Комплексный анализ, ФН-12, ИУ-9, 4-й семестр. Ответы на вопросы к экзамену

Весна 2024

Содержание

1 Непрерывность и дифференцируемость функций коплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции. 3

2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры. 6

3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО. 8

4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек. 11

5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности. 13

6 Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости. 16

7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$. Его свойства. 19

8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей 22

9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных. 24

10 Степенные ряды в $\mathbb{C}$, их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда. 27

1 Непрерывность и дифференцируемость функций коплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции.

ФКП $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ **непрерывна** в точке z_0, если:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ФКП $f(z)$ **$\mathbb{C}$–дифференцируема в точке** $z_0 \Leftrightarrow$

1. f определена в окрестности точки z_0;
2. $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$,

где $A \in \mathbb{C}$, $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$

Предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ называют **производной ФКП** $f(z)$ **в точке** z_0 и обозначают $f'(z_0)$.

Теорема (1-ый критерий $\mathbb{C}$–дифференцируемости):

ФКП $f(z)$ дифференцируема в точке z_0

$\Leftrightarrow$

$\exists$ производная $f'(z_0)$ функции f в точке z_0, при этом $f'(z_0) = A$.

Доказательство.

"$\Rightarrow$"

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (A + \alpha(\Delta z)) = A \ (\alpha(\Delta z) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists f'(z_0) = A.$$

"$\Leftarrow$"

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z.$$ □

Функция $w = f(z)$ называется **голоморфной (аналитической)** в точке $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f$ – $\mathbb{C}$ – дифференцируема в окрестности точки z_0.

Теорема (об условиях Коши-Римана):

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, $\mathbb{C}$ – дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда:

1. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ $\mathbb{R}^2$ – дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$;

2. Выполняются условия (уравнения) Коши-Римана:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) \end{cases}$$

При этом $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$.

Доказательство.

"$\Rightarrow$"

$\Delta f(z_0, \Delta z) = A\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z$, но при этом:

$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) =$

$= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \gamma(\Delta z)\Delta z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + Re(\gamma(\Delta z)\Delta z) \\ \Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + Im(\gamma(\Delta z)\Delta z), \end{cases}$$

где $\dfrac{\gamma(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|} \to 0$ при $\Delta z \to 0$ $((\Delta x, \Delta y) \to 0)$, так как $\gamma(\Delta z) \to 0$, а $\dfrac{\Delta z}{|\Delta z|}$ – ограничена при $\Delta z \to 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} Re(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \\ Im(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow 1);$$

$$\begin{cases} \Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = \alpha = v'_y \\ u'_y = -\beta = -v'_x \end{cases} \Rightarrow 2)$$

Тогда $f'_z = \alpha + i\beta \Rightarrow \Rightarrow f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$

“$\Leftarrow$:” Аналогично $\square$

2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.

Пусть задана кривая $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, имеющая касательную в точке t_0 с направляющим вектором $\xi = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Назовем ξ касательным вектором в точке t_0 к кривой z.

Теорема (геометрический смысл комплексной производной):

1. Любая голоморфная в т. $z_0 = z(t_0)$ функция f определяет линейное отображение касательных касательных векторов $\eta = f'(z_0)\xi$, где η – образ касательного вектора ξ, являющийся касательным вектором к кривой $f(z)$ в точке $f(z_0)$.
2. Это отображение касательных векторов состоит в растяжении с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороте на угол $arg f'(z_0)$.

□ а) По правилу дифференцирования сложной функции (в смысле $\mathbb{R}^2$)

$$\eta = \frac{df(z(t))}{dt}(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)\xi$$

б) $|\eta| = |f'(z_0)| \cdot |\eta|$ – растяжение с коэффициентом $|f'(z_0)|$; $arg\eta = arg f'(z_0) + arg\xi \pm 2\pi$ – поворот на угол $arg f'(z_0)$. ■

Отображение F называется **конформным** в точке $M_0(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда касательное отображение в точке M_0 сохраняет углы.

Отображение F называется **конформным** в области $U \subset \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда оно конформно в любой из точек U.

$U \subset \mathbb{C}$, $H(U)$ – множество голоморфных в U функций.

