

# Комплексный анализ, ФН-12, ИУ-9, 4-й семестр.

## Ответы на вопросы к экзамену

Весна 2024

### Содержание

1	Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции.	3
2	Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.	6
3	Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.	8
4	Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.	11
5	Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.	13
6	Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.	16
7	Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$ . Его свойства.	19
8	Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей	22
9	Интегральная формула Коши для функции и ее производных.	24

# 1 Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голomorphic функции.

ФКП  $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  непрерывна в точке  $z_0$ , если:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ФКП  $f(z)$   $\mathbb{C}$ -дифференцируема в точке  $z_0 \Leftrightarrow$

1.  $f$  определена в окрестности точки  $z_0$ ;
2.  $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$ ,

где  $A \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha(\Delta z) \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$

Предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$  называют производной ФКП  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначают  $f'(z_0)$ .

**Теорема (1-ый критерий  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости):**

ФКП  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$

$\Leftrightarrow$

$\exists$  производная  $f'(z_0)$  функции  $f$  в точке  $z_0$ , при этом  $f'(z_0) = A$ .

*Доказательство.*

” $\Rightarrow$ ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta z)) = A \quad (\alpha(\Delta z) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists f'(z_0) = A. \end{aligned}$$

” $\Leftarrow$ ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \\ \alpha(\Delta z) &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z. \end{aligned}$$

□

Функция  $w = f(z)$  называется **голоморфной (аналитической)** в точке  $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f - \mathbb{C}$  – дифференцируема в окрестности точки  $z_0$ .

### Теорема (об условиях Коши-Римана):

Функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , где  $z = x + iy$ ,  $\mathbb{C}$  – дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  тогда и только тогда, когда:

1. Функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$   $\mathbb{R}^2$  – дифференцируемы в точке  $M_0(x_0, y_0)$ ;
2. Выполняются условия (уравнения) Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) \end{cases}$$

При этом  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$ .

*Доказательство.*

” $\Rightarrow$ ”

$\Delta f(z_0, \Delta z) = A\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z$ , но при этом:

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) =$$

$$= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \gamma(\Delta z)\Delta z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) \\ \Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z), \end{cases}$$

где  $\frac{\gamma(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|} \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  ( $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ ), так как

$\gamma(\Delta z) \rightarrow 0$ , а  $\frac{\Delta z}{|\Delta z|}$  – ограничена при  $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \\ \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow 1);$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \alpha = v'_y \\ u'_y = -\beta = -v'_x \end{cases} \Rightarrow 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f'_z = \alpha + i\beta \Rightarrow \Rightarrow f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \\ & \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ .” Аналогично

□

## 2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.

Пусть задана кривая  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ , имеющая касательную в точке  $t_0$  с направляющим вектором  $\xi = x'(t_0) + iy'(t_0)$ . Назовем  $\xi$  касательным вектором в точке  $t_0$  к кривой  $z$ .

**Теорема (геометрический смысл комплексной производной):**

1. Любая голоморфная в т.  $z_0 = z(t_0)$  функция  $f$  определяет линейное отображение касательных касательных векторов  $\eta = f'(z_0)\xi$ , где  $\eta$  – образ касательного вектора  $\xi$ , являющийся касательным вектором к кривой  $f(z)$  в точке  $f(z_0)$ .
2. Это отображение касательных векторов состоит в растяжении с коэффициентом  $|f'(z_0)|$  и повороте на угол  $\arg f'(z_0)$ .

□ а) По правилу дифференцирования сложной функции (в смысле  $\mathbb{R}^2$ )

$$\eta = \frac{df(z(t))}{dt}(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)\xi$$

б)  $|\eta| = |f'(z_0)| \cdot |\xi|$  – растяжение с коэффициентом  $|f'(z_0)|$ ;  
 $\arg \eta = \arg f'(z_0) + \arg \xi \pm 2\pi$  – поворот на угол  $\arg f'(z_0)$ . ■

Отображение  $F$  называется **конформным** в точке  $M_0(x_0, y_0)$  тогда и только тогда, когда касательное отображение в точке  $M_0$  сохраняет углы.

Отображение  $F$  называется **конформным** в области  $U \subset \mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда оно конформно в любой из точек  $U$ .

$U \subset \mathbb{C}$ ,  $H(U)$  – множество голоморфных в  $U$  функций.

