , причем по этой же теореме коэффициенты ряда не зависят от  $R$ .

Тогда из неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

Из того что  $R$  произвольный следует, что  $c_n = 0$  для любого  $n$ , а значит  $f = \text{const}$  □

## 12 Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.

### Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$   $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ .

Тогда  $S \in H(U_R(z_0))$  и  $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$  (\*)

*Доказательство.*

$r : 0 < r < R$  – произвольные.

Пусть  $z_1 \in U_R(z_0) : |z - z_0| > r$

$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} :$

$$|n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n} \right| \cdot |(z_1 - z_0)^n| = n \frac{1}{|z_1 - z_0|}.$$

$$|C_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{n-1} \leq n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1},$$

где  $M > |C_n(z_1 - z_0)^n|$ ,  $\rho = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$

То есть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1} = \frac{M}{|z_1 - z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$  – мажорирующий для ряда (\*).

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$  сходится при  $\rho \in (0; 1)$  как ряд из производных

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$ . Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (\*) сходится

равномерно и абсолютно в  $U_r(z_0)$ .

Для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset U_r(z_0)$  по теореме Коши:



$$\oint_{\gamma} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z - z_0)^{n-1} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$$

Значит функция  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (z - z_0)^{n-1}$  имеет первообразную в  $U_r(z_0)$ , которая равна:

$$\int_{z_0}^z g(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \frac{(z - z_0)^n}{n} = S(z) - S(z_0) = S(z) - C_0.$$

Следовательно  $S \in H(U_r(z_0)) \forall r \in (0; R)$ .

Поэтому  $S \in H(U_R(z_0))$  и  $S' = g$ .  $\square$

**Следствие** из этой теоремы: Производная функции  $f \in H(D)$  голоморфна в  $D$

*Доказательство.*

$z_0 \in D$  – произвольная точка множества  $D \Rightarrow z_0$  – внутренняя точка  $D$ , так как  $D$  – открытое множество  $\Rightarrow$

$\exists R > 0 : U_R(z_0) \subset D \Rightarrow$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow (\text{голом. степенного ряда})$$

$\Rightarrow f'(z)$  – сумма степенного ряда, значит голоморфна  $\square$

Из следствия 1 теоремы о разложении функции в степенной ряд следует бесконечная дифференцируемость голоморфных функций.

**Теорема о единственности разложения в степенной ряд:**

$$\text{Если в } U_R(z_0) \text{ } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ то } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 f(z_0) &= c_0 \\
 f'(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = c_1 \\
 &\dots \\
 f^{(k)} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k} = \\
 &= k(k-1)\dots\dots\dots 1 = k!c_k \Rightarrow \\
 &\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}
 \end{aligned}$$

□

### Теорема Морера:

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  – область,  $f \in C(D)$  и  $\int_{\partial\Delta} = 0$  для произвольного треугольника  $\Delta$  при  $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$ .

Тогда  $f \in H(D)$

*Доказательство.*

Пусть  $a \in D$  – произвольная точка.

Так как  $D$  – открытое, то  $\exists r : U_r(a) \subset D$

Рассмотрим функцию  $F = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi, z \in U_r(z_0)$

Аналогично доказательству теоремы о первообразной  $F \in H(D)$  и  $F'(z) = f(z)$

Из голоморфности производной голоморфной функции следует утверждение теоремы □

**Теорема об эквивалентности трех определений голоморфности:** 3 следующих утверждения эквивалентны: R)

функция  $f$  в некоторой окрестности  $U(a)$  имеет комплексную производную (Риман)

C)  $f \in C(U(a))$  и  $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$  для любого треугольника  $\Delta \subset U(a)$  (Коши) W) функция  $f$  разложима в степенной ряд в окрестности точки  $a$  по  $(z - a)$  (Вейерштрасс)

*Доказательство.*

$R) \Rightarrow C)$  – из теоремы Коши

$R) \Rightarrow W)$  – по теореме о разложении голоморфной функции в степенной ряд

$W) \Rightarrow R)$  – теорема о голоморфности суммы степенного ряда

$C) \Rightarrow R)$  – по теореме Морера

□

### 13 Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.

#### Определение:

Нулем функции  $f$  называется точка  $a \in \mathbb{C} : f(a) = 0$

#### Теорема:

Если  $f(a) = 0$ ,  $f$  голоморфна в точке  $a$ , и  $f \equiv 0$  в какой то окрестности точки  $a$ , то  $\exists n \in \mathbb{N} : f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$ , где  $\varphi(z) \neq 0$  и  $\varphi$  голоморфна в точке  $a$

*Доказательство.*

По теореме о разложении голоморфной функции в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ в некоторой окрестности точки } a$$

$$f(a) = c_0 = 0, \exists n \in \mathbb{N} \ c_n \neq 0 \text{ (иначе } f(z) \equiv 0)$$

Пусть  $n \in \mathbb{N}$  – такое, что  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ . Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - a)^k = (z - a)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n}$$

Функция  $\varphi = \sum_{n=k}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n}$  и есть искомая функция (голоморфна и не ноль в  $a$ ) □

#### Следствие:

Если  $f(a) = 0$ ,  $f$  голоморфна в точке  $a$ , то существует выколотая окрестность точки  $a$ , где функция не имеет нулей, то есть ее нули – изолированные точки

#### Теорема о порядке нуля голоморфной функции:

Порядок нуля  $a \in \mathbb{C}$  голоморфной функции  $f$  совпадает с  $n$  в формуле  $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$

*Доказательство.*

В ходе доказательства теоремы о представлении голоморфной функции имеющей нуль было показано,

что  $c_0 = \dots c_{n-1}$ . Из того что  $c_k = f^{(k)}(a)$  следует доказательство теоремы  $\square$

### **Теорема единственности:**

Если  $D$  – область в  $\mathbb{C}$ ;  $f_1, f_2 \in H(D)$ ,  $\forall z \in \mathcal{E} \subset D : f_1 = f_2$ ,  $a$  – предельная точка множества  $\mathcal{E}$  и  $a \in D$ , то  $f_1 = f_2$  на всем  $D$

*Доказательство.*

$f = f_1 - f_2 \in H(D)$ ,  $\mathcal{R} = \{z \in D : f_1 = f_2\}$ .

