

Комплексный анализ, ФН-12, ИУ-9, 4-й семестр.

Ответы на вопросы к экзамену

Весна 2024

Содержание

1	Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции.	4
2	Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.	7
3	Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.	9
4	Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.	12
5	Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.	14
6	Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.	17
7	Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в \mathbb{C} . Его свойства.	20
8	Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей	23
9	Интегральная формула Коши для функции и ее производных.	25
10	Степенные ряды в \mathbb{C} , их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.	28
11	Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.	31
12	Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.	33
13	Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.	37
14	Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.	39
15	Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеристикация в терминах ряда Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.	43

16 Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.	48
17 Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки ∞ . Вычет в бесконечности.	52
18 Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.	57
19 Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.	61
20 Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана-Шварца, принцип соответствия границ с обратным принципом соответствия границ.	64
21 Вычисление несобственных интегралов с использованием вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.	66
22 Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.	69
23 Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.	72
24 Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.	74

1 Непрерывность и дифференцируемость функций комплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голomorphic функции.

ФКП $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ непрерывна в точке z_0 , если:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ФКП $f(z)$ \mathbb{C} -дифференцируема в точке $z_0 \Leftrightarrow$

1. f определена в окрестности точки z_0 ;
2. $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$,

где $A \in \mathbb{C}$, $\alpha(\Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$

Предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ называют производной ФКП $f(z)$ в точке z_0 и обозначают $f'(z_0)$.

Теорема (1-ый критерий \mathbb{C} -дифференцируемости):

ФКП $f(z)$ дифференцируема в точке z_0

\Leftrightarrow

\exists производная $f'(z_0)$ функции f в точке z_0 , при этом $f'(z_0) = A$.

Доказательство.

” \Rightarrow ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta z)) = A \quad (\alpha(\Delta z) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists f'(z_0) = A. \end{aligned}$$

” \Leftarrow ”

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \\ \alpha(\Delta z) &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z. \end{aligned}$$

□

Функция $w = f(z)$ называется **голоморфной (аналитической)** в точке $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f - \mathbb{C}$ – дифференцируема в окрестности точки z_0 .

Теорема (об условиях Коши-Римана):

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, \mathbb{C} – дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда:

1. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ \mathbb{R}^2 – дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$;
2. Выполняются условия (уравнения) Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) \end{cases}$$

При этом $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$.

Доказательство.

” \Rightarrow ”

$\Delta f(z_0, \Delta z) = A\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z$, но при этом:

$$\begin{aligned} \Delta f(z_0, \Delta z) &= \Delta u(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = \\ &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \gamma(\Delta z)\Delta z \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) \\ \Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z), \end{cases}$$

где $\frac{\gamma(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|} \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$ ($(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$), так как

$\gamma(\Delta z) \rightarrow 0$, а $\frac{\Delta z}{|\Delta z|}$ – ограничена при $\Delta z \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \\ \operatorname{Im}(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow 1);$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} u'_x = \alpha = v'_y \\ u'_y = -\beta = -v'_x \end{cases} \Rightarrow 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f'_z = \alpha + i\beta \Rightarrow \Rightarrow f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \\ & \frac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \end{aligned}$$

“ \Leftarrow .” Аналогично

□

2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.

Пусть задана кривая $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, имеющая касательную в точке t_0 с направляющим вектором $\xi = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Назовем ξ касательным вектором в точке t_0 к кривой z .

Теорема (геометрический смысл комплексной производной):

1. Любая голоморфная в т. $z_0 = z(t_0)$ функция f определяет линейное отображение касательных касательных векторов $\eta = f'(z_0)\xi$, где η – образ касательного вектора ξ , являющийся касательным вектором к кривой $f(z)$ в точке $f(z_0)$.
2. Это отображение касательных векторов состоит в растяжении с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороте на угол $\arg f'(z_0)$.

□ а) По правилу дифференцирования сложной функции (в смысле \mathbb{R}^2)

$$\eta = \frac{df(z(t))}{dt}(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)\xi$$

б) $|\eta| = |f'(z_0)| \cdot |\xi|$ – растяжение с коэффициентом $|f'(z_0)|$;
 $\arg \eta = \arg f'(z_0) + \arg \xi \pm 2\pi$ – поворот на угол $\arg f'(z_0)$. ■

Отображение F называется **конформным** в точке $M_0(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда касательное отображение в точке M_0 сохраняет углы.

Отображение F называется **конформным** в области $U \subset \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда оно конформно в любой из точек U .

$U \subset \mathbb{C}$, $H(U)$ – множество голоморфных в U функций.

Теорема (о связи конформности и дифференцируемости):

U – область в \mathbb{C} . Если $f \in H(U)$ и $\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0$, тогда f – конформное в U отображение.

□ Доказательство следует из предыдущей теоремы:

В каждой точке $z_0 \in U$ лин.отображение $f'(z_0)$ растигивает в $|f'(z_0)| \neq 0$ и поворачивает на угол $\arg f'(z_0) \Rightarrow$ лин.отображение в z_0 сохраняет углы.



Определение: Угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равен углу между касательными к $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ в точке 0, где $\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{\gamma_1}$ и $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{\gamma_2}$.

Отображение F называется **конформным** в точке ∞ тогда и только тогда, угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равен углу между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке ∞ .

3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Конформность:

Любое ДЛО — конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Доказательство.

1) Рассмотрим точки $z_0 \neq -\frac{d}{c}, \infty$:

$$\text{Тогда } w' = \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Значит функция w голоморфна в точках z_0 и по теореме о конформности голоморфных отображений, она конформна в этих точках z_0 .

2) Рассмотрим точку $z_0 = -\frac{d}{c}$:

$$z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d} \xrightarrow{L_0} \xi = \frac{1}{w}$$

$$-\frac{d}{c} \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L_0} 0$$

Отображение $\xi = \frac{1}{w}$ сохраняет углы, то есть L_0 конформно.

Рассмотрим $L_0 \circ L$ в точке $z_0 = -\frac{d}{c}$:

$$(L_0 \circ L)'_{|z=-\frac{c}{d}} = \frac{cb - ad}{(az + b)^2}_{|z=-\frac{c}{d}} \neq 0$$

Значит отображение $L_0 \circ L$ конформно в точке $z_0 = -\frac{c}{d}$.
 $L = L_0^{-1} \circ (L_0 \circ L)$ конформно, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.

3) Рассмотрим точку $z_0 = \infty$:

$$\xi = \frac{1}{z} \xleftarrow{L_0} z \xrightarrow{L} w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$0 \xleftarrow{L_0} \infty \xrightarrow{L} \frac{a}{c}$$

Рассмотрим отображение $L \circ L_0^{-1}$:

$$w = \frac{a \cdot \frac{1}{\xi} + b}{c \cdot \frac{1}{\xi} + d} = \frac{b \cdot \xi + a}{d \cdot \xi + c}$$

$$w'_{|0} = \frac{dc - da}{(d \cdot \xi + c)^2}_{|\xi=0} \neq 0$$

Значит отображение $L \circ L_0^{-1}$ конформно в точке $\xi_0 = 0$.

Тогда отображение $L = (L \circ L_0^{-1}) \circ L_0$ конформно в точке $z_0 = \infty$, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны. \square

Групповое свойство ДЛО:

Совокупность всех ДЛО Λ образует некоммутативную группу $(\Lambda; \circ)$ относительно операции композиции.

Доказательство.

0) Замкнутость:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad \xi = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$$

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a_1 \cdot \frac{az+b}{cz+d} + b_1}{c_1 \cdot \frac{az+b}{cz+d} + d_1} = \frac{a_1(az+b) + b_1(cz+d)}{c_1(az+b) + d_1(cz+d)} = \\ &= \frac{(a_1a + b_1c)z + a_1b + b_1d}{(c_1a + d_1c)z + c_1b + d_1d}\end{aligned}$$

Определитель $\begin{vmatrix} a_1a + b_1c & a_1b + b_1d \\ c_1a + d_1c & c_1b + d_1d \end{vmatrix}$ не равен 0, так как иначе композиция ДЛО была бы отображением в одну точку, но композиция биекций есть биекция.

1) Ассоциативность выполняется, так как композиция отображений ассоциативна

2) Существование единицы:

$$E : w = z, \begin{pmatrix} a=1 & b=0 \\ c=0 & d=1 \end{pmatrix}, \det = 1 \neq 0$$

3) Существование обратного:

Пусть $L : w = \frac{az+b}{cz+d}$ — ДЛО.

Построим обратное:

$$w(cz+d) = az+b$$

$$z(wc-a) = b-dw$$

$$L^{-1} : z = \frac{b-dw}{wc-a} \text{ — ДЛО, так как } \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$$

4) Некоммутативность:

Приведем контрпример

$$L_1 : w = z + a, \quad L_2 : w = \frac{1}{z}$$

$$L_1 \circ L_2 : z \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z} \xrightarrow{L_1} w = \frac{1}{z} + a$$

$$L_2 \circ L_1 : z \xrightarrow{L_1} w = z + a \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z+a}$$

Получили, что $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$

□

4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Геометрическая интерпретация: ДЛО — взаимно-однозначное непрерывное отображение $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Теорема о трех точках

Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 и других трех различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛО $L(z) : L(z_i) = w_i$

Доказательство

1) *Существование*

Для любых 3-х точек z_1, z_2, z_3 существует ДЛО, отображающее их в $0, \infty, 1$ соответственно:

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Тогда рассмотрим отображения $L_1 : \xi = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ и $L_2 :$

$\xi = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$. Из группового свойства ДЛО следует, что L_2^{-1} — тоже ДЛО, и композиция ДЛО — тоже ДЛО. Тогда

получаем, что отображение $L = L_2^{-1} \circ L_1$ есть ДЛО, причем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то есть L есть искомое ДЛО.