**Теорема (о связи конформности и дифференцируемости):**

$U$  – область в  $\mathbb{C}$ . Если  $f \in H(U)$  и  $\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0$ , тогда  $f$  – конформное в  $U$  отображение.

□ Доказательство следует из предыдущей теоремы:

В каждой точке  $z_0 \in U$  лин.отображение  $f'(z_0)$  растигивает в  $|f'(z_0)| \neq 0$  и поворачивает на угол  $\arg f'(z_0) \Rightarrow$  лин.отображение в  $z_0$  сохраняет углы.



**Определение:** Угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $\infty$  равен углу между касательными к  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$  в точке 0, где  $\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{\gamma_1}$  и  $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{\gamma_2}$ .

Отображение  $F$  называется **конформным** в точке  $\infty$  тогда и только тогда, угол между кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в точке  $\infty$  равен углу между кривыми  $f(\gamma_1)$  и  $f(\gamma_2)$  в точке  $\infty$ .

### 3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

**Конформность:**

Любое ДЛО — конформное отображение  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

*Доказательство.*

1) Рассмотрим точки  $z_0 \neq -\frac{d}{c}, \infty$ :

$$\text{Тогда } w' = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Значит функция  $w$  голоморфна в точках  $z_0$  и по теореме о конформности голоморфных отображений, она конформна в этих точках  $z_0$ .

2) Рассмотрим точку  $z_0 = -\frac{d}{c}$ :

$$z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d} \xrightarrow{L_0} \xi = \frac{1}{w}$$

$$-\frac{d}{c} \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L_0} 0$$

Отображение  $\xi = \frac{1}{w}$  сохраняет углы, то есть  $L_0$  конформно.

Рассмотрим  $L_0 \circ L$  в точке  $z_0 = -\frac{d}{c}$ :

$$(L_0 \circ L)'_{|z=-\frac{c}{d}} = \frac{cb - ad}{(az + b)^2}_{|z=-\frac{c}{d}} \neq 0$$

Значит отображение  $L_0 \circ L$  конформно в точке  $z_0 = -\frac{c}{d}$ .  
 $L = L_0^{-1} \circ (L_0 \circ L)$  конформно, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.

3) Рассмотрим точку  $z_0 = \infty$ :

$$\xi = \frac{1}{z} \xleftarrow{L_0} z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$0 \xleftarrow{L_0} \infty \xrightarrow{L} \frac{a}{c}$$

Рассмотрим отображение  $L \circ L_0^{-1}$ :

$$w = \frac{a \cdot \frac{1}{\xi} + b}{c \cdot \frac{1}{\xi} + d} = \frac{b \cdot \xi + a}{d \cdot \xi + c}$$

$$w'_{|0} = \frac{dc - da}{(d \cdot \xi + c)^2}_{|\xi=0} \neq 0$$

Значит отображение  $L \circ L_0^{-1}$  конформно в точке  $\xi_0 = 0$ .

Тогда отображение  $L = (L \circ L_0^{-1}) \circ L_0$  конформно в точке  $z_0 = \infty$ , так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.  $\square$

### Групповое свойство ДЛО:

Совокупность всех ДЛО  $\Lambda$  образует некоммутативную группу  $(\Lambda; \circ)$  относительно операции композиции.

*Доказательство.*

0) Замкнутость:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad \xi = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$$



$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + b_1}{c_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + d_1} = \frac{a_1(az+b) + b_1(cz+d)}{c_1(az+b) + d_1(cz+d)} = \\ &= \frac{(a_1a + b_1c)z + a_1b + b_1d}{(c_1a + d_1c)z + c_1b + d_1d}\end{aligned}$$

Определитель  $\begin{vmatrix} a_1a + b_1c & a_1b + b_1d \\ c_1a + d_1c & c_1b + d_1d \end{vmatrix}$  не равен 0, так как иначе композиция ДЛО была бы отображением в одну точку, но композиция биекций есть биекция.

1) Ассоциативность выполняется, так как композиция отображений ассоциативна

2) Существование единицы:

$$E : w = z, \begin{pmatrix} a=1 & b=0 \\ c=0 & d=1 \end{pmatrix}, \det = 1 \neq 0$$

3) Существование обратного:

Пусть  $L : w = \frac{az+b}{cz+d}$  — ДЛО.