Тогда  $a$  – предельная точка множества  $\mathcal{R}$

Тогда есть последовательность  $\{z_n\}$ ,  $z_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из непрерывности  $f$  следует что  $\lim_{z_n} f(z_n) = 0$ , а

Из того что  $a$  – предельная точка множества  $\mathcal{R}$  и следствия теоремы следует, что

$f \equiv 0 \Rightarrow f_1 = f_2$  в некоторой окрестности точки  $a$

Из того что  $a$  – произвольная предельная точка имеем, что  $\mathcal{R}$  – замкнутое подмножество  $D$

Из связности  $D$  следует, что  $Int\mathcal{R} = D$   $\square$

#### 14 Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Первая сумма, с отрицательными коэффициентами,  $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ , называется **главной частью**.

Вторая сумма называется **правильной частью**.

Ряд Лорана сходится, когда сходятся оба ряда.

Ясно, что правильная часть сходится, если

$$|z-a| < R_1$$

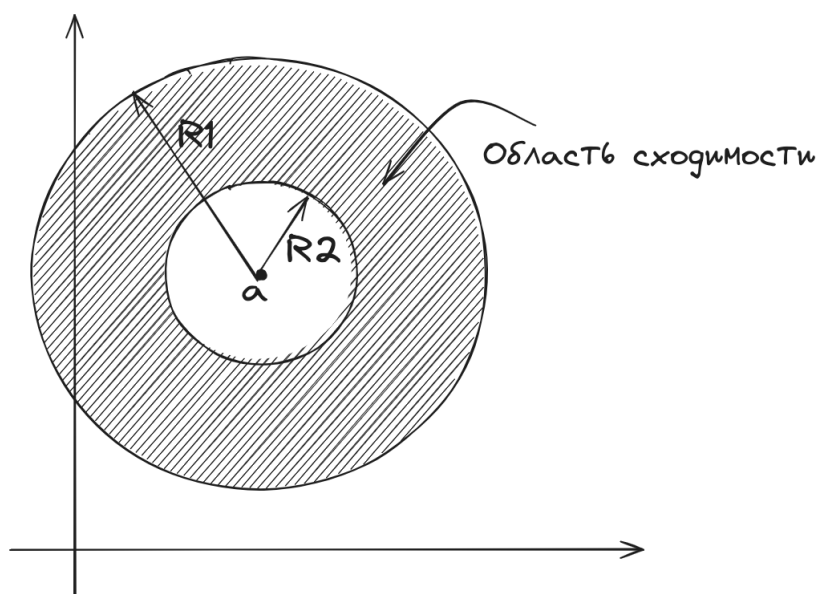
где  $R$  – некоторое действительное число. Аналогичным образом при замене  $\xi = \frac{1}{z-a}$  главная часть преобразуется к обычному ряду

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \xi^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \xi^k$$

откуда  $\xi < R_2$ , где  $R_2$  – некоторое действительное число, откуда

$$|z-a| > R_2$$

Таким образом получаем два условия сходимости ряда Лорана, оба из которых должны выполняться для сходимости ряда, а значит областью сходимости ряда Лорана (за исключением граничных случаев) является кольцо:



### Теорема Лорана.

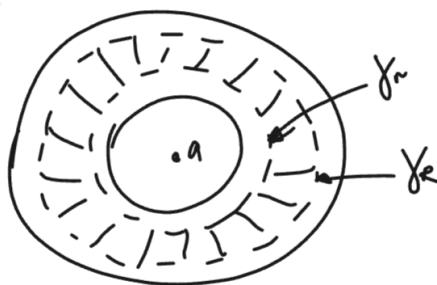
Пусть  $0 \leq R_2 < R_1 \leq \infty$ ,  $V = \{z \in \mathbb{C} \mid R_2 < |z - a| < R_1\}$ ,  $f \in H(V)$ .

Тогда  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$ , где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$n \in \mathbb{Z}, R_2 < \rho < R_1$$

Доказательство.



Пусть  $r, R$  – такие, что  $R_2 < r < R < R_1$ .  
Тогда  $V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$

$$\gamma V' = \gamma_r(a) \cup \gamma_R(a) \subset V, a \in V'$$

$$\text{Интегральная формула Коши: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma V'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R(a)} \dots - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r(a)} \dots (=)$$

На  $\gamma_R(a)$  обход против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{(\xi-a) - (z-a)} = \\ &= \frac{-1}{(z-a)(1 - \frac{\xi-a}{z-a})} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \\ &= -\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} \\ (=) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R(a) \rightarrow \gamma_r(a)} f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma_r(a) \rightarrow \gamma_R(a)} f(\xi) \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \\ &+ \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^{-k} \end{aligned}$$

□

**Теорема о единственности разложения в ряд Лорана.**

Если в кольце  $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$

$$(*) f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

то

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$



где  $n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$

*Доказательство.*

Ряд сходится равномерно на  $\gamma$ , т.к.:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$$

1.

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n| \cdot |z-a|^n = |c_n|\rho^n < |c_n|R^n, z = a + \rho e^{it}$$

$$r < r_1 < \rho < R_1 < R$$

$\sum |c_n|R^n$  – сходится, значит по признаку Вейерштрасса первая часть  $f(z)$  сходится равномерно.

2.

$$|c_{-k}(z-a)^{-k}| = \frac{|c_{-k}|}{|z-a|^k} = \frac{|c_{-k}|}{\rho^k} < \frac{|c_{-k}|}{r_1^k},$$

$\sum \frac{|c_{-k}|}{r_1^k}$  сходится, значит вторая часть сходится равномерно.

$$f(z) \cdot (z-a)^{-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^{n-k-1} \Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n-k \neq 0 \\ 2\pi i, & \text{если } n-k = 0 \end{cases} = c_k \cdot 2\pi i$$

□

### Неравенство Коши для коэффициентов Лорана.

Пусть  $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ ,  $f \in H(V)$ ,

$\gamma = \{z \mid |z-a| = \rho\}, \rho \in (r, R)$

$\forall z \in \gamma \quad |f(z)| \leq M$ , тогда

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

## 15 Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеристика в терминах ряда Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.