Теорема (о связи конформности и диффиренцируемости):
U – область в $\mathbb{C}$. Если $f \in H(U)$ и $\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0$, тогда f – конформное в U отображение.

$\square$ Доказательство следует из предыдущей теоремы:
В каждой точке $z_0 \in U$ лин.отображение $f'(z_0)$ растигивает в $|f'(z_0)| \neq 0$ и поворачивает на угол $arg\, f'(z_0) \Rightarrow$ лин.отображение в z_0 сохраняет углы.

$\blacksquare$

Определение: Угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равнен углу между касательными к $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ в точке 0, где $\hat{\gamma}_1 = \dfrac{1}{\gamma_1}$ и $\hat{\gamma}_2 = \dfrac{1}{\gamma_2}$.

Отображение F называется **конформным** в точке ∞ тогда и только тогда, угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равен углу между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке ∞.

3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \ a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : \ w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty : \ w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c}, \ c \neq 0 \\ \infty, \ c = 0 \end{array} \right.$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Конформность:

Любое ДЛО — конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Доказательство.

1) Рассмотрим точки $z_0 \neq -\frac{d}{c}, \ \infty :$

Тогда $w' = \dfrac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

Значит функция w голоморфна в точках z_0 и по теореме о конформности голоморфных отображений, она конформна в этих точках z_0.

2) Рассмотрим точку $z_0 = -\frac{d}{c}$:

$$z \xrightarrow{L} w = \frac{az+b}{cz+d} \xrightarrow{L_0} \xi = \frac{1}{w}$$

$$-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}} \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L_0} \mathbf{0}$$

Отображение $\xi = \dfrac{1}{w}$ сохраняет углы, то есть L_0 конформно.

Рассмотрим $L_0 \circ L$ в точке $z_0 = -\dfrac{d}{c}$:

$$(L_0 \circ L)'_{|z=-\frac{c}{d}} = \frac{cb - ad}{(az+b)^2}_{|z=-\frac{c}{d}} \neq 0$$

Значит отображение $L_0 \circ L$ конформно в точке $z_0 = -\dfrac{c}{d}$
$L = L_0^{-1} \circ (L_0 \circ L)$ конформно, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.

3) Рассмотрим точку $z_0 = \infty$:

$$\xi = \frac{1}{z} \xleftarrow{L_0} z \xrightarrow{L} w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{L_0} \infty \xrightarrow{L} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$

Рассмотрим отображение $L \circ L_0^{-1}$:

$$w = \frac{a \cdot \frac{1}{\xi} + b}{c \cdot \frac{1}{\xi} + d} = \frac{b \cdot \xi + a}{d \cdot \xi + c}$$

$$w'_{|0} = \frac{dc - da}{(d \cdot \xi + c)^2}_{|\xi=0} \neq 0$$

Значит отображение $L \circ L_0^{-1}$ конформно в точке $\xi_0 = 0$.
Тогда отображение $L = (L \circ L_0^{-1}) \circ L_0$ конформно в точке $z_0 = \infty$, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны. □

Групповое свойство ДЛО:

Совокупность всех ДЛО Λ образует некоммутативную группу $(\Lambda; \circ)$ относительно операции композиции.

Доказательство.

0) Замкнутость:

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $\xi = \dfrac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$

$$\xi = \frac{a_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + b_1}{c_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + d_1} = \frac{a_1(az+b) + b_1(cz+d)}{c_1(az+b) + d_1(cz+d)} =$$
$$= \frac{(a_a + b_1 c)z + a_1 b + b_1 d}{(c_1 a + d_1 c)z + c_1 b + d_1 d}$$

Определитель $\begin{vmatrix} a_1 a + b_1 c & a_1 b + b_1 d \\ c_1 a + d_1 c & c_1 b + d_1 d \end{vmatrix}$ не равен 0, так как иначе композиция ДЛО была бы отображением в одну точку, но композиция биекций есть биекция.

1) Ассоциативность выполняется, так как композиция отображений ассоциативна

2) Существование единицы:

$E: \ w = z, \ \begin{pmatrix} a = 1 & b = 0 \\ c = 0 & d = 1 \end{pmatrix}, \ det = 1 \neq 0$

3) Существование обратного:

Пусть $L: \ w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ — ДЛО.