2) *Единственность* Пусть λ – ДЛО, отличное от L , построенного в пункте 1, удовлетворяющее условиям теоремы.

Рассмотрим отображение $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$. Из группового свойства ДЛО полученное отображение – ДЛО, причем

$$\mu : \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Теперь покажем, что $\mu = id$:

$$\mu = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$a) \mu(\infty) = \frac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$$

$$b) \mu(0) = \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$c) \mu(1) = \frac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d$$

В итоге получаем, что $\mu(z) = z \Rightarrow \mu = id$, то есть $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = id \Rightarrow \lambda = L_2^{-1} \circ L_1 = L$, что и требовалось доказать.

5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

$$z = \infty : w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

Круговое свойство ДЛО

Любое ДЛО преобразует обобщенную окружность (окружность и ли прямая в $\overline{\mathbb{C}}$) в обобщенную окружность.

Доказательство.

1) случай, когда $c = 0$:

$$L : w = az + b$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = az \xrightarrow{L_2} z_2 = z_1 + b$$

L_1 — растяжение с поворотом: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

L_2 — сдвиг: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

2) случай, когда $c \neq 0$:

$$L : w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right) = \frac{a}{c} + \frac{caz + bz - acz - ad}{c(cz + d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

$$\text{Обозначим } A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c}, \quad C = \frac{d}{c} :$$

$$L : w = A + \frac{B}{z + C}$$

$$z \xrightarrow{L_1} z_1 = z + C \xrightarrow{L_2} z_2 = \frac{1}{z_1} \xrightarrow{L_3} z_3 = B \cdot z_2 \xrightarrow{L_4} w = A + z_3$$

Отображения L_1 и L_4 — сдвиги, L_3 — растяжение с поворотом. Они переводят окружности в окружности, а прямые в прямые.

$$\text{Рассмотрим отображение } L_2 : w = \frac{1}{z}$$

Общее уравнение обобщённой окружности на плоскости xOy :

$$E(x^2 + y^2) + F_1x + F_2y + G = 0$$

$$E, F_1, F_2, G \in \mathbb{R}, (E, F_1, F_2, G) \neq (0, 0, 0, 0)$$

Запишем это уравнение через переменную $z = x + iy$:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = i \frac{\bar{z} - z}{2}$$

$$Ez\bar{z} + F_1 \frac{z + \bar{z}}{2} + F_2 i \frac{\bar{z} - z}{2} + G = 0$$

$$Ez\bar{z} + Fz + \bar{F}\bar{z} + G = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}iF_2 \in \mathbb{C}, \bar{F} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}iF_2$$

Тогда кривая, полученная в результате преобразования L_2 задается уравнением:

$$E \frac{1}{z} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + F \frac{1}{z} + \bar{F} \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + G = 0 \mid \cdot z\bar{z}$$

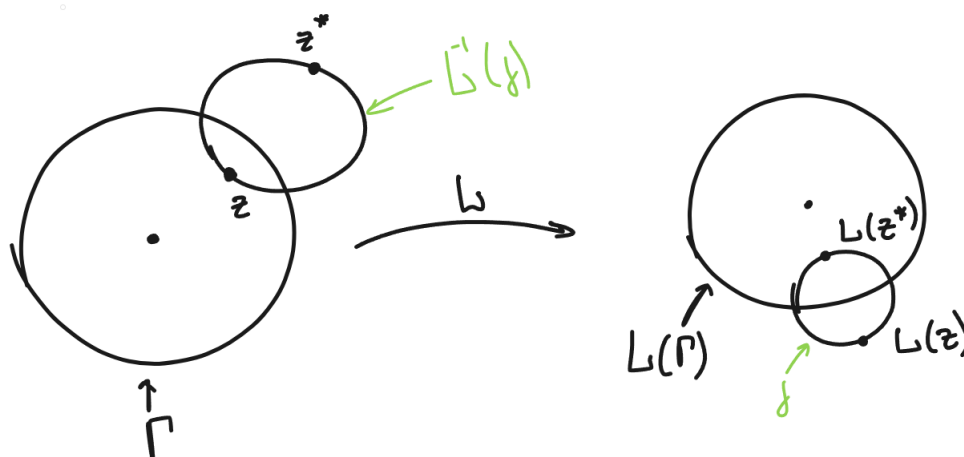
$$E + F\bar{z} + \bar{F}z + Gz\bar{z} = 0,$$

что является уравнением обобщенной окружности. Значит отображение L_2 переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность. \square

Свойство ДЛО сохранения симметричности

Произвольное ДЛО L преобразует любые точки z и z^* , симметричные относительно обобщенной окружности Γ , в точки

$L(z)$ и $L(z^*)$, симметричные относительно обобщенной окружности $L(\Gamma)$.



Доказательство.

Пусть γ — произвольная обобщенная окружность, проходящая через точки $L(z)$ и $L(z^*)$. Тогда $L^{-1}(\gamma)$ — обобщенная окружность по круговому свойству ДЛО.

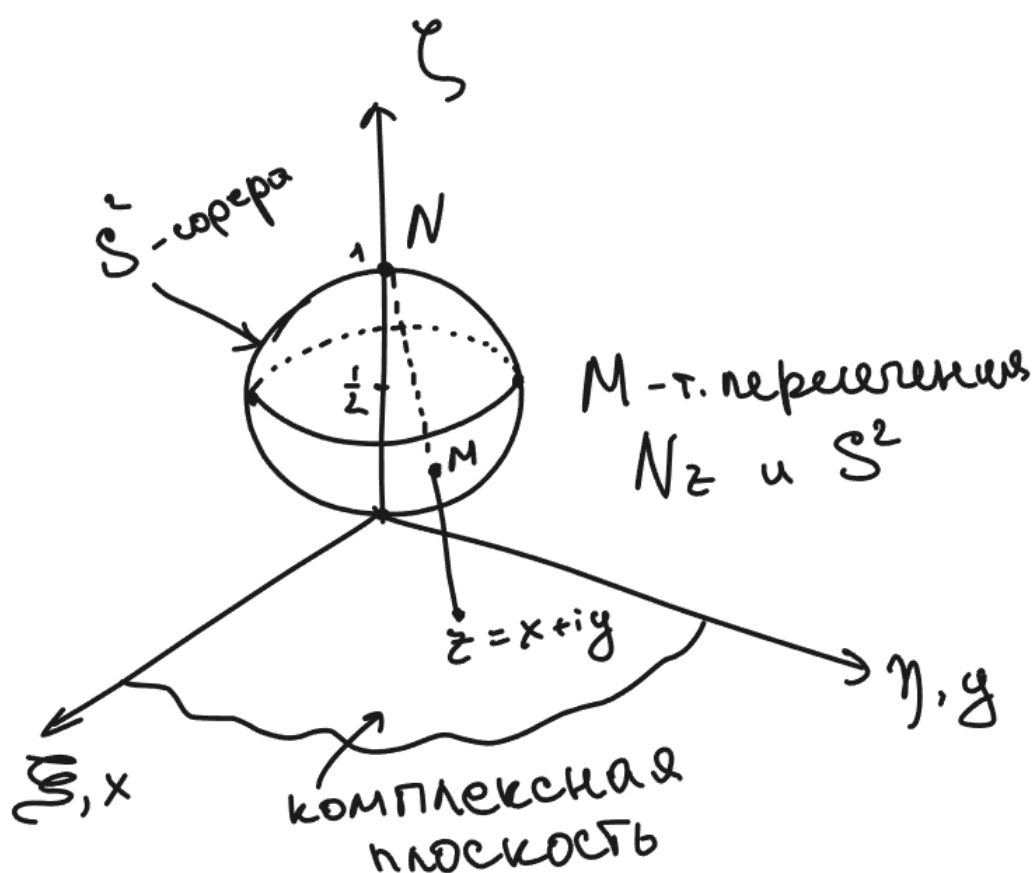
Так как $L(z), L(z^*) \in \gamma$, то:

$$L^{-1}(L(z)) = z \in L^{-1}(\gamma) \text{ и } L^{-1}(L(z^*)) = z^* \in L^{-1}(\gamma).$$

По определению симметричных точек окружности Γ и $L^{-1}(\gamma)$ ортогональны. ДЛО L сохраняет углы, а значит $L(\Gamma)$ ортогональна $L(\gamma)$. \square

6 Стереοграфическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.

Выберем ДСК с осями ξ, η, ζ , причем оси ξ, η совпадают с осями x, y . Рассмотрим сферу радиуса $\frac{1}{2}$ в этой системе коор-



динат, которая описывается уравнением

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

а также луч, исходящий из точки $N(0, 0, 1)$, и пересекающий плоскость $0xy$ в точке (x, y) , заданный параметрически:

$$\begin{cases} \xi = 0 + tx \\ \eta = 0 + ty \\ \zeta = 1 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Точка пересечения луча со сферой (ξ, η, ζ) (подставляем в уравнение сферы уравнения луча):

$$\begin{aligned} t^2 x^2 + t^2 y^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ t^2(x^2 + y^2 + 1) - t &= 0 \quad | : t \neq 0 \\ t &= \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2} \\ \begin{cases} \xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} = \frac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Обратное отображение:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{|z|^2 + 1 - 1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta \\ \Rightarrow \xi &= x(1 - \zeta), \eta = y(1 - \zeta) \Rightarrow \\ \begin{cases} x = \frac{\xi}{1 - \zeta} \\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Отображения (3) и (4) являются однозначными отображениями между \mathbb{C} и $S^2 \setminus N$, так как в преобразованиях не возникали неоднозначности.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}$ называется **расширенной комплексной плоскостью**.