**Точка  $z_0$  — изолированная особая точка** функции  $f$ , если:

$$\exists r > 0 : f \in H(\overset{\circ}{U}_r(z_0))$$

Разложение в ряд лорана в окрестности  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_r(z_0)$$

Главная часть: 
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

Правильная часть: 
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Классификация особой точки  $a$  (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

**Характеризация устранимой особой точки:**

Если точка  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка функции  $f$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $a$  — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции  $f$  в окрестности точки  $a$  не содержит главной части.

3. Функция  $f$  ограничена в окрестности точки  $a$ .

*Доказательство.*

"2)  $\rightarrow$  1)":

Разложение в ряд Лорана в  $\mathring{U}_\delta(a)$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \rightarrow c_0 \text{ при } z \rightarrow a \Rightarrow 1)$$

"1)  $\rightarrow$  3)":

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$  – ограниченная в некоторой окрестности точки  $a$ .

"3)  $\rightarrow$  2)":

$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\mathring{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$  по теореме Лорана

$$\Rightarrow f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ в } \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$

Пусть  $\delta_1 > 0$ ;  $f$  ограничена  $M > 0$  в  $\mathring{U}_{\delta_1}(a)$ ,  $\rho \in (0; \delta_1) \Rightarrow$  по неравенству Коши  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$

Если  $n < 0$ , то  $\frac{M}{\rho^n} \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Но  $|c_n|$  не зависит от выбора  $\rho$ . Поэтому  $c_n = 0$  при  $n < 0 \Rightarrow 2)$ .

□

### Характеризация полюса:

Если точка  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка функции  $f$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $a$  — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции  $f$  в окрестности точки  $a$  содержит конечное ( $>0$ ) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где  $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3.  $f = \frac{1}{\varphi}$ , где  $\varphi$  — голоморфная в точке  $a$  и  $\varphi(a) \neq 0$ .

*Доказательство.*

"2)  $\rightarrow$  1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где  $\frac{1}{(z-a)^N} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow a$  и  $\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$  — степенной ряд  $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$ .

"1)  $\rightarrow$  3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{если } z \neq a \\ 0, & \text{если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфная в точке } a$$

Функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет устаревшую особую точку в  $a \Rightarrow \frac{1}{f(z)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3)  $\rightarrow$  2)": Пусть  $N$  — такое, что  $a_0 = 0 = a_1 = \dots = a_{N-1}$ ,  $a_N \neq 0$ . Тогда  $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$  — голоморфна в точке  $a$ , равна  $a_N \neq 0$ ;

$\frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$  — голоморфна в окрестности точки  $a$ .

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n; \tilde{c}_{-N} = c_0 \neq 0$$

□

### Характеризация существенно особой точки:

Изолированная особая точка  $a$  функции  $f$  является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции  $f$  в окрестности точки  $a$  имеет бесконечное число слагаемых.

*Доказательство.*

Следует из характеристик устранимой особой точки и вычета.

□

### Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек. Теорема Сохоцкого:

Если  $a$  – существенная особая точка функции  $f$ , то  $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$   $\exists \{z_n\}$  :

$$z_n \rightarrow z_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, f(z_n) \rightarrow A$$

.

*Доказательство.*

Пусть  $A = \infty$ . Так как  $f$  не может быть ограниченной в проколотой окрестности  $\{0 < |z-a| < r\}$  (из характеристики устранимой особой точки), то найдется в этой окрестности такая точка  $z_1$ , в которой  $|f(z_1)| > 1$ . Точно так же в  $\{0 < |z-a| < \frac{|z_1-a|}{2}\}$  найдется точка  $z_2$ , в которой  $|f(z_2)| > 2$  и т.д., в  $\{0 < |z-a| < \frac{|z_1-a|}{n}\}$  найдется точка  $z_n$ ,

в которой  $|f(z_n)| > n$ . Очевидно,  $z_n \rightarrow a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$ .

Пусть теперь  $A \neq \infty$ . Либо точки, в которых  $f$  равна  $A$  имеют  $a$  своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательности  $z_n \rightarrow a$ , на которой  $f(z_n) = A$ , либо существует проколота окрестность  $\{0 < |z - a| < r'\}$ , в которой  $f(z) \neq A$ . В этой окрестности голоморфна функция  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ , для которой  $a$  также является существенно особой точкой (т.к.  $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$  и если бы  $\varphi$  при  $z \rightarrow a$  стремилась к конечному или бесконечному пределу, то  $f$  – также). По доказанному существует последовательность  $z_n \rightarrow a$ , по которой  $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$ , но по этой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A$$

□

## 16 Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

**Вычетом** функции  $f$  в точке  $z_0$  называют число:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial r} f(z) dz$$

**Вычисление вычетов: Теорема о связи вычета с рядом Лорана:**

Пусть  $f$  — голоморфна в выколотой окрестности точки  $a$ . Тогда:

$$\operatorname{res} f(a) = c_{-1},$$

где  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$

*Доказательство.*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n \text{ в } \mathring{U}_\delta(a), \text{ где } f \in H(\mathring{U}_\delta(a))$$

$$\gamma_r = \{z : |z - a| = r\}, r \in (0, \delta), \text{ т.е. } \gamma_r \subset \mathring{U}_\delta(a)$$

Значит ряд сходится равномерно на  $\gamma_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \oint_{\gamma_r} c_n(z - a)^n dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} c_{-1} \cdot 2\pi i.$$

□

**Следствие:**

В устранимой особой точке  $z_0$ :  $\operatorname{res} f(z_0) = 0$

**Формула вычисления вычета в полюсе**

Пусть  $z_0$  — полюс функции  $f$ . Тогда:

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)^n)^{(n-1)}$$

*Доказательство.*

Разложение  $f$  в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{z_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

$$f(z) \cdot (z-a)^n = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \dots$$

$$[f(z) \cdot (z-a)^n]^{(n-1)} = c_{-1} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{1!} \cdot c_0 \cdot (z-a) + \dots$$

При  $z \rightarrow a$ :

$$[f(z) \cdot (z-a)^n]^{(n-1)} \rightarrow c_{-1} \cdot (n-1)! = (n-1)! \operatorname{res} f(a) \quad \square$$

**Следствие:**

Если  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi, \psi$  — голоморфны в точке  $a$ ,  $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$ .

$$\text{То } \operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

*Доказательство.*

1.

$$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \in \mathbb{C} \Rightarrow a - \text{устраняемая ос.т.} \Rightarrow \operatorname{res} f(a) = 0 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

2.