Построим обратное:

$$w(cz+d) = az+b$$

$$z(wc-a) = b-dw$$

$$L^{-1} : z = \frac{b-dw}{wc-a} \text{ — ДЛО, так как } \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$$

4) Некоммутативность:

Приведем контрпример

$$L_1 : w = z + a, \quad L_2 : w = \frac{1}{z}$$

$$L_1 \circ L_2 : z \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z} \xrightarrow{L_1} w = \frac{1}{z} + a$$

$$L_2 \circ L_1 : z \xrightarrow{L_1} w = z + a \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z+a}$$

Получили, что  $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$

□

#### 4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

**Геометрическая интерпретация:** ДЛО — взаимно-однозначное непрерывное отображение  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

##### **Теорема о трех точках**

Для любых трех различных точек  $z_1, z_2, z_3$  и других трех различных точек  $w_1, w_2, w_3$  существует единственное ДЛО  $L(z) : L(z_i) = w_i$

##### **Доказательство**

1) *Существование*

Для любых 3-х точек  $z_1, z_2, z_3$  существует ДЛО, отображающее их в  $0, \infty, 1$  соответственно:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Тогда рассмотрим отображения  $L_1 : \xi = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$  и  $L_2 :$

$\xi = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$ . Из группового свойства ДЛО следует, что  $L_2^{-1}$  — тоже ДЛО, и композиция ДЛО — тоже ДЛО. Тогда

получаем, что отображение  $L = L_2^{-1} \circ L_1$  есть ДЛО, причем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то есть  $L$  есть искомое ДЛО.

2) *Единственность* Пусть  $\lambda$  – ДЛО, отличное от  $L$ , построенного в пункте 1, удовлетворяющее условиям теоремы.

Рассмотрим отображение  $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$ . Из группового свойства ДЛО полученное отображение – ДЛО, причем

$$\mu : \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Теперь покажем, что  $\mu = id$ :

$$\mu = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$a) \mu(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$$

$$b) \mu(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$c) \mu(1) = \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d$$

В итоге получаем, что  $\mu(z) = z \Rightarrow \mu = id$ , то есть  $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = id \Rightarrow \lambda = L_2^{-1} \circ L_1 = L$ , что и требовалось доказать.

## 5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.

**Дробно-линейные отображения** — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО:  $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

### Круговое свойство ДЛО

Любое ДЛО преобразует обобщенную окружность (окружность и ли прямая в  $\overline{\mathbb{C}}$ ) в обобщенную окружность.

*Доказательство.*

1) случай, когда  $c = 0$ :

$$L : w = az + b$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = az \xrightarrow{L_2} z_2 = z_1 + b$$

$L_1$  — растяжение с поворотом: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

$L_2$  — сдвиг: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

2) случай, когда  $c \neq 0$ :

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left( \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \frac{a}{c} + \frac{caz + bz - acz - ad}{c(cz + d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

$$\text{Обозначим } A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c}, \quad C = \frac{d}{c} :$$

$$L : w = A + \frac{B}{z + C}$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = z + C \xrightarrow{L_2} z_2 = \frac{1}{z_1} \xrightarrow{L_3} z_3 = B \cdot z_2 \xrightarrow{L_4} w = A + z_3$$

Отображения  $L_1$  и  $L_4$  — сдвиги,  $L_3$  — растяжение с поворотом. Они переводят окружности в окружности, а прямые в прямые.

$$\text{Рассмотрим отображение } L_2 : w = \frac{1}{z}$$

Общее уравнение обобщённой окружности на плоскости  $xOy$ :

$$E(x^2 + y^2) + F_1x + F_2y + G = 0$$

$$E, F_1, F_2, G \in \mathbb{R}, (E, F_1, F_2, G) \neq (0, 0, 0, 0)$$

Запишем это уравнение через переменную  $z = x + iy$ :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = i \frac{\bar{z} - z}{2}$$

$$Ez\bar{z} + F_1 \frac{z + \bar{z}}{2} + F_2 i \frac{\bar{z} - z}{2} + G = 0$$

$$Ez\bar{z} + Fz + \bar{F}\bar{z} + G = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}iF_2 \in \mathbb{C}, \bar{F} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}iF_2$$

Тогда кривая, полученная в результате преобразования  $L_2$  задается уравнением:

$$E \frac{1}{z} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + F \frac{1}{z} + \bar{F} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + G = 0 \mid \cdot z\bar{z}$$