Топология $\overline{\mathbb{C}}$:

Открытое множество на $S^2 - U \cap S^2$, где U – открытое в \mathbb{R}^3 .

Условимся, что точке $N(0, 0, 1)$ соответствует точка ∞ поля $\overline{\mathbb{C}}$, тем самым определяется биекция между S^2 и $\overline{\mathbb{C}}$, точка ∞ называется **бесконечно удаленной точкой**.

Окрестностью U бесконечно удаленной точки называется множество точек z , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > R, R \in \mathbb{R}$$

Функция $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$, **дифференцируема в точке ∞** , если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ дифференцируема в нуле.

Функция $f : U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \infty \in U$, **конформна в точке ∞** , если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформна в нуле.

7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в \mathbb{C} . Его свойства.

Путь – параметризованная кривая, возможно с самопересечением (непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$).

Пусть γ – гладкий путь, то есть $\gamma : z = z(t), t \in J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, z(t) \in \mathbb{C}, z(J) \subset \mathbb{C}$, функция $f(z)$ определена на $z(J)$ и функция

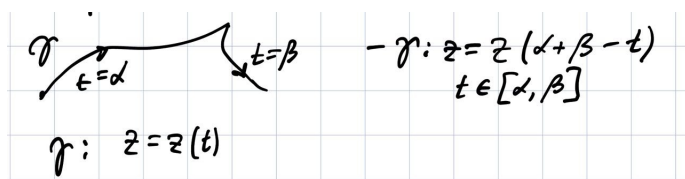
$f(z(t)) : J \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна (говорят, что f непрерывна на γ).

Число $\int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt$ называют **интегралом от функции f вдоль пути γ** и обозначают $\int_{\gamma} f(z) dz$, где $z(t) = x(t) + iy(t), z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Свойства интеграла:

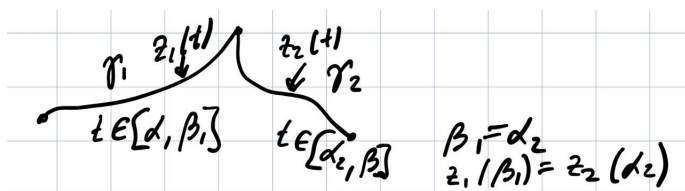
1. Линейность: $\int_{\gamma} [af(z) + bf(z)] dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} f(z) dz;$

2. Ориентированность:



$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

3. Аддитивность:



$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : z = \begin{cases} z_1(t), t \in [\alpha, \beta_1]; \\ z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz;$$

4. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой:

Пусть $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma_1 : z = z_1(\tau), \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ – два непрерывно дифференцируемых пути, $z_1(\tau) = z(t(\tau)) \forall \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$, где $t = t(\tau) : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha, \beta]$ – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция, f непрерывна на γ .

Тогда
$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz;$$

5. Оценка интеграла:

Если f – непрерывная функция на кусочно-гладком пути

$$\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta], \text{ то } \left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |z'(t)| dt$$

($|z'(t)| dt = |dz|$ – дифференциал длины дуги).

Доказательство.

4. Независимость интеграла:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt =$$

$$\left| t = t(\tau), dt = t'(\tau) d\tau, \frac{dz(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dz(t(\tau))}{dt} \right|$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(z))) \cdot z'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(\tau)) z'(\tau) d\tau = \int_{\gamma_1} dz$$

5. Оценка интеграла:

Пусть
$$I = \int_{\gamma} f dz \in \mathbb{C} = |I| \cdot \exp^{i\theta}$$

$$|I| = \exp^{-i\theta} \cdot I = \int \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t) dt$$

Обозначим $g(t) = \exp^{-i\theta} f[z(t)] z'(t)$.

$$\text{Тогда } |I| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} g(t) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\exp^{-i\theta}| \cdot |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt$$

□

8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей

Теорема 1 (Коши для односвязной области)

Если $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $f \in H(D)$ (f голоморфна), $\gamma \subset D$ – замкнутая кривая, то $\int_{\gamma} f dz = 0$.

Доказательство.

Для случая, когда $f'(z)$ непрерывная в D :

$$z = x + iy; f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$I = \int_{\gamma} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot$$

$$[x'(t) + it'(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} [u \cdot x' - v \cdot y'] + i(uy' + vx') dt = \int_{\alpha}^{\beta} (ux' -$$

$$vy') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (uy' + vx') dt = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx =$$

Разрежем γ на простые контуры γ_i :

$$\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j, G_j - \text{область внутри } \gamma_j$$

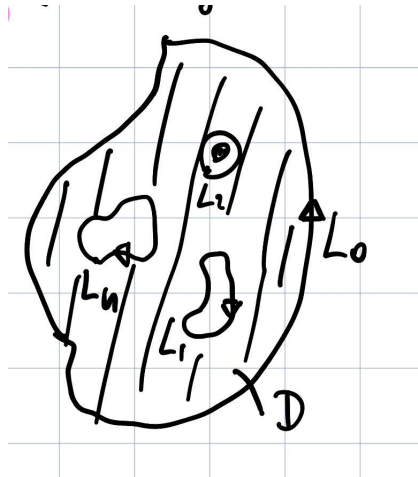
$$I = \sum_{j=1}^k \left[\oint_{\gamma_j} u dx - v dy + i \oint_{\gamma_j} v dx + u dy \right] =$$

$$= \sum_j \left[\iint_{G_j} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{G_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right] = 0$$

□

Теорема 2 (Коши для многосвязной области)

Пусть многосвязная область D ограничена внешним конту-



ром L_0 и внутренними контурами L_1, \dots, L_n , контуры L_1, \dots, L_n – кусочно-гладкие, $f \in H(D \cup L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n)$.

Тогда $\int_L f dz = 0$, где $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_n$, обход L_0 – против часовой стрелки, L_1, \dots, L_n – по часовой стрелке.

Замечание. $\oint_{L_0} f dz = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} f dz$, где обход L_0, L_1, \dots, L_n против часовой стрелки.

Доказательство.

С помощью разрезов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ получим односвязную область D^* . Тогда $D = D^* \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$.

Так как D^* –односвязная, то $0 = \int_{D^*} f dz =$

Граница $D^* = L_0 \cup \gamma_1 \cup -\gamma_1 \cup L_1 \cup \dots \cup \gamma_n \cup -\gamma_n \cup L_n$.

Тогда из аддитивности и ориентированности:

$$= \int_{L_0} f dz + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\gamma_i} f dz + \int_{-\gamma_i} f dz + \int_{L_i} f dz \right] = \int_L f dz = 0 \quad \square$$

9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных.

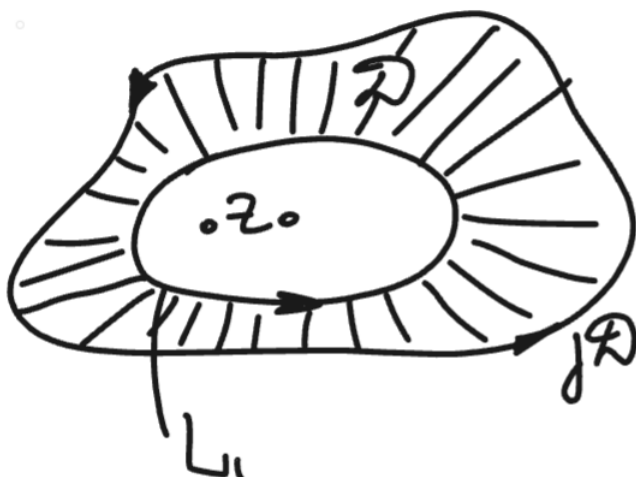
Интегральная формула Коши для голоморфных функций:

Пусть D — односвязная область в \mathbb{C} , ∂D — граница D , $f \in H(D \cup \partial D)$.

Тогда для $z_0 \in D$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство.



1) Пусть L_1 — простой контур, $L_1 \subset D$

Пусть D_1 — область внутри L_1 , $G = D \setminus D_1 \setminus L_1$ — многосвязная область

По т. Коши для многосвязной области:

$$\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

т.к. $\frac{f(z)}{z - z_0} \in H(G)$

Имеем $\partial G = \partial D \cup (-L_1)$:

$$\oint \partial D \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

2) Пусть $\gamma : z = z + r \cdot e^{it}, t \in [0, 2\pi], r > 0$
 $f(z) = (z - a)^n; n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} (a + r \cdot e^{it} - a)^n \cdot r \cdot i e^{it} dt = r^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \text{ где } L_1 - \text{окр-ть с центром в точке } z_0$$

3) Пусть σ_1 – радиус L_1 и $L_1 \subset D$

$$I = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{L_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi |i|} \oint_{L_1} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| |z'(t)| dt$$

4) Так как $f \in H(D)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Имеем $z \in L_1 : |z - z_0| = \sigma_1$:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\sigma_1} : \oint_{L_1} |z'(t)| dt - \text{длина } L_1, \text{ то есть } 2\pi\sigma_1$$

Тогда $I \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma_1} \cdot 2\pi\sigma_1 = \varepsilon \Rightarrow$ не зависит от ε

□

Интегральная формула Коши для производных:

Пусть $f \in H(D) : G \cup \partial G \subset D; D$ — область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых, $z_0 \in G$

Тогда:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Доказательство.