$\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$  имеет в точке  $a$  нуль первого порядка. Значит  $a$  — полюс 1-ого порядка. Тогда:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \frac{\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad \square$$

**Теорема Коши о вычетах (вычисление контурных интегралов):**

Пусть  $f \in H(D \setminus \{a_1 \dots a_n\})$ , где  $a_1 \dots a_n$  — изолированные особые точки  $f$ ,  $G \cup \partial G \subset D$ ,  $\partial D$  не содержит особых точек  $f$ .



Тогда:

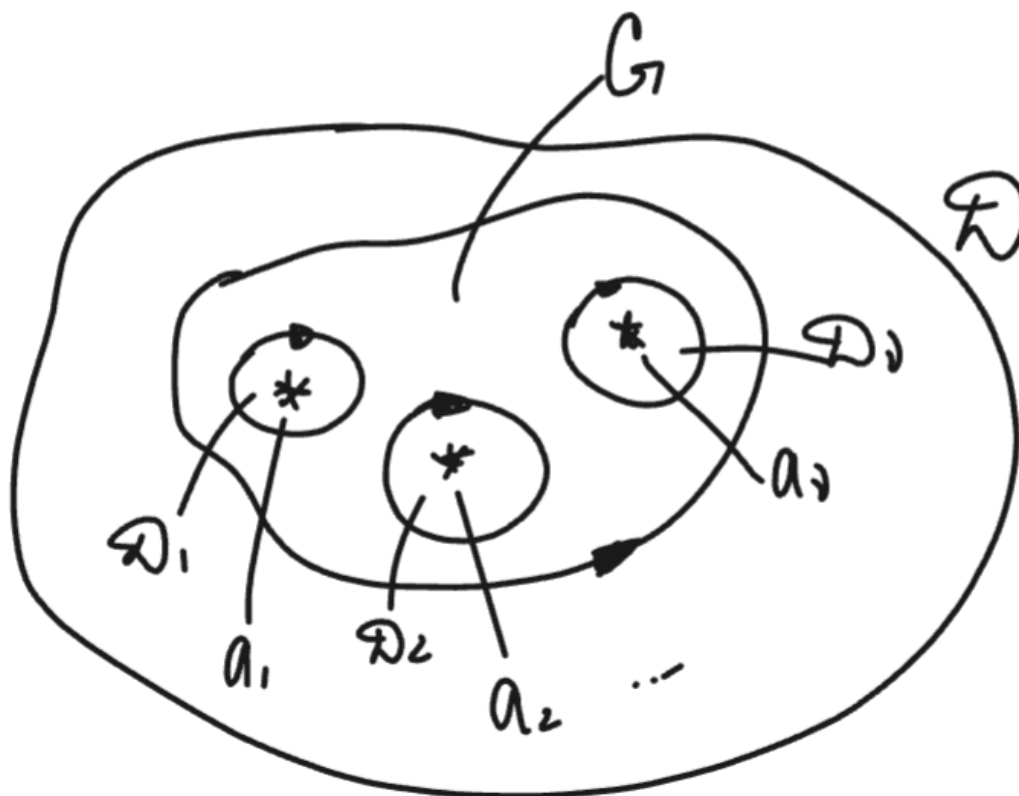
$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(a_i)$$

(обход положительный)

*Доказательство.*

Следует из теоремы Коши для многосвязной области:

Окружности, окружающие  $a_1, \dots, a_\nu$  не пересекаются и лежат



внутри  $\gamma G$ .

$$\tilde{G} = G \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_\nu), f \in H(\tilde{G})$$

$$\int_{\gamma \tilde{G}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma G} \dots + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{-\gamma D_j} \dots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma G} \dots - \sum_{j=1}^{\nu} 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(a_j) = 0 \Rightarrow \int_{\gamma G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{res} f(a_j).$$

□

## 17 Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки $\infty$ . Вычет в бесконечности.

**Точка  $\infty$  — изолированная особая точка** функции  $f$ , если:

$$\exists R > 0 : f \in H(\overset{\circ}{U}_R(\infty))$$

Разложение в ряд Лорана в окрестности  $\infty$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_R(\infty)$$

Главная часть:  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$

Правильная часть:  $\sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$

Классификация особой точки  $\infty$  (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

**Характеризация устранимой особой точки:**

Если точка  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка функции  $f$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $a$  — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции  $f$  в окрестности точки  $a$  не содержит главной части.
3. Функция  $f$  ограничена в окрестности точки  $a$ .

*Доказательство.*

"2)  $\rightarrow$  1)":

Разложение в ряд Лорана в  $\mathring{U}_\delta(a)$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \rightarrow c_0 \text{ при } z \rightarrow a \Rightarrow 1)$$

"1)  $\rightarrow$  3)":

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$  – ограниченная в некоторой окрестности точки  $a$ .

"3)  $\rightarrow$  2)":

$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\mathring{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$  по теореме Лорана

$$\Rightarrow f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ в } \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$

Пусть  $\delta_1 > 0$ ;  $f$  ограничена  $M > 0$  в  $\mathring{U}_{\delta_1}(a)$ ,  $\rho \in (0; \delta_1) \Rightarrow$  по неравенству Коши  $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$

Если  $n < 0$ , то  $\frac{M}{\rho^n} \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ . Но  $|c_n|$  не зависит от выбора  $\rho$ . Поэтому  $c_n = 0$  при  $n < 0 \Rightarrow 2)$ .

□

### **Характеризация полюса:**

Если точка  $a \in \mathbb{C}$  — изолированная особая точка функции  $f$ , то следующие условия эквивалентны:

1.  $a$  — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции  $f$  в окрестности точки  $a$  содержит конечное ( $>0$ ) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где  $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3.  $f = \frac{1}{\varphi}$ , где  $\varphi$  — голоморфная в точке  $a$  и  $\varphi(a) \neq 0$ .

*Доказательство.*

"2)  $\rightarrow$  1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где  $\frac{1}{(z-a)^N} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow a$  и  $\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$  — степенной ряд  $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$ .