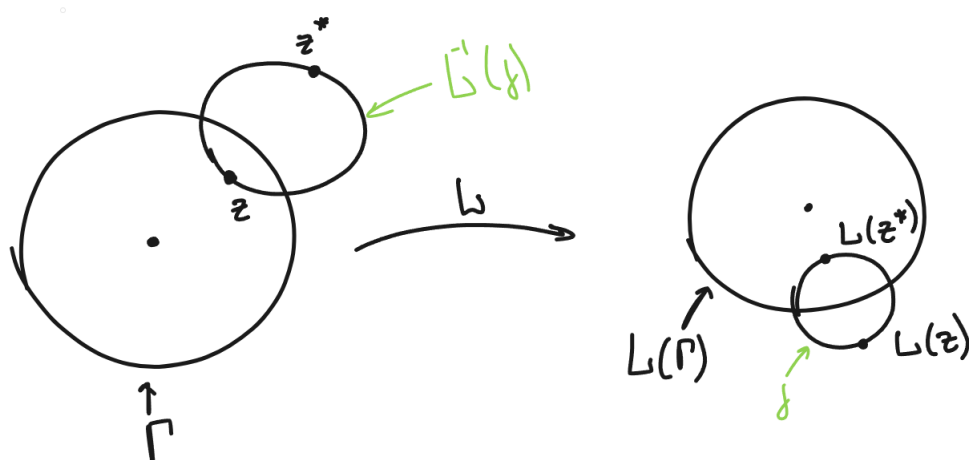
$$E + F\bar{z} + \bar{F}z + Gz\bar{z} = 0,$$

что является уравнением обобщенной окружности. Значит отображение  $L_2$  переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность.  $\square$

### Свойство ДЛО сохранения симметричности

Произвольное ДЛО  $L$  преобразует любые точки  $z$  и  $z^*$ , симметричные относительно обобщенной окружности  $\Gamma$ , в точки

$L(z)$  и  $L(z^*)$ , симметричные относительно обобщенной окружности  $L(\Gamma)$ .



*Доказательство.*

Пусть  $\gamma$  — произвольная обобщенная окружность, проходящая через точки  $L(z)$  и  $L(z^*)$ . Тогда  $L^{-1}(\gamma)$  — обобщенная окружность по круговому свойству ДЛО.

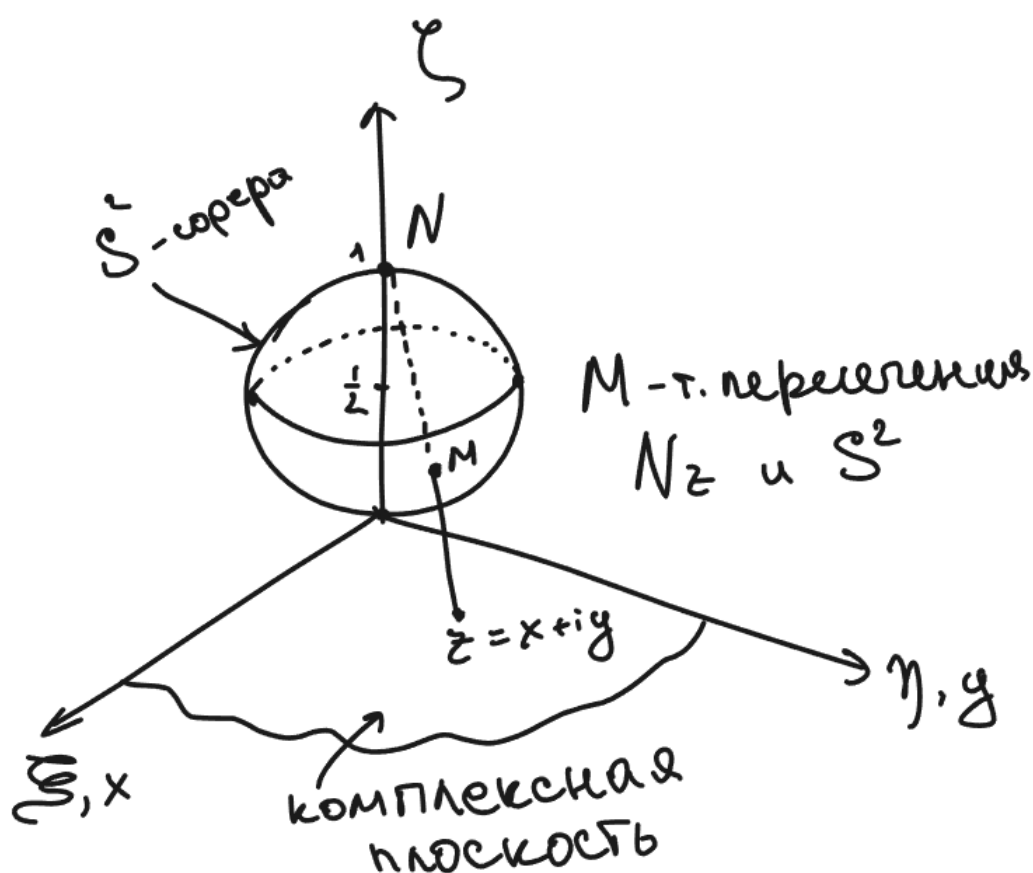
Так как  $L(z), L(z^*) \in \gamma$ , то:

$$L^{-1}(L(z)) = z \in L^{-1}(\gamma) \text{ и } L^{-1}(L(z^*)) = z^* \in L^{-1}(\gamma).$$

По определению симметричных точек окружности  $\Gamma$  и  $L^{-1}(\gamma)$  ортогональны. ДЛО  $L$  сохраняет углы, а значит  $L(\Gamma)$  ортогональна  $L(\gamma)$ .  $\square$

**6 Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.**

Выберем ДСК с осями  $\xi, \eta, \zeta$ , причем оси  $\xi, \eta$  совпадают с осями  $x, y$ . Рассмотрим сферу радиуса  $\frac{1}{2}$  в этой системе координат.



динат, которая описывается уравнением

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

а также луч, исходящий из точки  $N(0, 0, 1)$ , и пересекающий плоскость  $0xy$  в точке  $(x, y)$ , заданный параметрически:

$$\begin{cases} \xi = 0 + tx \\ \eta = 0 + ty \\ \zeta = 1 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Точка пересечения луча со сферой  $(\xi, \eta, \zeta)$  (подставляем в уравнение сферы уравнения луча):

$$\begin{aligned} t^2 x^2 + t^2 y^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ t^2(x^2 + y^2 + 1) - t &= 0 \quad | : t \neq 0 \\ t &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2} \\ \begin{cases} \xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Обратное отображение:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{|z|^2 + 1 - 1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta \\ \Rightarrow \xi &= x(1 - \zeta), \eta = y(1 - \zeta) \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{\xi}{1 - \zeta} \\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Отображения (3) и (4) являются однозначными отображениями между  $\mathbb{C}$  и  $S^2 \setminus N$ , так как в преобразованиях не возникали неоднозначности.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .  $\overline{\mathbb{C}}$  называется **расширенной комплексной плоскостью**.



**Топология  $\overline{\mathbb{C}}$ :**

Открытое множество на  $S^2 - U \cap S^2$ , где  $U$  – открытое в  $\mathbb{R}^3$ .

Условимся, что точке  $N(0, 0, 1)$  соответствует точка  $\infty$  поля  $\overline{\mathbb{C}}$ , тем самым определяется биекция между  $S^2$  и  $\overline{\mathbb{C}}$ , точка  $\infty$  называется **бесконечно удаленной точкой**.

**Окрестностью**  $U$  бесконечно удаленной точки называется множество точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > R, R \in \mathbb{R}$$

Функция  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$ , **дифференцируема в точке  $\infty$** , если функция  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  дифференцируема в нуле.

Функция  $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$ , **конформна в точке  $\infty$** , если функция  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  конформна в нуле.

## 7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$ . Его свойства.

**Путь** – параметризованная кривая, возможно с самопересечением (непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ).

Пусть  $\gamma$  – гладкий путь, то есть  $\gamma : z = z(t), t \in J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, z(t) \in \mathbb{C}, z(J) \subset \mathbb{C}$ , функция  $f(z)$  определена на  $z(J)$  и функция

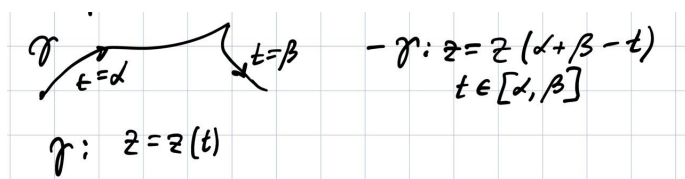
$f(z(t)) : J \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна (говорят, что  $f$  непрерывна на  $\gamma$ ).