Построим обратное:

$$w(cz+d) = az+b$$
$$z(wc-a) = b - dw$$
$$L^{-1}: \ z = \frac{b-dw}{wc-a} \text{ — ДЛО, так как } \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

4) Некоммутативность:

Приведем контрпример

$$L_1: \ w = z + a, \ L_2: \ w = \frac{1}{z}$$
$$L_1 \circ L_2: \ z \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z} \xrightarrow{L_1} w = \frac{1}{z} + a$$
$$L_2 \circ L_1: \ z \xrightarrow{L_1} w = z + a \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z+a}$$

Получили, что $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$ □

4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \ a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : \ w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty : \ w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c}, \ c \neq 0 \\ \infty, \ c = 0 \end{array} \right.$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Геометрическая интерпретация: ДЛО — взаимно-однозначное непрерывное отображение $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Теорема о трех точках

Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 и других трех различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛО $L(z) : L(z_i) = w_i$

Доказательство

1) *Существование*

Для любых 3-х точек z_1, z_2, z_3 существует ДЛО, отображающее их в $0, \infty, 1$ соответственно:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Тогда рассмотрим отображения $L_1 : \xi = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ и $L_2 :$ $\xi = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$. Из группового свойства ДЛО следует, что L_2^{-1} – тоже ДЛО, и композиция ДЛО – тоже ДЛО. Тогда получаем, что отображение $L = L_2^{-1} \circ L_1$ есть ДЛО, причем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то есть L есть искомое ДЛО.

2) *Единственность* Пусть λ – ДЛО, отличное от L, построенного в пункте 1, удовлетворяющее условиям теоремы. Рассмотрим отображение $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$. Из группового свойства ДЛО полученное отображение – ДЛО, причем

$$\mu : \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Теперь покажем, что $\mu = id$:

$\mu = \dfrac{az + b}{cz + d}$

a) $\mu(\infty) = \dfrac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$

b) $\mu(0) = \dfrac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$

c) $\mu(1) = \dfrac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d$

В итоге получаем, что $\mu(z) = z \Rightarrow \mu = id$, то есть $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = id \Rightarrow \lambda = L_2^{-1} \circ L_1 = L$, что и требовалось доказать.

5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \ a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c}: \ w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty: \ w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c}, \ c \neq 0 \\ \infty, \ c = 0 \end{array}\right.$$

Тогда ДЛО: $w: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Круговое свойство ДЛО

Любое ДЛО преобразует обобщенную окружность (окружность и ли прямая в $\overline{\mathbb{C}}$) в обобщенную окружность.

Доказательство.

1) случай, когда $c = 0$:

$L: \ w = az + b$

$z \xrightarrow{L_1} z_1 = az \xrightarrow{L_2} z_2 = z_1 + b$

L_1 — растяжение с поворотом: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

L_2 — сдвиг: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

2) случай, когда $c \neq 0$:

$$L: \ w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{caz+bz-acz-ad}{c(cz+d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{z+\frac{d}{c}}$$

Обозначим $A = \dfrac{a}{c}, \ B = \dfrac{bc-ad}{c}, \ C = \dfrac{d}{c}$:

$L: \ w = A + \dfrac{B}{z + C}$

$z \overset{L_1}{\to} z_1 = z + C \overset{L_2}{\to} z_2 = \dfrac{1}{z_1} \overset{L_3}{\to} z_3 = B \cdot z_2 \overset{L_4}{\to} w = A + z_3$

Отображения L_1 и L_4 — сдвиги, L_3 — растяжение с поворотом. Они переводят окружности в окружности, а прямые в прямые.