"1)  $\rightarrow$  3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{если } z \neq a \\ 0, & \text{если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфная в точке } a$$

Функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет устаревшую особую точку в  $a \Rightarrow \frac{1}{f(z)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3)  $\rightarrow$  2)": Пусть  $N$  — такое, что  $a_0 = 0 = a_1 = \dots = a_{N-1}$ ,  $a_N \neq 0$ . Тогда  $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$  — голоморфна в точке  $a$ , равна  $a_N \neq 0$ ;

$\frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$  — голоморфна в окрестности точки  $a$ .

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n; \tilde{c}_{-N} = c_0 \neq 0$$

□

### Характеризация существенно особой точки:

Изолированная особая точка  $a$  функции  $f$  является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции  $f$  в окрестности точки  $a$  имеет бесконечное число слагаемых.

*Доказательство.*

Следует из характеристик устранимой особой точки и вычета.

□

**Вычетом** функции  $f$  в точке  $\infty$  называют число:

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_R} f(z) dz,$$

где  $\gamma_R = \{a : |z| = R\}$ ,  $R$  – такое, что вне  $\gamma_R$  нет особых точек, кроме, может быть  $\infty$ .

**Теорема о связи вычета в бесконечности с рядом Лорана:**

Если в некоторой выколотой окрестности  $\infty$  функция  $f$  голоморфна, то:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1},$$

где  $c_{-1}$  — коэффициент разложения  $f$  в ряд Лорана в окрестности  $\infty$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(\infty) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_{-\gamma_R} c_n z^n dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \oint_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -c_{-1} \end{aligned}$$

Прим.:  $\oint_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -2\pi i$ , т.к. обход по часовой стрелке. □

## 18 Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.

Пусть  $f \in H(\dot{U}_r(a))$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . Тогда вычет функции  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z)$  в точке  $a$  называют **логарифмическим вычетом функции  $f$  в точке  $a$** .

**Лемма о логарифмическом вычете в нуле и в полюсе:**

Логарифмический вычет ф.  $f(z)$  в точке  $a$  равен:

1. порядку нуля  $a$ , если  $a$  — нуль
2. порядку полюса  $a$ , если  $a$  — полюс

*Доказательство.*

1) Пусть  $a$  — нуль порядка  $n$  ф-ии  $f(z)$ , тогда:  
 $f(z) = a_n(z - a)^n + a_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots = (z - a)^n \cdot \varphi(z)$ , где  $\varphi(z)$  — сумма степенного ряда, откуда следует, что  $\varphi \in H$

$$\varphi(z) = c_n \neq 0 \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - a)^{n-1} \cdot \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z)}{(z - a)^n \varphi(z)} =$$

$$\frac{1}{z - a} \left( n + (z - a) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \Rightarrow a \text{ — полюс 1-ого порядка функции}$$

$$\frac{f'}{f} \Rightarrow C_{-1} = n, \text{ т.к. } \frac{n}{z - a} \text{ — главная часть.}$$

2) Пусть  $a$  — полюс порядка  $p$ , тогда по теореме о полюсе  $a$  — нуль порядка  $p$  функции  $\frac{1}{f(z)} = g(z)$ .

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} \frac{1}{f(z)}$$

Тогда логарифмический вычет функции  $g$  в точке  $a$  равен  $p$ , а функции  $f$  в точке  $a$  равен  $-p$ .  $\square$



### Теорема о логарифмическом вычете:

Пусть  $f$  мероморфна в области  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $G \cup \partial G \subset D$ ,  $\partial G$  не содержит ни нулей, ни полюсов функции  $f$ ,  $N$  и  $P$  – количество нулей и полюсов с учетом их порядков функции  $f$  в  $G$ .

Тогда  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$  (обход  $\partial G$  против часовой стрелки),

где  $\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  – логарифмический вычет функции  $f$  вдоль кривой  $\partial G$ .

*Доказательство.*

Особые точки  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  в области  $G$ :

1. полюса  $a_1, \dots, a_l$  с порядками  $p_1, \dots, p_l$
2. нули  $b_1, \dots, b_m$  с порядками  $n_1, \dots, n_m$

Тогда по лемме о логарифмическом вычете  $\frac{f'}{f}(a_j) = -p_j$ ,

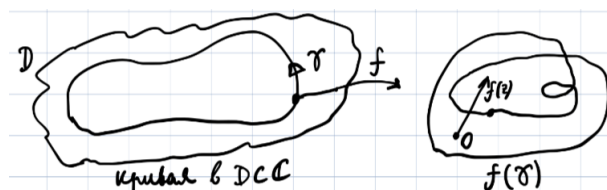
$$\operatorname{res} \frac{f'}{f}(b_s) = n_s$$

По теореме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left( \sum_{j=1}^l \operatorname{res} \frac{f'}{f}(a_j) + \sum_{s=1}^m \operatorname{res} \frac{f'}{f}(b_s) \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^l p_j + \sum_{s=1}^m n_s = N - P \end{aligned}$$

□

$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi k$ ,  $k$  – количество обходов точки  $O$   $f(z)$ ,  $z \in \gamma$ , с учетом приращения.



**Принцип аргумента.** Пусть  $f$  мероморфна в  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $G \cup \partial G \subset D$ ,  $\partial G$  не содержит ни нулей, ни полюсов  $f$ . Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f.$$

*Доказательство.*

Пусть  $\partial G : z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\Phi(t) = \ln f(z(t))$ , где  $\ln f$  непрерывно меняется при росте  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ . Тогда  $\Phi'(t) = \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} \cdot z'(t)$  и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \\ &= \ln f(z(\beta)) - \ln f(z(\alpha)) = \ln |f(z(\beta))| + i \arg f(z(\beta)) - \ln |f(z(\alpha))| - \\ &= -i \arg f(z(\alpha)) = i \Delta_{\partial G} \arg f = \quad (\text{по т. о логар.выч.}) \quad N - P = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{i \Delta_{\partial G} \arg f}{2\pi i} \end{aligned}$$

□

### Теорема Руше:

Пусть  $f, g \in H(G \cup \partial G)$  и  $\forall z \in \partial G |f(z)| > |g(z)|$ .

Тогда функции  $f$  и  $f+g$  имеют одинаковое количество нулей в  $G$ .

*Доказательство.*

$$\forall z \in \gamma G |f(z)| > |g(z)| \geq 0$$

$$|(f+g)(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

Отсюда следует, что функция  $f$  и  $f+g$  не имеют нулей на

$\partial G$ .