По теоремам о разложении голоморфной функции в степенной ряд и теореме о единственности разложения в степенной ряд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \oint_{\gamma_r} \dots = \oint_{\gamma_G} \quad \square$$

10 Степенные ряды в \mathbb{C} , их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ — **степенной** ряд, $c_n \in \mathbb{C}$.

Свойства:

1. Теорема Абеля:

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в точке z_1 , то этот ряд сходится в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$ и на любом компакте $K \subset U$ он сходится равномерно.

2. Теорема Коши-Адамара:

Пусть для ряда $A : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ имеем $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$, где $0 \leq R \leq \infty$.

Тогда в любой точке $z : |z - z_0| < R$ ряд сходится и в любой точке $z : |z - z_0| > R$ ряд расходится.

Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Тогда $S \in H(U_R(z_0))$ и $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$ (*)

Доказательство.

$r : 0 < r < R$ — произвольные.

Пусть $z_1 \in U_R(z_0) : |z_1 - z_0| > r$

$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} :$

$$|n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n} \right| \cdot |(z_1 - z_0)| = n \frac{1}{|z_1 - z_0|}.$$

$$|C_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{n-1} \leq n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1},$$

$$\text{где } M > |C_n(z_1 - z_0)^n|, \quad \rho = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$$

То есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1} = \frac{M}{|z_1 - z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ — мажорирующий для ряда (*).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ сходится при $\rho \in (0; 1)$ как ряд из производных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (*) сходится равномерно и абсолютно в $U_r(z_0)$.

$$\oint_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z - z_0)^{n-1} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$$

Значит функция $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (z - z_0)^{n-1}$ имеет первообразную в $U_r(z_0)$, которая равна:

$$\int_{z_0}^z g(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \frac{(z - z_0)^n}{n} =$$

$$S(z) - S(z_0) = S(z) - C_0.$$

Следовательно $S \in H(U_r(z_0)) \forall r \in (0; R)$.

Поэтому $S \in H(U_R(z_0))$ и $S' = g$. □

Следствия из этой теоремы:

1. Производная функции $f \in H(D)$ голоморфна в D

Доказательство.

$z_0 \in D$ — произвольная точка множества $D \Rightarrow z_0$ — внутренняя точка D , так как D — открытое множество \Rightarrow

$$\exists R > 0 : U_R(z_0) \subset D \Rightarrow$$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow (\text{голом. степенного ряда})$$

$\Rightarrow f'(z)$ – сумма степенного ряда, значит голоморфна \square

2. Если функция f в области D первообразную, то $f \in H(D)$

3. $f \in H(D) \Rightarrow f$ бесконечно дифференцируема и все ее производные голоморфны

11 Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

Теорема о разложение голоморфной функции в ряд Тейлора:

Пусть D – область в \mathbb{C} $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$.

Тогда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, $z \in U_R(z_0)$, $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$, $\gamma_r =$

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Доказательство.

По интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \text{ если } |z - z_0| < r$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} (=)$$

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n, \frac{1}{2\pi i} f(z) - \text{непрерывна.}$$

Тогда $\frac{1}{2\pi i} f(z) \cdot \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{0}$ – сходится равномерно, значит можно интегрировать почленно.

Тогда получаем утверждение теоремы:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

□

Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

Пусть функция $f \in H(\bar{U})$, где $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ и $\partial\bar{U} = \gamma_r$, $|f(z)| \leq M$.

Тогда коэффициенты ряда Тейлора f удовлетворяют следующему неравенству: $|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$

Доказательство.

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

так как $|f(\xi)| \leq M$ и $(\xi - z_0)^{n+1} \leq r^{n+1}$ □

Теорема Лиувилля:

$f \in H(\mathbb{C})$ и f – ограниченная функция $\Rightarrow f = const$

Доказательство. По теореме о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора функция f представима в виде $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ внутри окружности любого радиуса R , причем по этой же теореме коэффициенты ряда не зависят от R .

Тогда из неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

Из того что R произвольный следует, что $c_n = 0$ для любого n , а значит $f = const$ □

12 Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.

Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Тогда $S \in H(U_R(z_0))$ и $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$ (*)

Доказательство.

$r : 0 < r < R$ – произвольные.

Пусть $z_1 \in U_R(z_0) : |z - z_0| > r$

$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} :$

$$|n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \frac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n} \right| \cdot |(z_1 - z_0)^n| = n \frac{1}{|z_1 - z_0|}.$$

$$|C_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{n-1} \leq n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1},$$

где $M > |C_n(z_1 - z_0)^n|$, $\rho = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$

То есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1} = \frac{M}{|z_1 - z_0|} \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ – мажорирующий для ряда (*).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ сходится при $\rho \in (0; 1)$ как ряд из производных

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (*) сходится

равномерно и абсолютно в $U_r(z_0)$.

Для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U_r(z_0)$ по теореме Коши:

$$\oint_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n C_n (z - z_0)^{n-1} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^{n-1} dz = 0$$

Значит функция $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (z - z_0)^{n-1}$ имеет первообразную в $U_r(z_0)$, которая равна:

$$\int_{z_0}^z g(\xi) d\xi = \int_{z_0}^z \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n (\xi - z_0)^{n-1} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \frac{(z - z_0)^n}{n} = S(z) - S(z_0) = S(z) - C_0.$$

Следовательно $S \in H(U_r(z_0)) \forall r \in (0; R)$.

Поэтому $S \in H(U_R(z_0))$ и $S' = g$. \square

Следствие из этой теоремы: Производная функции $f \in H(D)$ голоморфна в D

Доказательство.

$z_0 \in D$ – произвольная точка множества $D \Rightarrow z_0$ – внутренняя точка D , так как D – открытое множество \Rightarrow

$\exists R > 0 : U_R(z_0) \subset D \Rightarrow$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow (\text{голом. степенного ряда})$$

$\Rightarrow f'(z)$ – сумма степенного ряда, значит голоморфна \square

Из следствия 1 теоремы о разложении функции в степенной ряд следует бесконечная дифференцируемость голоморфных функций.

Теорема о единственности разложения в степенной ряд:

$$\text{Если в } U_R(z_0) \text{ } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ то } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f(z_0) &= c_0 \\
 f'(z_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = c_1 \\
 &\dots \\
 f^{(k)} &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k} = \\
 &= k(k-1)\dots 1 = k!c_k \Rightarrow \\
 &\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}
 \end{aligned}$$

□

Теорема Морера:

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f \in C(D)$ и $\int_{\partial\Delta} = 0$ для произвольного треугольника Δ при $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$.

Тогда $f \in H(D)$

Доказательство.

Пусть $a \in D$ – произвольная точка.

Так как D – открытое, то $\exists r : U_r(a) \subset D$

Рассмотрим функцию $F = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi, z \in U_r(z_0)$

Аналогично доказательству теоремы о первообразной $F \in H(D)$ и $F'(z) = f(z)$

Из голоморфности производной голоморфной функции следует утверждение теоремы □

Теорема об эквивалентности трех определений голоморфности: 3 следующих утверждения эквивалентны: R)

функция f в некоторой окрестности $U(a)$ имеет комплексную производную (Риман)

C) $f \in C(U(a))$ и $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ для любого треугольника $\Delta \subset U(a)$ (Коши) W) функция f разложима в степенной ряд в окрестности точки a по $(z - a)$ (Вейерштрасс)

Доказательство.

$R) \Rightarrow C)$ – из теоремы Коши

$R) \Rightarrow W)$ – по теореме о разложении голоморфной функции в степенной ряд

$W) \Rightarrow R)$ – теорема о голоморфности суммы степенного ряда

$C) \Rightarrow R)$ – по теореме Морера

□

13 Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.

Определение:

Нулем функции f называется точка $a \in \mathbb{C} : f(a) = 0$

Теорема:

Если $f(a) = 0$, f голоморфна в точке a , и $f \equiv 0$ в какой то окрестности точки a , то $\exists n \in \mathbb{N} : f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z) \neq 0$ и φ голоморфна в точке a

Доказательство.

По теореме о разложении голоморфной функции в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \text{ в некоторой окрестности точки } a$$

$$f(a) = c_0 = 0, \exists n \in \mathbb{N} \ c_n \neq 0 \text{ (иначе } f(z) \equiv 0)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – такое, что $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - a)^k = (z - a)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n}$$

Функция $\varphi = \sum_{n=k}^{\infty} c_k (z - a)^{k-n}$ и есть искомая функция (голоморфна и не ноль в a) □

Следствие:

Если $f(a) = 0$, f голоморфна в точке a , то существует выколотая окрестность точки a , где функция не имеет нулей, то есть ее нули – изолированные точки

Теорема о порядке нуля голоморфной функции:

Порядок нуля $a \in \mathbb{C}$ голоморфной функции f совпадает с n в формуле $f(z) = (z - a)^n \varphi(z)$

Доказательство.

В ходе доказательства теоремы о представлении голоморфной функции имеющей нуль было показано,

что $c_0 = \dots c_{n-1}$. Из того что $c_k = f^{(k)}(a)$ следует доказательство теоремы \square

Теорема единственности:

Если D – область в \mathbb{C} ; $f_1, f_2 \in H(D)$, $\forall z \in \mathcal{E} \subset D : f_1 = f_2$, a – предельная точка множества \mathcal{E} и $a \in D$, то $f_1 = f_2$ на всем D

Доказательство.