Рассмотрим отображение $L_2: \ w = \dfrac{1}{z}$

Общее уравнение обобщённой окружности на плоскости xOy:

$$E(x^2 + y^2) + F_1 x + F_2 y + G = 0$$

$$E, F_1, F_2, G \in \mathbb{R}, \ (E, F_1, F_2, G) \neq (0, 0, 0, 0)$$

Запишем это уравнение через переменную $z = x + iy$:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \ y = \frac{z - \overline{z}}{2i} = i\frac{\overline{z} - z}{2}$$

$$Ez\overline{z} + F_1\frac{z + \overline{z}}{2} + F_2 i\frac{\overline{z} - z}{2} + G = 0$$

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}iF_2 \in \mathbb{C}, \ \overline{F} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}iF_2$$

Тогда кривая, полученная в результате преобразования L_2 задается уравнением:

$$E\frac{1}{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + F\frac{1}{z} + \overline{F}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + G = 0 \Big| \cdot z\overline{z}$$

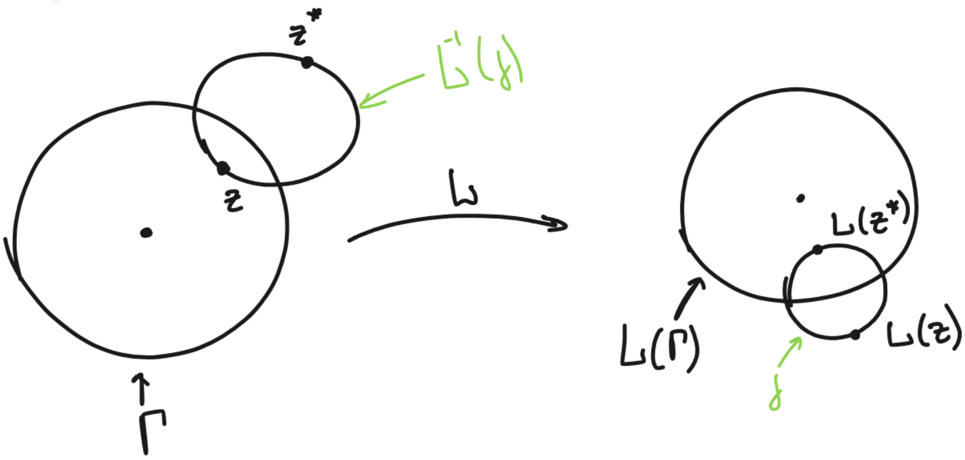
$$E + F\overline{z} + \overline{F}z + Gz\overline{z} = 0,$$

что является уравнением обобщенной окружности. Значит отображение L_2 переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность. $\square$

Свойство ДЛО сохранения симметричности

Произвольное ДЛО L преобразует любые точки z и z^*, симметричные относительно обобщенной окружности Γ, в точки

$L(z)$ и $L(z^*)$, симметричные относительно обобщенной окружности $L(\Gamma)$.



Доказательство.