По принципу аргумента  $\Delta_{\partial G} \arg(f + g) = N_{f+g}$  (количество нулей функции  $f + g$  в  $G$ ).

С другой стороны:

$$\Delta_{\gamma G} \arg f \left(1 + \frac{g}{f}\right) = \Delta_{\gamma G} \arg f + \Delta_{\gamma G} \left(1 + \frac{g}{f}\right) = N_f$$

□

### Применение:

Найти число корней уравнения  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$  в области  $|z| < 1$ .

На границе области  $|z| = 1$ , тогда т.к.  $|z^8 + z^2 - 1| \leq |z|^8 + |z|^2 + |-1| = 3 < |-4z^5| = 4$  и уравнение  $-4z^5 = 0$  имеет 5 корней в этой области, то исходное уравнение также имеет 5 корней в этой области.

## 19 Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.

**Теорема о среднем:** Пусть  $f \in H(D)$ ,  $z_0 \in D$ ,  $\partial U_\rho(z_0) \subset D$

Тогда 
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt$$

*Доказательство.*

По интегральной формуле Коши:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \end{aligned}$$

Параметр  $\partial U_\rho(z_0) : z = z_0 + \rho e^{it} : t \in [0; 2\pi], z' = i \rho e^{it} \quad \square$

### Принцип сохранения области:

Функция  $f$  голоморфна в области  $D$  и  $f \neq const$

$\Rightarrow$

Образ  $f(D)$  есть область

*Доказательство.*

Нужно показать, что множество  $D^*$  связно и открыто.

1) Пусть  $w_1, w_2$  — две произвольные точки  $D^*$ , а  $z_1, z_2$  — их прообразы.

Так как множество  $D$  линейно связно, то существует путь  $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow D$ , связывающий точки  $z_1, z_2$ . В силу непрерывности функции  $f$  образ  $\gamma^* = f \circ \gamma$  будет путем, связывающим точки  $w_1, w_2$ . Таким образом  $D^*$  — линейно связно.

2) Пусть  $w_0$  произвольная точка  $D^*$  и  $z_0$  — один из ее прообразов в  $D$ . Так как  $D$  открыто, то существует круг  $\{|z - z_0| \leq$

$r\} \subset D$ .

Будем уменьшать  $r$  пока круг не перестанет содержать других точек, в которых функция  $f$  равна  $w_0$  (это возможно, т.к. она не постоянная).

Обозначим  $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$  границу этого круга и

$$\mu = \min_{x \in \gamma} |f(x) - w_0|, \quad \mu > 0$$

Если бы  $\mu = 0$ , то на  $\gamma$  существовала бы точка, в которой функция  $f$  равна  $w_0$ .

Теперь докажем, что  $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$ .

Пусть  $w_1$  — произвольная точка этого круга, то есть  $|w_1 - w_0| < \mu$ . Тогда:

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1).$$

Так как на  $\gamma$  в силу выбора  $\mu$  имеем  $|f(z) - w_0| \geq \mu$ , то по теореме Руше функция  $f(z) - w_1$  имеет внутри  $\gamma$  столько же нулей, сколько и  $d(z) - w_0$ , то есть по крайней мере один нуль  $z_0$ , а значит функция  $f$  внутри  $\gamma$  принимает значение  $w_1$ , то есть  $w_1 \in D^*$ . В силу произвольности выбора  $w_1$  весь круг лежит в  $D^*$ , а значит оно является открытым множеством.  $\square$

### Принцип максимума модуля:

Модуль голоморфной функции не может достигать строгого локального максимума внутри области.

*Доказательство.*

Пусть функция достигает максимума в некоторой точке  $z_0$ .

Воспользуемся принципом сохранения области. Если  $f \neq \text{const}$ , то она преобразует  $z_0$  в точку  $w_0$  области  $D^*$ .

Существует круг  $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$ , а в нем найдется точка  $w_1$  такая, что  $|w_1| > |w_0|$ . Значение  $w_1$  принимается функ-

цией  $f$  в некоторой окрестности точки  $z_0$ , а это противоречит тому, что  $|f|$  достигает максимума в этой точке.  $\square$

## 20 Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана-Шварца, принцип соответствия границ с обратным принципом соответствия границ.

### Основные теоремы и приложения конформных отображения:

#### 1. Теорема Римана (о возможности конформного и взаимно однозначного отображения одной односвязной области на другую)

Пусть  $D$  – односвязная область в  $\overline{\mathbb{C}}$ , граница которой содержит не менее двух точек. Тогда:

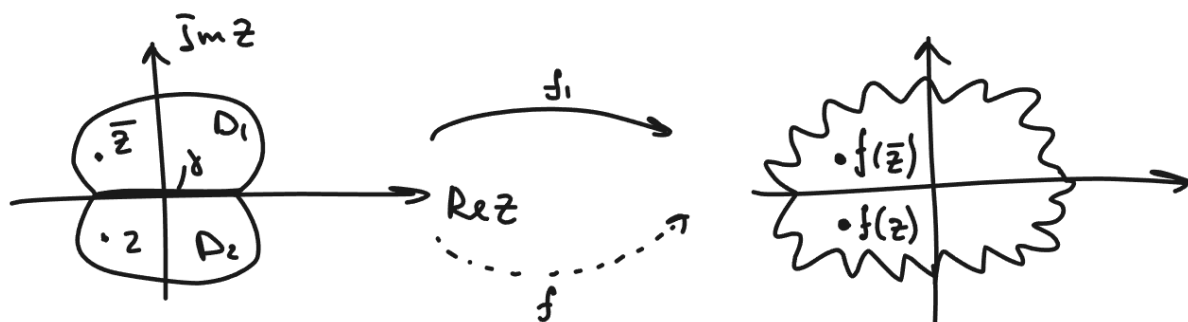
- (а)  $\exists$  голоморфная в  $D$  функция  $w = f(z)$ , которая отображает  $D$  конформно и однозначно на единственный круг  $G : |w| < 1$ ;
- (б) эту функцию можно выбрать так, что  $f(z_0) = w_0$ ,  $\arg f'(z_0) = \alpha$ , где  $z_0 \in D$ ,  $w_0 \in G$  – заданные точки,  $\alpha$  – заданное действительное число.