$f = f_1 - f_2 \in H(D)$, $\mathcal{R} = \{z \in D : f_1 = f_2\}$.

Тогда a – предельная точка множества \mathcal{R}

Тогда есть последовательность $\{z_n\}$, $z_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Из непрерывности f следует что $\lim_{z_n} f(z_n) = 0$, а

Из того что a – предельная точка множества \mathcal{R} и следствия теоремы следует, что

$f \equiv 0 \Rightarrow f_1 = f_2$ в некоторой окрестности точки a

Из того что a – произвольная предельная точка имеем, что \mathcal{R} – замкнутое подмножество D

Из связности D следует, что $Int\mathcal{R} = D$ \square

14 Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Первая сумма, с отрицательными коэффициентами, $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$, называется **главной частью**.

Вторая сумма называется **правильной частью**.

Ряд Лорана сходится, когда сходятся оба ряда.

Ясно, что правильная часть сходится, если

$$|z-a| < R_1$$

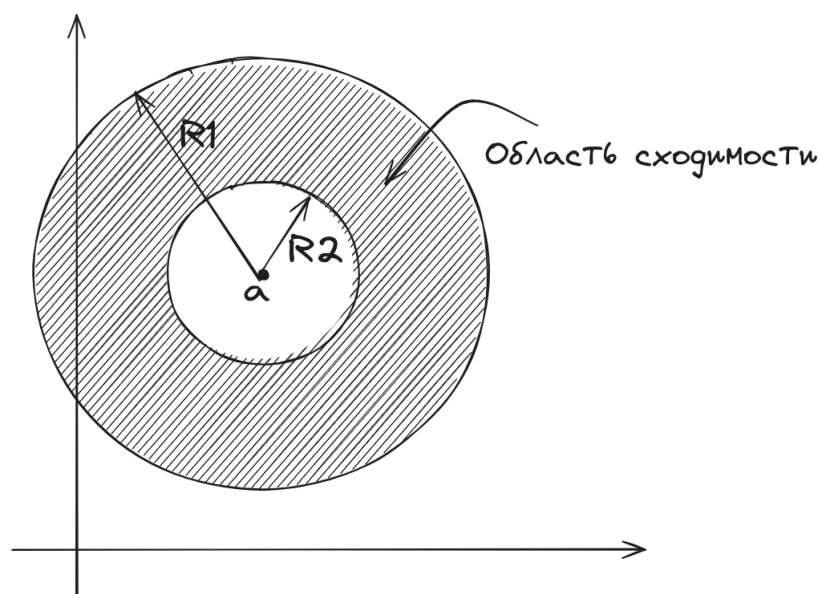
где R – некоторое действительное число. Аналогичным образом при замене $\xi = \frac{1}{z-a}$ главная часть преобразуется к обычному ряду

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \xi^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \xi^k$$

откуда $\xi < R_2$, где R_2 – некоторое действительное число, откуда

$$|z-a| > R_2$$

Таким образом получаем два условия сходимости ряда Лорана, оба из которых должны выполняться для сходимости ряда, а значит областью сходимости ряда Лорана (за исключением граничных случаев) является кольцо:



Теорема Лорана.

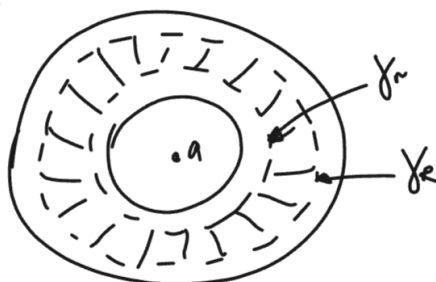
Пусть $0 \leq R_2 < R_1 \leq \infty$, $V = \{z \in \mathbb{C} \mid R_2 < |z - a| < R_1\}$, $f \in H(V)$.

Тогда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$n \in \mathbb{Z}, R_2 < \rho < R_1$$

Доказательство.



Пусть r, R – такие, что $R_2 < r < R < R_1$.
Тогда $V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$

$$\gamma V' = \gamma_r(a) \cup \gamma_R(a) \subset V, a \in V'$$

$$\text{Интегральная формула Коши: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma V'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R(a)} \dots - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r(a)} \dots (=)$$

На $\gamma_R(a)$ обход против часовой стрелки:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{(\xi-a) - (z-a)} = \\ &= \frac{-1}{(z-a)(1 - \frac{\xi-a}{z-a})} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = \\ &= -\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} \\ (=) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R(a) \rightarrow \gamma_r(a)} f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\gamma_r(a) \rightarrow \gamma_R(a)} f(\xi) \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \\ &+ \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^{-k} \end{aligned}$$

□

Теорема о единственности разложения в ряд Лорана.

Если в кольце $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$

$$(*) f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

то

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

где $n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$

Доказательство.

Ряд сходится равномерно на γ , т.к.:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z-a)^{-k}$$

1.

$$|c_n (z-a)^n| = |c_n| \cdot |z-a|^n = |c_n| \rho^n < |c_n| R^n, z = a + \rho e^{it}$$

$$r < r_1 < \rho < R_1 < R$$

$\sum |c_n| R^n$ – сходится, значит по признаку Вейерштрасса первая часть $f(z)$ сходится равномерно.

2.

$$|c_{-k} (z-a)^{-k}| = \frac{|c_{-k}|}{|z-a|^k} = \frac{|c_{-k}|}{\rho^k} < \frac{|c_{-k}|}{r_1^k},$$

$\sum \frac{|c_{-k}|}{r_1^k}$ сходится, значит вторая часть сходится равномерно.

$$f(z) \cdot (z-a)^{-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k-1} \Rightarrow \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } n-k \neq 0 \\ 2\pi i, & \text{если } n-k = 0 \end{cases} = c_k \cdot 2\pi i$$

□

Неравенство Коши для коэффициентов Лорана.

Пусть $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$, $f \in H(V)$,

$\gamma = \{z \mid |z-a| = \rho\}$, $\rho \in (r, R)$

$\forall z \in \gamma \quad |f(z)| \leq M$, тогда

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

15 Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеристика в терминах ряда Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.

Точка z_0 — изолированная особая точка функции f , если:

$$\exists r > 0 : f \in H(\overset{\circ}{U}_r(z_0))$$

Разложение в ряд лорана в окрестности z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_r(z_0)$$

Главная часть:
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

Правильная часть:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

Классификация особой точки a (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

Характеризация устранимой особой точки:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f , то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции f в окрестности точки a не содержит главной части.

3. Функция f ограничена в окрестности точки a .

Доказательство.

"2) \rightarrow 1)":

Разложение в ряд Лорана в $\mathring{U}_\delta(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \rightarrow c_0 \text{ при } z \rightarrow a \Rightarrow 1)$$

"1) \rightarrow 3)":

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ – ограниченная в некоторой окрестности точки a .

"3) \rightarrow 2)":

$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\mathring{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$ по теореме Лорана

$$\Rightarrow f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ в } \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$

Пусть $\delta_1 > 0$; f ограничена $M > 0$ в $\mathring{U}_{\delta_1}(a)$, $\rho \in (0; \delta_1) \Rightarrow$ по неравенству Коши $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$

Если $n < 0$, то $\frac{M}{\rho^n} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Но $|c_n|$ не зависит от выбора ρ . Поэтому $c_n = 0$ при $n < 0 \Rightarrow 2)$.

□

Характеризация полюса:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f , то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a содержит конечное (>0) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3. $f = \frac{1}{\varphi}$, где φ — голоморфная в точке a и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство.

"2) \rightarrow 1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где $\frac{1}{(z-a)^N} \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a$ и $\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$ — степенной ряд $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$.

"1) \rightarrow 3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{если } z \neq a \\ 0, & \text{если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфная в точке } a$$

Функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет устаревшую особую точку в $a \Rightarrow \frac{1}{f(z)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3) \rightarrow 2)": Пусть N — такое, что $a_0 = 0 = a_1 = \dots =$

$$a_{N-1}, a_N \neq 0. \text{ Тогда } \frac{1}{f(z)} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$ — голоморфна в точке a , равна $a_N \neq 0$;

$\frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$ — голоморфна в окрестности точки a .

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n; \tilde{c}_{-N} = c_0 \neq 0$$

□

Характеризация существенно особой точки:

Изолированная особая точка a функции f является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a имеет бесконечное число слагаемых.

Доказательство.

Следует из характеристик устранимой особой точки и вычета.

□

Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек. Теорема Сохоцкого:

Если a – существенная особая точка функции f , то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists \{z_n\}$:

$$z_n \rightarrow z_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, f(z_n) \rightarrow A$$

.

Доказательство.

Пусть $A = \infty$. Так как f не может быть ограниченной в проколотой окрестности $\{0 < |z-a| < r\}$ (из характеристики устранимой особой точки), то найдется в этой окрестности такая точка z_1 , в которой $|f(z_1)| > 1$. Точно так же в $\{0 < |z-a| < \frac{|z_1-a|}{2}\}$ найдется точка z_2 , в которой $|f(z_2)| > 2$ и т.д., в $\{0 < |z-a| < \frac{|z_1-a|}{n}\}$ найдется точка z_n ,

в которой $|f(z_n)| > n$. Очевидно, $z_n \rightarrow a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \infty$.