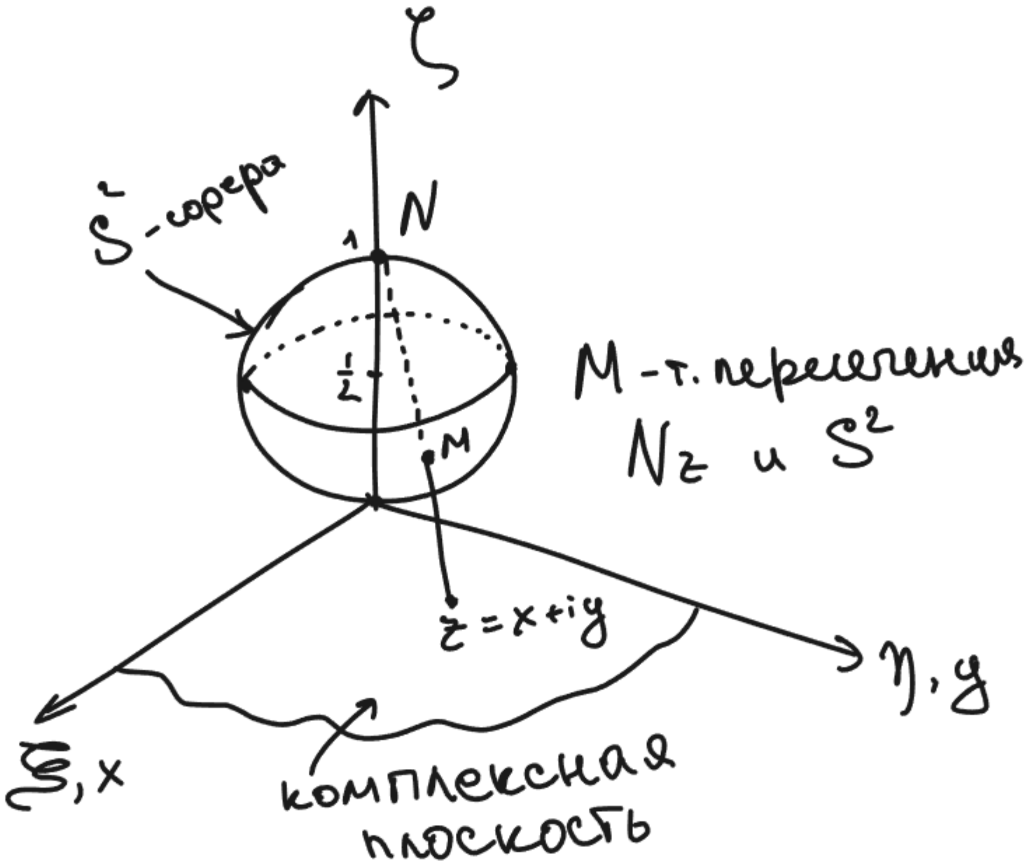
Пусть γ — произвольная обобщенная окружность, проходящая через точки $L(z)$ и $L(z^*)$. Тогда $L^{-1}(\gamma)$ — обобщенная окружность по круговому свойству ДЛО.

Так как $L(z)$, $L(z^*) \in \gamma$, то:
$L^{-1}(L(z)) = z \in L^{-1}(\gamma)$ и $L^{-1}(L(z^*)) = z^* \in L^{-1}(\gamma)$.

По определению симметричных точек окружности Γ и $L^{-1}(\gamma)$ ортогональны. ДЛО L сохраняет углы, а значит $L(\Gamma)$ ортогональна $L(\gamma)$. □

6 Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.

Выберем ДСК с осями ξ, η, ζ, причем оси ξ, η совпадают с осями x, y. Рассмотрим сферу радиуса $\dfrac{1}{2}$ в этой системе коор-



динат, которая описывается уравнением

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

а также луч, исходящий из точки $N(0,0,1)$, и пересекающий плоскость $0xy$ в точке (x,y), заданный параметрически:

$$\begin{cases} \xi = 0 + tx \\ \eta = 0 + ty \\ \zeta = 1 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Точка пересечения луча со сферой (ξ, η, ζ) (подставляем в уравнение сферы уравнения луча):

$$t^2x^2 + t^2y^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) - t = 0 \quad | : t \neq 0$$

$$t = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases} \tag{3}$$

Обратное отображение:

$$\zeta = \frac{|z|^2 + 1 - 1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta$$

$$\Rightarrow \xi = x(1 - \zeta), \eta = y(1 - \zeta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{1 - \zeta} \\ y = \dfrac{\eta}{1 - \zeta} \end{cases} \tag{4}$$

Отображения (3) и (4) являются однозначными отображениями между $\mathbb{C}$ и $S^2 \setminus N$, так как в преобразованиях не возникали неоднозначности.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}$ называется **расширенной комплексной плоскостью**.

Топология $\overline{\mathbb{C}}$:

Открытое множество на S^2 – $U \cap S^2$, где U – открытое в $\mathbb{R}^3$.

Условимся, что точке $N(0,0,1)$ соответствует точка ∞ поля $\overline{\mathbb{C}}$, тем самым определяется биекция между S^2 и $\overline{\mathbb{C}}$, точка ∞ называется **бесконечно удаленной точкой**.

Окрестностью U бесконечно удаленной точки называется множество точек z, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > R, R \in \mathbb{R}$$

Функция $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in U$, **дифференцируема в точке** ∞, если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ дифференцируема в нуле.

Функция $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in U$, **конформна в точке** ∞, если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформна в нуле.

7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$. Его свойства.