Функция  $f$ , удовлетворяющая 1. и 2. единственная.

#### 2. Принцип симметрии Римана-Шварца

Пусть  $D_1$  – односвязная область, лежащая в верхней полуплоскости  $Im z > 0$ , граница  $\Gamma_1$ , которая содержит интервал  $\gamma$  действительной оси  $Im z = 0$ , область  $D_2$  симметрична  $D_1$  относительно действительной оси, функция  $f(z)$  непрерывна на  $D_1$ ,  $\Gamma_1$ , голоморфна на  $D_1$  и принимает действительные значения на  $\gamma$ . Тогда функция  $f$  может голоморфно продолжить в область  $D_1 \cup \gamma \cup D_2$  по формуле:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{если } z \in D_1 \cup \gamma, \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & \text{если } z \in D_2. \end{cases} \quad (5)$$



### 3. Принцип соответствия границ

Пусть  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  – простые контуры,  $D$  и  $D^*$  – односвязные области, ограниченные  $\Gamma$  и  $\Gamma^*$  соответственно, функция  $f(z)$  однолистно и конформно отображает  $D$  на  $D^*$ . Тогда

- (a)  $f(z)$  имеет непрерывное продолжение  $\bar{f}$  на  $\Gamma$ , то есть  $\bar{f} : \bar{D} = D \cup \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  – непрерывна и  $\bar{f}|_D = f$
- (b)  $\bar{f}$  отображает  $\Gamma$  на  $\Gamma^*$  взаимно однозначно, причем положительному обходу  $\Gamma$  соответствует положительный обход  $\Gamma^*$ .

### 4. Обратный принцип соответствия границ

Пусть  $D$  – односвязная область в  $\mathbb{C}$ , ограниченная кусочно-гладким контуром  $\Gamma$ .  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ ,  $f \in H(D)$ , функция  $f(z)$  отображает контур  $\Gamma$  взаимно однозначно на простой кусочно-гладкий контур  $\Gamma^*$ .

Тогда  $f(z)$  отображает  $D$  конформно и однозначно на область  $D^*$ , ограниченную контуром  $\Gamma^*$ , причем положительному обходу  $\Gamma$  соответствует положительный обход  $\Gamma^*$ .



## 21 Вычисление несобственных интегралов с использованием вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.

### Лемма Жордана:

Пусть  $f(z)$  — непрерывная функция в  $\{Im\, z \geq 0\}$  за исключением изолированного множества точек;

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| = R, Im\, z \geq 0\};$$

$$M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|, \quad M(R) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty;$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow 0$$

### Теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов:

Пусть  $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , где  $P_m(x), Q_n(x)$  — многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно,  $n \geq m + 2$ ;

$Q_n(x) \neq 0$  при  $x \in \mathbb{R}$  (не имеет действительных корней);

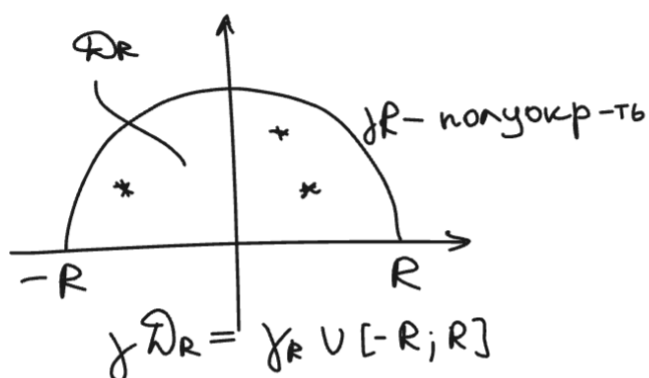
$$\text{Тогда } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{res} f(z_j),$$

где  $z_1, \dots, z_k$  — все полюса  $f$  в области  $Im\, z > 0$

*Доказательство.*

Так как  $f$  непрерывна на компакте  $\gamma_R$ , то  $\exists \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$ .

$$\max \frac{|P_m(z)|}{|Q_n(z)|} = \max_{|z|=R, Im\, z \geq 0} \frac{|d_m z^m + \dots|}{|a_n z^n + \dots|} \sim \max_{|z|=R, Im\, z \geq 0} \frac{|b_m| |z|^m}{|a_n| |z|^n} =$$



$R$  — такое, что  
все особые т. ф  
в обл.  $\text{Im } z > 0$   
расположены  
внутри полуокружности

$$= \max_{|z|=R} \frac{|b_m|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^{n-m}} \sim \frac{|b_m|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \text{ при } R \rightarrow \infty$$

Пусть  $L(\gamma_R)$  — длина  $\gamma_R$ . Тогда:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \max_{a \in \gamma_R} |f(z)| \cdot L(\gamma_R) \sim c \frac{1}{R^{n-m}} \pi R = \frac{c\pi}{R^{n-m-1}} \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow \infty, n - m - 1 > 0$

Откуда следует, что  $\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

По теореме Коши:  $\oint_{\gamma_{D_R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res } f(z_j)$  не зависит

от  $R$ , при  $R \rightarrow \infty$ :

$$\oint_{\gamma_{D_R}} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx \rightarrow 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad \square$$

### Пример вычисления несобственного интеграла от тригонометрических функций:

Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$

Функция  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$  удовлетворяет условиям леммы Жордана. Здесь  $t = 1$  и  $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$ . Особыми точками функции  $f(z)$  являются полюсы первого порядка  $z = 1 \pm 3i$ . В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка  $z = 1 + 3i$ . Вычислим относительно этой точки вычет функции  $f(z)$ :

$$\operatorname{res} f(1 + 3i) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 2z + 10)'} = \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i}$$

Следовательно,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = 2\pi i \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(1 +$

$3i)(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1) + i \frac{\pi}{3}e^{-3}(3 \cos 1 + \sin 1)$ .