Число  $\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt$  называют **интегралом от функции  $f$  вдоль пути  $\gamma$**  и обозначают  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , где  $z(t) = x(t) + iy(t), z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

**Свойства интеграла:**

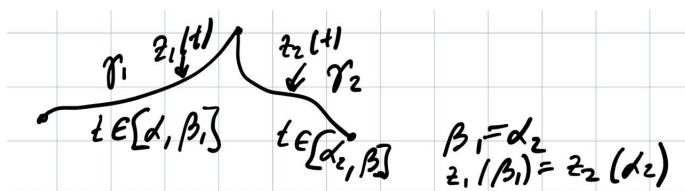
1. Линейность:  $\int_{\gamma} [af(z) + bf(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} f(z) dz;$

2. Ориентированность:



$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

3. Аддитивность:



$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : z = \begin{cases} z_1(t), t \in [\alpha, \beta_1]; \\ z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz;$$

4. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой:

Пусть  $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\gamma_1 : z = z_1(\tau), \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$  – два непрерывно дифференцируемых пути,  $z_1(\tau) = z(t(\tau)) \forall \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ , где  $t = t(\tau) : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha, \beta]$  – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция,  $f$  непрерывна на  $\gamma$ .

Тогда 
$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz;$$

5. Оценка интеграла:

Если  $f$  – непрерывная функция на кусочно-гладком пути

$$\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta], \text{ то } \left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |z'(t)| dt$$

(  $|z'(t)| dt = |dz|$  – дифференциал длины дуги).

*Доказательство.*

4. Независимость интеграла:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt =$$

$$\left| t = t(\tau), dt = t'(\tau) d\tau, \frac{dz(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz(t(\tau))}{dt} \right|$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(z))) \cdot z'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(\tau)) z'(\tau) d\tau = \int_{\gamma_1} dz$$

5. Оценка интеграла:

Пусть 
$$I = \int_{\gamma} f dz \in \mathbb{C} = |I| \cdot \exp^{i\theta}$$

$$|I| = \exp^{-i\theta} \cdot I = \int \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t) dt$$

Обозначим  $g(t) = \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t)$ .

$$\text{Тогда } |I| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} g(t) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\exp^{-i\theta}| \cdot |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt$$

□

## 8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей

### Теорема 1 (Коши для односвязной области)

Если  $D \subset \mathbb{C}$  – односвязная область,  $f \in H(D)$  ( $f$  голоморфна),  $\gamma \subset D$  – замкнутая кривая, то  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

*Доказательство.*

Для случая, когда  $f'(z)$  непрерывная в  $D$ :

$$z = x + iy; f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$I = \int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot$$

$$[x'(t) + it'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} [u \cdot x' - v \cdot y'] + i(uy' + vx') dt = \int_{\alpha}^{\beta} (ux' -$$

$$vy') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (uy' + vx') dt = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx =$$

Разрежем  $\gamma$  на простые контуры  $\gamma_i$ :

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j, G_j - \text{область внутри } \gamma_j$$

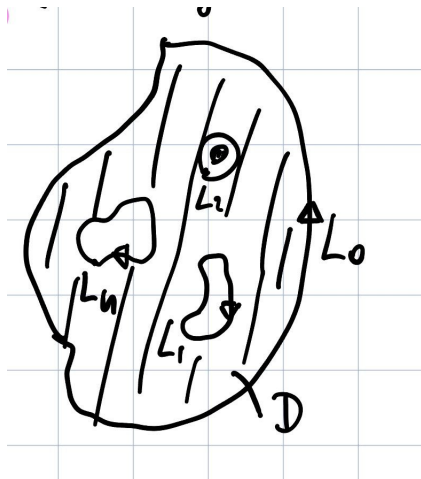
$$I = \sum_{j=1}^k \left[ \oint_{\gamma_j} u dx - v dy + i \oint_{\gamma_j} v dx + u dy \right] =$$

$$= \sum_j \left[ \iint_{G_j} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{G_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0$$

□

### Теорема 2 (Коши для многосвязной области)

Пусть многосвязная область  $D$  ограничена внешним конту-



ром  $L_0$  и внутренними контурами  $L_1, \dots, L_n$ , контуры  $L_1, \dots, L_n$  – кусочно-гладкие,  $f \in H(D \cup L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n)$ .