Путь – параметризованная кривая, возможно с самопересечением (непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

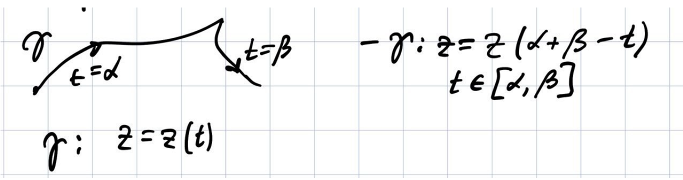
Пусть γ – гладкий путь, то есть $\gamma : z = z(t)$, $t \in J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $z(t) \in \mathbb{C}$, $z(J) \subset \mathbb{C}$, функция $f(z)$ определена на $z(J)$ и функция
$f(z(t)) : J \to \mathbb{C}$ непрерывна (говорят, что f непрерывна на γ).

Число $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$ называют **интегралом от функции f вдоль пути γ** и обозначают $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$, $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Свойства интеграла:

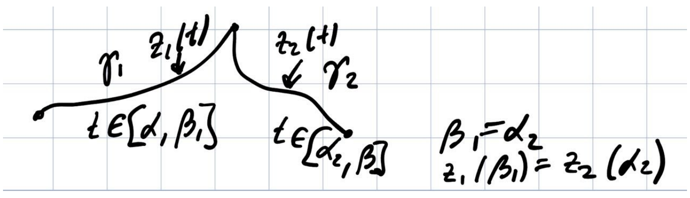
1. Линейность: $\displaystyle\int_\gamma [af(z)+bf(z)]\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma f(z)\,dz$;

2. Ориентированность:



$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz;$$

3. Аддитивность:



$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : z = \begin{cases} z_1(t), t \in [\alpha, \beta_1]; \\ z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz;$$

4. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой:
   Пусть $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma_1 : z = z_1(\tau)$, $\tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ – два непрерывно дифференцируемых пути, $z_1(\tau) = z(t(\tau))$ $\forall \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$, где $t = t(\tau) : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция, f непрерывна на γ.
   Тогда $\displaystyle\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz;$
5. Оценка интеграла:
   Если f – непрерывная функция на кусочно-гладком пути $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то $\displaystyle|\int_{\gamma} f\,dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)||z'(t)|\,dt$
   ($|z'(t)|dt = |dz|$ – дифференциал длины дуги).

Доказательство.

4. Независимость интеграла:

$$\int\limits_{\gamma} f dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt =$$

$$\left| t = t(\tau),\ dt = t'(\tau)d\tau,\ \frac{dz(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dz(t(\tau))}{dt} \right|$$

$$= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(z))) \cdot z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(\tau))z'(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_1} dz$$

5. Оценка интеграла:

Пусть $\displaystyle I = \int\limits_{\gamma} f dz \in \mathbb{C} = |I| \cdot \exp^{i\theta}$

$|I| = \exp^{-i\theta} \cdot I = \int \exp^{-i\theta} f[z(t)]z'(t)dt$

Обозначим $g(t) = \exp^{-i\theta} f[z(t)]z'(t)$.

Тогда $|I| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Re\, g(t)dt + i \int\limits_{\alpha}^{\beta} Im\, g(t)dt \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |g(t)|dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\exp^{-i\theta}| \cdot |f(z(t))| \cdot |z'(t)|dt$ $\square$

8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей

Теорема 1 (Коши для односвязной области)

Если $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $f \in H(D)$ (f голоморфна), $\gamma \subset D$ – замкнутая кривая, то $\int_\gamma f\,dz = 0$.

Доказательство.

Для случая, когда $f'(z)$ непрерывная в D:

$z = x + iy$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$I = \int\limits_\gamma f dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int [u(zx(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot$$

$$[x'(t) + it'(t)]dt = \int\limits_\alpha^\beta [u \cdot x' - v \cdot y') + i(uy' + vx')]dt = \int\limits_\alpha^\beta (ux' -$$

$$vy')dt + i\int\limits_\alpha^\beta (uy' + vx')dt = \int\limits_\gamma udx - vdy + i\int\limits_\gamma udy + vdx =$$

Разрежем γ на простые контуры γ_i:

$\gamma = \bigcup\limits_{j=1}^k \gamma_j$, G_j – область внутри γ_j

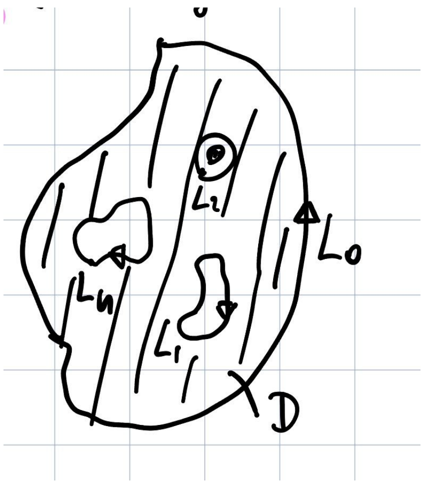
$$I = \sum_{j=1}^k \left[\oint\limits_{\gamma_j} u\,dx - v\,dy + i\oint\limits_{\gamma_j} v\,dx + u\,dy \right] =$$

$$= \sum_j \left[\iint\limits_{G_j} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i\iint\limits_{G_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy \right] = 0$$

□

Теорема 2 (Коши для многосвязной области)

Пусть многосвязная область D ограничена внешним конту-



ром L_0 и внутренними контурами L_1, ..., L_n, контуры L_1, ..., L_n – кусочно-гладкие, $f \in H(D \cup L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n)$.

Тогда $\displaystyle\int_L f\,dz = 0$, где $L = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n$, обход L_0 – против часовой стрелки, L_1, ..., L_n – по часовой стрелке.

Замечание. $\displaystyle\oint_{L_0} f\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} f\,dz$, где обход L_0, L_1, ..., L_n против часовой стрелки.

Доказательство.

С помощью разрезов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ получим односвязную область D^*. Тогда $D = D^* \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$.

Так как D^*–односвязная, то $0 = \displaystyle\int_{D^*} f dz =$

Граница $D^* = L_0 \cup \gamma_1 \cup -\gamma_1 \cup L_1 \cup \ldots \cup \gamma_n \cup -\gamma_n \cup L_n$.

Тогда из аддитивности и ориентированности:

$$= \int_{L_0} f dz + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\gamma_i} f dz + \int_{-\gamma_i} f dz + \int_{L_i} f dz \right] = \int_L f dz = 0 \quad \square$$

9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных.

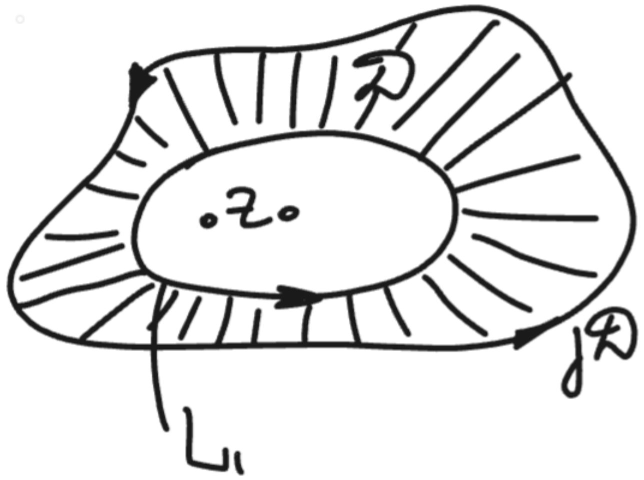
Интегральная формула Коши для голоморфных функций:

Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, ∂D — граница D, $f \in H(D \cup \partial D)$.

Тогда для $z_0 \in D$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство.