Сравнивая в обеих частях этого равенства действительные и мнимые части с учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(3 \cos 1 + \sin 1),$$

**22 Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.**

Пусть  $f(t)$  — функция,  $t \in \mathbb{R}$

**Преобразование Лапласа** функции  $f$  — это

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \in \mathbb{C}$$

Обозначение:  $F(p) \doteq f(t), f(t) \doteq F(p)$

Функцию  $f(t)$  называют **оригиналом**

$\Rightarrow$

1.  $f(t)$  — кусочно-непрерывная при  $t \geq 0$
2.  $f(t) = 0$  при  $t < 0$
3.  $\exists M > 0 : \exists \alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

**Теорема о существовании изображения:**

Пусть  $f(t)$  — оригинал

Тогда: 1) интеграл  $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$  сходится абсолютно

в области  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha\}$

2) изображение  $F(p)$  — аналитическая функция в  $U_\alpha$ .

*Доказательство.*

$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$  — условие 3) из определения оригинала

Пусть  $p = \delta + is$ , тогда:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-\delta t}| \cdot |e^{-ist}| \leq Me^{\alpha t} e^{-\delta t} = Me^{(\alpha - \delta)t}$$

$$\begin{aligned}
|F(p)| &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \int_0^b f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \text{по теореме об оценке} \\
&\leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b |f(t) e^{-pt}| dt \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b M e^{(\alpha-\delta)t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{M}{\alpha - \delta} e^{(\alpha-\delta)t} \Big|_0^b = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{M}{\alpha - \delta} (e^{(\alpha-\delta)b} - 1) = -\frac{M}{\alpha - \delta} = \frac{M}{\delta - \alpha}, \text{ значит по при-} \\
&\text{знаку Вейерштрасса сходится равномерно.}
\end{aligned}$$

$$\text{Значит } \operatorname{Re}(p = \delta + is) = \delta \Rightarrow \operatorname{Re} p > \alpha \Rightarrow F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$F(p)$  — аналитическая функция. □

### Поведение изображения в бесконечности:

Если изображение  $F(p)$  аналитическая функция в  $\infty$ , то  $F(\infty) = 0$ .

*Доказательство.*

Из доказательства теоремы 1:

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\delta - \alpha},$$

где  $\alpha = \text{const}$ ,  $\delta = \operatorname{Re} p$ .

Если  $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ , то  $\frac{M}{\delta - \alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow |F(p)| \rightarrow 0$ , т.к.  $F(p) \rightarrow F(\infty)$ . □

### Изображение элементарных функций:

1. Функция Хевисайда  $\nu$

$$\nu(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty}$$

При  $p = \delta + is : |e^{-pt}| = |e^{-\delta t} \cdot e^{-ist}|$

Тогда  $1 \doteq \frac{1}{p}$

## 2. Показательная функция

$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$

По теореме затухания  $\forall \alpha \in \mathbb{C} : e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha)$

Так как  $1 \doteq \frac{1}{p}$ , то имеем:

$e^{\alpha t} \cdot 1 \doteq \frac{1}{p - a}$

## 3. Степенная функция

$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$

Докажем по индукции:

По теореме об интегрировании оригинал  $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$

При  $n = 0$  : выполняется. Пусть выполнено для  $n = k$ , тогда:

$f(\tau) = \tau^k \doteq \frac{k!}{p^k}$

$t^{k+1} = (k+1) \cdot \int_0^t \tau^k d\tau = (k+1) \cdot \frac{k!}{p^k \cdot p} = \frac{(k+1)!}{p^{k+1}}$

## Теорема обращения:

Если  $f(t)$  — оригинал с постоянной  $\alpha$ ;

$F(p) \doteq f(t); t$  — точка, в которой  $f(t)$  — непрерывная.

То  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$  — интеграл по прямой

$Re p = \gamma, \gamma > \alpha$

- 23 Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.**

### Свойства преобразования Лапласа:

1. Теорема линейности:

$$\forall A, B \in \mathbb{R} : Af(t) + Bg(t) \doteq A \cdot F(p) + B \cdot G(p)$$

2. Теорема подобия:

$$\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

3. Теорема затухания (смещения):

$$\forall a \in \mathbb{C} : e^{at} f(t) \doteq F(p - a)$$

*Доказательство.*

$$e^{at} f(t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

□

4. Теорема запаздывания:

$$\forall \tau > 0 : f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

5. Теорема опережения:

$$\forall \tau > 0 : f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} [F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{pt} dt]$$

6. Теорема дифференцирования интеграла:

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
 f'(t) &\doteq \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t) \cdot e^{-pt}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)de^{-pt} = \\
 &0 - f(0)e^{-p \cdot 0} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
 |f(t)e^{-pt}| &\leq M \cdot e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \alpha - \operatorname{Re} p < 0 \\
 f'(t) &\doteq -f(0) + p \cdot F(p) \quad \square
 \end{aligned}$$

**7. Теорема об интегрировании оригинала:**

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

**8. Теорема о дифференцировании изображения:**

$$-t \cdot f(t) \doteq F'(p)$$

**9. Теорема об интегрировании изображения:**

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz$$

**Сверткой** функций  $f, g$  называется:

$$f \star g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

**Теорема умножения изображений:**

$$(f \star g)(t) \doteq F(p) \cdot G(p)$$



## 24 Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.

### Три теоремы разложения:

1. Если  $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$  сходится при  $|p| > R$ , то:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

2. Вторым методом построения оригинала по изображению:  
Каждая рациональная функция  $F(p)$ , у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением:

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \deg Q > \deg R$$

3. Пусть  $f(t) \doteq F(p)$ ;  $F(p)$  – аналитическая функция при  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , а при  $\operatorname{Re} p \leq \sigma_0$  имеет конечное число изолированных особых точек  $p_1, \dots, p_n$ . Тогда:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(e^{pt} \cdot F(p))(p_k)$$

### Теорема подобия:

$$\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

*Доказательство.*

$$f(\lambda t) \doteq \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} \tau = \lambda t \\ t = \frac{\tau}{\lambda} \\ dt = \frac{1}{\lambda} d\tau \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} \frac{1}{\lambda} d\tau =$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

□

**Теорема запаздывания:**

$$\forall \tau > 0 : f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

*Доказательство.*

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-p\tau} dt = \left| \begin{array}{l} t_1 = t - \tau \\ dt_1 = dt \\ t = t_1 + \tau \end{array} \right| = \int_{-\tau}^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1 =$$

$$\int_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1 + \int_{-\tau}^0 f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1$$

Из определения оригинала:  $f(t_1) = 0$  при  $t_1 < 0$ . Тогда:

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

□