Пусть теперь $A \neq \infty$. Либо точки, в которых f равна A имеют a своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательности $z_n \rightarrow a$, на которой $f(z_n) = A$, либо существует проколота окрестность $\{0 < |z - a| < r'\}$, в которой $f(z) \neq A$. В этой окрестности голоморфна функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$, для которой a также является существенно особой точкой (т.к. $f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}$ и если бы φ при $z \rightarrow a$ стремилась к конечному или бесконечному пределу, то f – также). По доказанному существует последовательность $z_n \rightarrow a$, по которой $\varphi(z_n) \rightarrow \infty$, но по этой последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A$$

□

16 Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

Вычетом функции f в точке z_0 называют число:

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial r} f(z) dz$$

Вычисление вычетов: Теорема о связи вычета с рядом Лорана:

Пусть f — голоморфна в выколотой окрестности точки a . Тогда:

$$\operatorname{res} f(a) = c_{-1},$$

где $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$

Доказательство.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - a)^n \text{ в } \mathring{U}_\delta(a), \text{ где } f \in H(\mathring{U}_\delta(a))$$

$$\gamma_r = \{z : |z - a| = r\}, r \in (0, \delta), \text{ т.е. } \gamma_r \subset \mathring{U}_\delta(a)$$

Значит ряд сходится равномерно на $\gamma_r \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{res} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{+\infty} \oint_{\gamma_r} c_n(z - a)^n dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Следствие:

В устранимой особой точке z_0 : $\operatorname{res} f(z_0) = 0$

Формула вычисления вычета в полюсе

Пусть z_0 — полюс функции f . Тогда:

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)^n)^{(n-1)}$$

Доказательство.

Разложение f в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{z_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

$$f(z) \cdot (z-a)^n = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \dots$$

$$[f(z) \cdot (z-a)^n]^{(n-1)} = c_{-1} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{1!} \cdot c_0 \cdot (z-a) + \dots$$

При $z \rightarrow a$:

$$[f(z) \cdot (z-a)^n]^{(n-1)} \rightarrow c_{-1} \cdot (n-1)! = (n-1)! \operatorname{res} f(a) \quad \square$$

Следствие:

Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ, ψ — голоморфны в точке a , $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$.

$$\text{То } \operatorname{res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Доказательство.

1.

$$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \in \mathbb{C} \Rightarrow a - \text{устраняемая ос.т.} \Rightarrow \operatorname{res} f(a) = 0 = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

2.

$\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ имеет в точке a нуль первого порядка. Значит a — полюс 1-ого порядка. Тогда:

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \frac{\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad \square$$

Теорема Коши о вычетах (вычисление контурных интегралов):

Пусть $f \in H(D \setminus \{a_1 \dots a_n\})$, где $a_1 \dots a_n$ — изолированные особые точки f , $G \cup \partial G \subset D$, ∂D не содержит особых точек f .

Тогда:

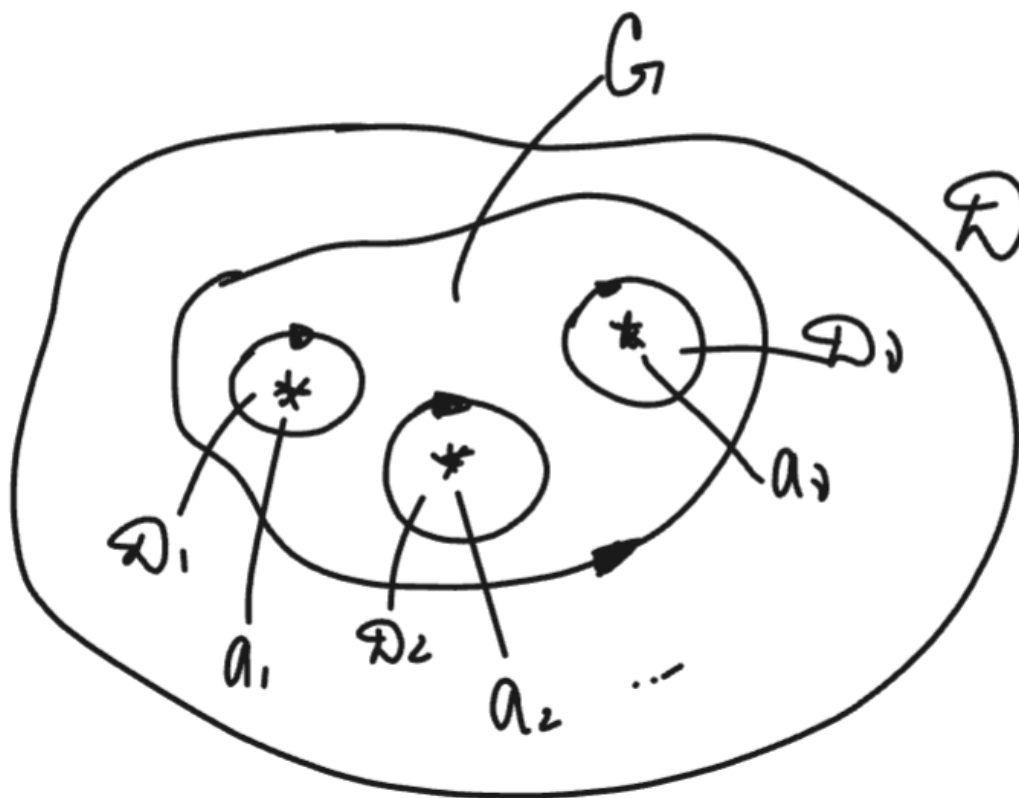
$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{res} f(a_i)$$

(обход положительный)

Доказательство.

Следует из теоремы Коши для многосвязной области:

Окружности, окружающие a_1, \dots, a_ν не пересекаются и лежат



внутри γG .

$$\tilde{G} = G \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_\nu), f \in H(\tilde{G})$$

$$\int_{\gamma \tilde{G}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma G} \dots + \sum_{j=1}^{\nu} \int_{-\gamma D_j} \dots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma G} \dots - \sum_{j=1}^{\nu} 2\pi i \cdot \operatorname{res} f(a_j) = 0 \Rightarrow \int_{\gamma G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{res} f(a_j).$$

□

17 Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки ∞ . Вычет в бесконечности.

Точка ∞ — изолированная особая точка функции f , если:

$$\exists R > 0 : f \in H(\overset{\circ}{U}_R(\infty))$$

Разложение в ряд Лорана в окрестности ∞ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_R(\infty)$$

Главная часть: $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$

Правильная часть: $\sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$

Классификация особой точки ∞ (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

Характеризация устранимой особой точки:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f , то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции f в окрестности точки a не содержит главной части.
3. Функция f ограничена в окрестности точки a .

Доказательство.

"2) \rightarrow 1)":

Разложение в ряд Лорана в $\mathring{U}_\delta(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \rightarrow c_0 \text{ при } z \rightarrow a \Rightarrow 1)$$

"1) \rightarrow 3)":

$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ – ограниченная в некоторой окрестности точки a .

"3) \rightarrow 2)":

$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\mathring{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$ по теореме Лорана

$$\Rightarrow f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \text{ в } \mathring{U}_{\delta_1}(a).$$

Пусть $\delta_1 > 0$; f ограничена $M > 0$ в $\mathring{U}_{\delta_1}(a)$, $\rho \in (0; \delta_1) \Rightarrow$ по неравенству Коши $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$

Если $n < 0$, то $\frac{M}{\rho^n} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Но $|c_n|$ не зависит от выбора ρ . Поэтому $c_n = 0$ при $n < 0 \Rightarrow 2)$.

□

Характеризация полюса:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f , то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a содержит конечное (>0) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3. $f = \frac{1}{\varphi}$, где φ — голоморфная в точке a и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство.

"2) \rightarrow 1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где $\frac{1}{(z-a)^N} \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a$ и $\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$ — степенной ряд $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$.

"1) \rightarrow 3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{если } z \neq a \\ 0, & \text{если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфная в точке } a$$

Функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет устаревшую особую точку в $a \Rightarrow \frac{1}{f(z)} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3) \rightarrow 2)": Пусть N — такое, что $a_0 = 0 = a_1 = \dots = a_{N-1}$, $a_N \neq 0$. Тогда $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$ — голоморфна в точке a , равна $a_N \neq 0$;

$\frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$ — голоморфна в окрестности точки a .

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c}_n (z-a)^n; \tilde{c}_{-N} = c_0 \neq 0$$

□

Характеризация существенно особой точки:

Изолированная особая точка a функции f является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a имеет бесконечное число слагаемых.

Доказательство.

Следует из характеристик устранимой особой точки и вычета.

□

Вычетом функции f в точке ∞ называют число:

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_R} f(z) dz,$$

где $\gamma_R = \{a : |z| = R\}$, R – такое, что вне γ_R нет особых точек, кроме, может быть ∞ .

Теорема о связи вычета в бесконечности с рядом Лорана:

Если в некоторой выколотой окрестности ∞ функция f голоморфна, то:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент разложения f в ряд Лорана в окрестности ∞ .

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res} f(\infty) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint_{-\gamma_R} c_n z^n dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \oint_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -c_{-1}
 \end{aligned}$$

Прим.: $\oint_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -2\pi i$, т.к. обход по часовой стрелке. □

18 Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.

Пусть $f \in H(\dot{U}_r(a))$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Тогда вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln} f(z)$ в точке a называют **логарифмическим вычетом функции f в точке a** .