Тогда  $\int_L f dz = 0$ , где  $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n$ , обход  $L_0$  – против часовой стрелки,  $L_1, \dots, L_n$  – по часовой стрелке.

**Замечание.**  $\oint_{L_0} f dz = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} f dz$ , где обход  $L_0, L_1, \dots, L_n$  против часовой стрелки.

*Доказательство.*

С помощью разрезов  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  получим односвязную область  $D^*$ . Тогда  $D = D^* \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ .

Так как  $D^*$  – односвязная, то  $0 = \int_{D^*} f dz =$

Граница  $D^* = L_0 \cup \gamma_1 \cup -\gamma_1 \cup L_1 \cup \dots \cup \gamma_n \cup -\gamma_n \cup L_n$ .

Тогда из аддитивности и ориентированности:

$$= \int_{L_0} f dz + \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\gamma_i} f dz + \int_{-\gamma_i} f dz + \int_{L_i} f dz \right] = \int_L f dz = 0 \quad \square$$

## 9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных.

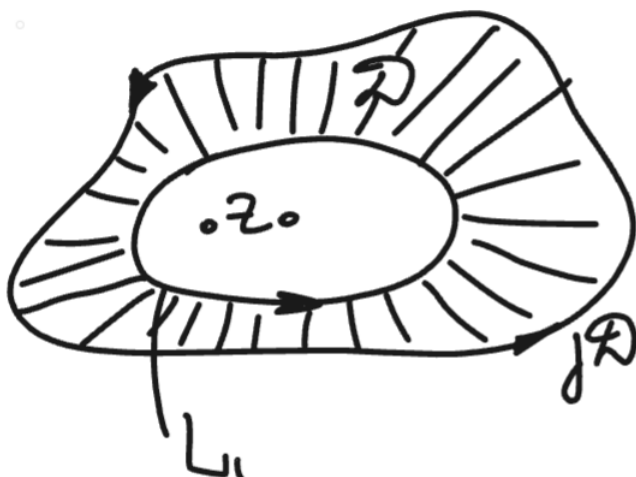
**Интегральная формула Коши для голоморфных функций:**

Пусть  $D$  — односвязная область в  $\mathbb{C}$ ,  $\partial D$  — граница  $D$ ,  $f \in H(D \cup \partial D)$ .

Тогда для  $z_0 \in D$ :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*Доказательство.*



1) Пусть  $L_1$  — простой контур,  $L_1 \subset D$

Пусть  $D_1$  — область внутри  $L_1$ ,  $G = D \setminus D_1 \setminus L_1$  — многосвязная область

По т. Коши для многосвязной области:

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

т.к.  $\frac{f(z)}{z - z_0} \in H(G)$

Имеем  $\partial G = \partial D \cup (-L_1)$ :

$$\oint \partial D \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

2) Пусть  $\gamma : z = z + r \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi], r > 0$   
 $f(z) = (z - a)^n; n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} (a + r \cdot e^{it} - a)^n \cdot r \cdot i e^{it} dt = r^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \text{ где } L_1 - \text{окр-ть с центром в точке } z_0$$

3) Пусть  $\sigma_1$  – радиус  $L_1$  и  $L_1 \subset D$

$$I = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi|i|} \oint_{L_1} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |z'(t)| dt$$

4) Так как  $f \in H(D)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Имеем  $z \in L_1 : |z - z_0| = \sigma_1$ :

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\sigma_1} : \oint_{L_1} |z'(t)| dt - \text{длина } L_1, \text{ то есть } 2\pi\sigma_1$$

Тогда  $I \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma_1} \cdot 2\pi\sigma_1 = \varepsilon \Rightarrow$  не зависит от  $\varepsilon$

□

### Интегральная формула Коши для производных:

Пусть  $f \in H(D) : G \cup \partial G \subset D; D$  — область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых,  $z_0 \in G$



Тогда:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

*Доказательство.*

По теоремам о разложении голоморфной функции в степенной ряд и теореме о единственности разложения в степенной ряд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \oint_{\gamma_r} \dots = \oint_{\gamma_G} \quad \square$$