1) Пусть L_1 – простой контур, $L_1 \subset D$

Пусть D_1 – область внутри L_1, $G = D \backslash D_1 \backslash L_1$ – многосвязная область

По т. Коши для многосвязной области:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

т.к. $\dfrac{f(z)}{z - z_0} \in H(G)$

Имеем $\partial G = \partial D \cup (-L_1)$:

$$\oint \partial D \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$$

2) Пусть $\gamma: \ z = z + r\cdot e^{it}, \ t \in [0, 2\pi], \ r > 0$
$f(z) = (z-a)^n; \ n \in \mathbb{Z}$

$$\int\limits_\gamma (z-a)^n dz = \int\limits_0^{2\pi} (a+r\cdot e^{it}-a)^n \cdot r \cdot ie^{it}dt = r^{n+1}\cdot i \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{it(n+1)}dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow \oint\limits_{L_1} \dfrac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, где L_1 – окр-ть с центром в точке z_0

3) Пусть σ_1 – радиус L_1 и $L_1 \subset D$

$$I = \left| \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\right| = \left| \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1} \frac{f)(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{dz}{z-z_0}\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi |i|}\oint\limits_{L_1} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| z'(t)dt$$

4) Так как $f \in H(D)$, то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ |z-z_0| < \delta \to |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$
Имеем $z \in L_1: \ |z-z_0| = \sigma_1$:
$\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sigma_1}: \ \oint\limits_{L_1} |z'(t)|dt$ – длина L_1, то есть $2\pi\sigma_1$

Тогда $I \leq \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\gamma_1}\cdot 2\pi\sigma_1 = \varepsilon \Rightarrow$ не зависит от ε

$\square$

Интегральная формула Коши для производных:

Пусть $f \in H(D): \ G \cup \partial G \subset D; \ D$ — область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых, $z_0 \in G$

Тогда:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Доказательство.

По теоремам о разложении голоморфной функции в степенной ряд и теореме о единственности разложения в степенной ряд:

$c_n = \dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma r} \dfrac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \oint\limits_{\gamma r} ... = \oint\limits_{\gamma G}$ □

10 Степенные ряды в $\mathbb{C}$, их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ — **степенной** ряд, $c_n \in \mathbb{C}$.

Свойства:

1. Теорема Абеля:

   Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке z_1, то этот ряд сходится в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < |z_1-z_0|\}$ и на любм компакте $K \subset U$ он сходится равномерно.

2. Теорема Коши-Адамара:

   Пусть для ряда $A : \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{1}{R}$, где $, \leq R \leq \infty$.
   Тогда в любой точке $z : \ |z-z_0| < R$ ряд сходится и в любой точке $z : \ |z-z_0| > R$ ряд расходится.

Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}$ $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Тогда $S \in H(U_R(z_0))$ и $S'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}$ $(*)$

Доказательство.
$r : \ 0 < r < R$ – произвольные.
Пусть $z_1 \in U_R(z_0) : \ |z-z_0| > r$
$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z-z_0| < r\} :$
$|n \cdot C_n(z-z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \dfrac{(z-z_0)^{n-1}}{(z_1-z_0)^n} \right| \cdot |(z_1-z_0)^n| = n \dfrac{1}{|z_1-z_0|} \cdot$

$$|C_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^{n-1}\leq n\frac{M}{|z_1-z_0|}\rho^{n-1},$$

где $M>|C_n(z_1-z_0)^n|$, $\rho=\left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|$

То есть ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{M}{|z_1-z_0|}\rho^{n-1}=\frac{M}{|z_1-z_0|}\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n-1}$ – мажорирующий для ряда $(*)$.

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n-1}$ сходится при $\rho\in(0;1)$ как ряд из производных ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $(*)$ сходится равномерно и абсолютно в $U_r(z_0)$.

Для любой замкнутой кривой $\gamma\subset U_r(z_0)$ по теореме Коши:

$$\oint\limits_{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(z-z_0)^{n-1}\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\oint\limits_{\gamma}(z-z_0)^{n-1}dz=0$$

Значит функция $g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot C_n(z-z_0)^{n-1}$ имеет первообразную в $U_r(z_0)$, которая равна:

$$\int\limits_{z_0}^{z}g(\xi)d\xi=\int\limits_{z_0}^{z}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot C_n(\xi-z_0)^{n-1}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\frac{(z-z_0)^n}{n}=$$

$S(z)-S(z_0)=S(z)-C_0$.

Следовательно $S\in H(U_r(z_0))\forall r\in(0;R)$.

Поэтому $S\in H(U_R(z_0))$ и $S'=g$. $\square$

Следствия из этой теоремы:

1. Производная функции $f\in H(d)$ голоморфна в D
2.