Лемма о логарифмическом вычете в нуле и в полюсе:

Логарифмический вычет ф. $f(z)$ в точке a равен:

1. порядку нуля a , если a — нуль
2. порядку полюса a , если a — полюс

Доказательство.

1) Пусть a — нуль порядка n ф-ии $f(z)$, тогда:
 $f(z) = a_n(z - a)^n + a_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots = (z - a)^n \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — сумма степенного ряда, откуда следует, что $\varphi \in H$

$$\varphi(z) = c_n \neq 0 \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - a)^{n-1} \cdot \varphi(z) + (z - a)^n \varphi'(z)}{(z - a)^n \varphi(z)} =$$

$$\frac{1}{z - a} \left(n + (z - a) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right) \Rightarrow a \text{ — полюс 1-ого порядка функции}$$

$$\frac{f'}{f} \Rightarrow C_{-1} = n, \text{ т.к. } \frac{n}{z - a} \text{ — главная часть.}$$

2) Пусть a — полюс порядка p , тогда по теореме о полюсе a — нуль порядка p функции $\frac{1}{f(z)} = g(z)$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} \frac{1}{f(z)}$$

Тогда логарифмический вычет функции g в точке a равен p , а функции f в точке a равен $-p$. □

Теорема о логарифмическом вычете:

Пусть f мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, $G \cup \partial G \subset D$, ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов функции f , N и P – количество нулей и полюсов с учетом их порядков функции f в G .

Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$ (обход ∂G против часовой стрелки),

где $\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ – логарифмический вычет функции f вдоль кривой ∂G .

Доказательство.

Особые точки $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в области G :

1. полюса a_1, \dots, a_l с порядками p_1, \dots, p_l
2. нули b_1, \dots, b_m с порядками n_1, \dots, n_m

Тогда по лемме о логарифмическом вычете $\frac{f'}{f}(a_j) = -p_j$,

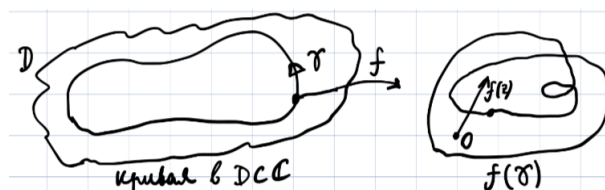
$$\operatorname{res} \frac{f'}{f}(b_s) = n_s$$

По теореме Коши:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \left(\sum_{j=1}^l \operatorname{res} \frac{f'}{f}(a_j) + \sum_{s=1}^m \operatorname{res} \frac{f'}{f}(b_s) \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^l p_j + \sum_{s=1}^m n_s = N - P \end{aligned}$$

□

$\Delta_\gamma \arg f = 2\pi k$, k – количество обходов точки O $f(z)$, $z \in \gamma$, с учетом приращения.



Принцип аргумента. Пусть f мероморфна в $D \subset \mathbb{C}$, $G \cup \partial G \subset D$, ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов f . Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f.$$

Доказательство.

Пусть $\partial G : z = z(t), t \in [\alpha, \beta], \Phi(t) = \ln f(z(t))$, где $\ln f$ непрерывно меняется при росте t от α до β . Тогда $\Phi'(t) = \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} \cdot z'(t)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \frac{f'}{f} dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \\ &= \ln f(z(\beta)) - \ln f(z(\alpha)) = \ln |f(z(\beta))| + i \arg f(z(\beta)) - \ln |f(z(\alpha))| - \\ &- i \cdot \arg f(z(\alpha)) = i \Delta_{\partial G} \arg f = \text{(по т. о логар.выч.) } N - P = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{i \Delta_{\partial G} \arg f}{2\pi i} \end{aligned}$$

□

Теорема Руше:

Пусть $f, g \in H(G \cup \partial G)$ и $\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)|$.

Тогда функции f и $f+g$ имеют одинаковое количество нулей в G .

Доказательство.

$$\forall z \in \partial G : |f(z)| > |g(z)| \geq 0$$

$$|(f+g)(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$$

Отсюда следует, что функция f и $f+g$ не имеют нулей на

∂G .

По принципу аргумента $\Delta_{\partial G} \arg(f + g) = N_{f+g}$ (количество нулей функции $f + g$ в G).

С другой стороны:

$$\Delta_{\partial G} \arg f \left(1 + \frac{g}{f}\right) = \Delta_{\partial G} \arg f + \Delta_{\partial G} \left(1 + \frac{g}{f}\right) = N_f$$

□

Применение:

Найти число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ в области $|z| < 1$.

На границе области $|z| = 1$, тогда т.к. $|z^8 + z^2 - 1| \leq |z|^8 + |z|^2 + |-1| = 3 < |-4z^5| = 4$ и уравнение $-4z^5 = 0$ имеет 5 корней в этой области, то исходное уравнение также имеет 5 корней в этой области.

19 Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.

Теорема о среднем: Пусть $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $\partial U_\rho(z_0) \subset D$

Тогда
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt$$

Доказательство.

По интегральной формуле Коши:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt \end{aligned}$$

Параметр $\partial U_\rho(z_0) : z = z_0 + \rho e^{it} : t \in [0; 2\pi], z' = i \rho e^{it} \quad \square$

Принцип сохранения области:

Функция f голоморфна в области D и $f \neq const$

\Rightarrow

Образ $f(D)$ есть область

Доказательство.

Нужно показать, что множество D^* связно и открыто.

1) Пусть w_1, w_2 — две произвольные точки D^* , а z_1, z_2 — их прообразы.

Так как множество D линейно связно, то существует путь $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow D$, связывающий точки z_1, z_2 . В силу непрерывности функции f образ $\gamma^* = f \circ \gamma$ будет путем, связывающим точки w_1, w_2 . Таким образом D^* — линейно связно.

2) Пусть w_0 произвольная точка D^* и z_0 — один из ее прообразов в D . Так как D открыто, то существует круг $\{|z - z_0| \leq$

$r\} \subset D$.

Будем уменьшать r пока круг не перестанет содержать других точек, в которых функция f равна w_0 (это возможно, т.к. она не постоянная).

Обозначим $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ границу этого круга и

$$\mu = \min_{x \in \gamma} |f(x) - w_0|, \quad \mu > 0$$

Если бы $\mu = 0$, то на γ существовала бы точка, в которой функция f равна w_0 .

Теперь докажем, что $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$.

Пусть w_1 — произвольная точка этого круга, то есть $|w_1 - w_0| < \mu$. Тогда:

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1).$$

Так как на γ в силу выбора μ имеем $|f(z) - w_0| \geq \mu$, то по теореме Руше функция $f(z) - w_1$ имеет внутри γ столько же нулей, сколько и $d(z) - w_0$, то есть по крайней мере один нуль z_0 , а значит функция f внутри γ принимает значение w_1 , то есть $w_1 \in D^*$. В силу произвольности выбора w_1 весь круг лежит в D^* , а значит оно является открытым множеством.

□

Принцип максимума модуля:

Модуль голоморфной функции не может достигать строгого локального максимума внутри области.

Доказательство.

Пусть функция достигает максимума в некоторой точке z_0 .

Воспользуемся принципом сохранения области. Если $f \neq \text{const}$, то она преобразует z_0 в точку w_0 области D^* .

Существует круг $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$, а в нем найдется точка w_1 такая, что $|w_1| > |w_0|$. Значение w_1 принимается функ-

цией f в некоторой окрестности точки z_0 , а это противоречит тому, что $|f|$ достигает максимума в этой точке. \square

20 Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана-Шварца, принцип соответствия границ с обратным принципом соответствия границ.

Основные теоремы и приложения конформных отображения:

1. Теорема Римана (о возможности конформного и взаимно однозначного отображения одной односвязной области на другую)

Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее двух точек. Тогда:

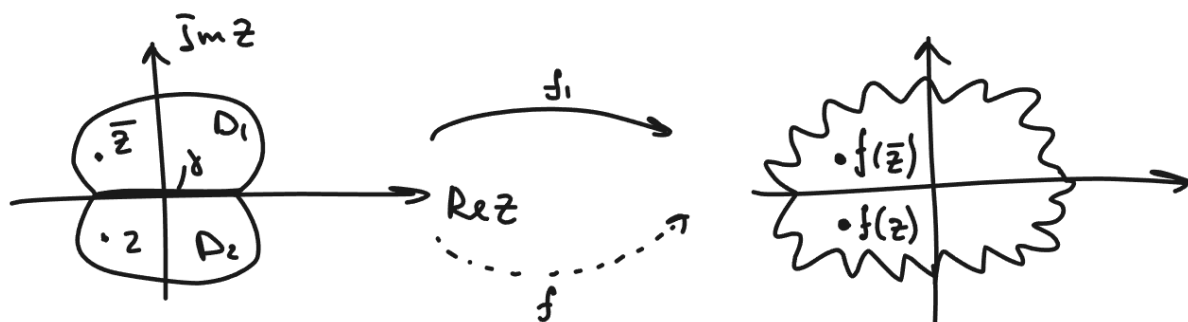
- (а) \exists голоморфная в D функция $w = f(z)$, которая отображает D конформно и однозначно на единственный круг $G : |w| < 1$;
- (б) эту функцию можно выбрать так, что $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$, где $z_0 \in D$, $w_0 \in G$ – заданные точки, α – заданное действительное число.

Функция f , удовлетворяющая 1. и 2. единственная.

2. Принцип симметрии Римана-Шварца

Пусть D_1 – односвязная область, лежащая в верхней полуплоскости $Im z > 0$, граница Γ_1 , которая содержит интервал γ действительной оси $Im z = 0$, область D_2 симметрична D_1 относительно действительной оси, функция $f(z)$ непрерывна на D_1 , Γ_1 , голоморфна на D_1 и принимает действительные значения на γ . Тогда функция f может голоморфно продолжить в область $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ по формуле:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{если } z \in D_1 \cup \gamma, \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & \text{если } z \in D_2. \end{cases} \quad (5)$$



3. Принцип соответствия границ

Пусть Γ и Γ^* – простые контуры, D и D^* – односвязные области, ограниченные Γ и Γ^* соответственно, функция $f(z)$ однолистно и конформно отображает D на D^* . Тогда

- (a) $f(z)$ имеет непрерывное продолжение \bar{f} на Γ , то есть $\bar{f} : \bar{D} = D \cup \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ – непрерывна и $\bar{f}|_D = f$
- (b) \bar{f} отображает Γ на Γ^* взаимно однозначно, причем положительному обходу Γ соответствует положительный обход Γ^* .

4. Обратный принцип соответствия границ

Пусть D – односвязная область в \mathbb{C} , ограниченная кусочно-гладким контуром Γ . $\bar{D} = D \cup \Gamma$, $f \in H(D)$, функция $f(z)$ отображает контур Γ взаимно однозначно на простой кусочно-гладкий контур Γ^* .

Тогда $f(z)$ отображает D конформно и однозначно на область D^* , ограниченную контуром Γ^* , причем положительному обходу Γ соответствует положительный обход Γ^* .

21 Вычисление несобственных интегралов с использованием вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.

Лемма Жордана:

Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в $\{Im z \geq 0\}$ за исключением изолированного множества точек;

$$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| = R, Im z \geq 0\};$$

$$M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|, M(R) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty;$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow 0$$

Теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов:

Пусть $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x), Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно, $n \geq m + 2$;

$Q_n(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$ (не имеет действительных корней);

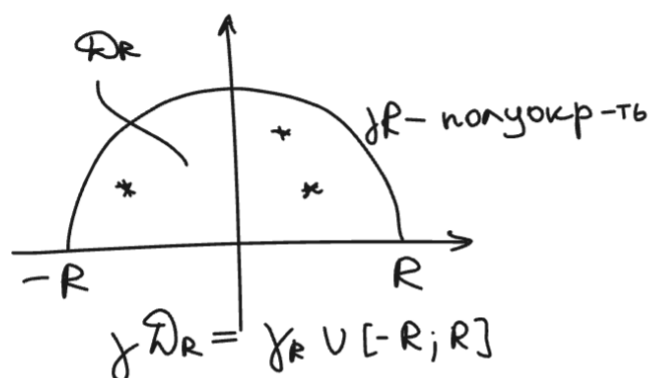
$$\text{Тогда } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{res} f(z_j),$$

где z_1, \dots, z_k — все полюса f в области $Im z > 0$

Доказательство.

Так как f непрерывна на компакте γ_R , то $\exists \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$.

$$\max \frac{|P_m(z)|}{|Q_n(z)|} = \max_{|z|=R, Im z \geq 0} \frac{|d_m z^m + \dots|}{|a_n z^n + \dots|} \sim \max_{|z|=R, Im z \geq 0} \frac{|b_m| |z|^m}{|a_n| |z|^n} =$$



R — такое, что
все особые т. ф
в обл. $\text{Im } z > 0$
расположены
внутри полуокружности

$$= \max_{|z|=R} \frac{|b_m|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^{n-m}} \sim \frac{|b_m|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \text{ при } R \rightarrow \infty$$

Пусть $L(\gamma_R)$ — длина γ_R . Тогда:

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \max_{a \in \gamma_R} |f(z)| \cdot L(\gamma_R) \sim c \frac{1}{R^{n-m}} \pi R = \frac{c\pi}{R^{n-m-1}} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty, n - m - 1 > 0$

Откуда следует, что $\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

По теореме Коши: $\oint_{\gamma_{D_R}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{res } f(z_j)$ не зависит

от R , при $R \rightarrow \infty$:

$$\oint_{\gamma_{D_R}} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx \rightarrow 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad \square$$

Пример вычисления несобственного интеграла от тригонометрических функций:

Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$

Функция $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Здесь $t = 1$ и $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 10}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z = 1 \pm 3i$. В верхней полуплоскости имеется единственная особая точка $z = 1 + 3i$. Вычислим относительно этой точки вычет функции $f(z)$:

$$\operatorname{res} f(1 + 3i) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 2z + 10)'} = \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i}$$

Следовательно, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = 2\pi i \frac{(1 + 3i)e^{-3+i}}{6i} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(1 +$

$3i)(\cos 1 + i \sin 1) = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1) + i \frac{\pi}{3}e^{-3}(3 \cos 1 + \sin 1)$.

Сравнивая в обеих частях этого равенства действительные и мнимые части с учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2 - 2x + 10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10}$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3 \sin 1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 - 2x + 10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(3 \cos 1 + \sin 1),$$

22 Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.

Пусть $f(t)$ — функция, $t \in \mathbb{R}$

Преобразование Лапласа функции f — это

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \in \mathbb{C}$$

Обозначение: $F(p) \doteq f(t), f(t) \doteq F(p)$

Функцию $f(t)$ называют **оригиналом**

\Rightarrow

1. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geq 0$
2. $f(t) = 0$ при $t < 0$
3. $\exists M > 0 : \exists \alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

Теорема о существовании изображения:

Пусть $f(t)$ — оригинал

Тогда: 1) интеграл $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ сходится абсолютно

в области $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha\}$

2) изображение $F(p)$ — аналитическая функция в U_α .

Доказательство.

$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ — условие 3) из определения оригинала

Пусть $p = \delta + is$, тогда:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-\delta t}| \cdot |e^{-ist}| \leq Me^{\alpha t} e^{-\delta t} = Me^{(\alpha - \delta)t}$$

$$\begin{aligned}
|F(p)| &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left| \int_0^b f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \text{по теореме об оценке} \\
&\leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b |f(t) e^{-pt}| dt \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b M e^{(\alpha-\delta)t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{M}{\alpha - \delta} e^{(\alpha-\delta)t} \Big|_0^b = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{M}{\alpha - \delta} (e^{(\alpha-\delta)b} - 1) = -\frac{M}{\alpha - \delta} = \frac{M}{\delta - \alpha}, \text{ значит по при-} \\
&\text{знаку Вейерштрасса сходится равномерно.}
\end{aligned}$$

$$\text{Значит } \operatorname{Re}(p = \delta + is) = \delta \Rightarrow \operatorname{Re} p > \alpha \Rightarrow F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt \Rightarrow$$

$F(p)$ — аналитическая функция. □

Поведение изображения в бесконечности:

Если изображение $F(p)$ аналитическая функция в ∞ , то $F(\infty) = 0$.

Доказательство.

Из доказательства теоремы 1:

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\delta - \alpha},$$

где $\alpha = \text{const}$, $\delta = \operatorname{Re} p$.

Если $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$, то $\frac{M}{\delta - \alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow |F(p)| \rightarrow 0$, т.к. $F(p) \rightarrow F(\infty)$. □

Изображение элементарных функций:

1. Функция Хевисайда ν

$$\nu(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{+\infty}$$

При $p = \delta + is : |e^{-pt}| = |e^{-\delta t} \cdot e^{-ist}|$

Тогда $1 \doteq \frac{1}{p}$

2. Показательная функция

$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$

По теореме затухания $\forall \alpha \in \mathbb{C} : e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha)$

Так как $1 \doteq \frac{1}{p}$, то имеем:

$e^{\alpha t} \cdot 1 \doteq \frac{1}{p - a}$

3. Степенная функция

$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$

Докажем по индукции:

По теореме об интегрировании оригинал $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$

При $n = 0$: выполняется. Пусть выполнено для $n = k$, тогда:

$f(\tau) = \tau^k \doteq \frac{k!}{p^k}$

$t^{k+1} = (k+1) \cdot \int_0^t \tau^k d\tau = (k+1) \cdot \frac{k!}{p^k \cdot p} = \frac{(k+1)!}{p^{k+1}}$

Теорема обращения:

Если $f(t)$ — оригинал с постоянной α ;

$F(p) \doteq f(t); t$ — точка, в которой $f(t)$ — непрерывная.

То $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p) e^{pt} dp$ — интеграл по прямой

$Re p = \gamma, \gamma > \alpha$

- 23 Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.**

Свойства преобразования Лапласа:

1. Теорема линейности:

$$\forall A, B \in \mathbb{R} : Af(t) + Bg(t) \doteq A \cdot F(p) + B \cdot G(p)$$

2. Теорема подобия:

$$\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

3. Теорема затухания (смещения):

$$\forall a \in \mathbb{C} : e^{at} f(t) \doteq F(p - a)$$

Доказательство.

$$e^{at} f(t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

□

4. Теорема запаздывания:

$$\forall \tau > 0 : f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

5. Теорема опережения:

$$\forall \tau > 0 : f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} [F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{pt} dt]$$

6. Теорема дифференцирования интеграла:

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 f'(t) &\doteq \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t) \cdot e^{-pt}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)de^{-pt} = \\
 &0 - f(0)e^{-p \cdot 0} + p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
 |f(t)e^{-pt}| &\leq M \cdot e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \alpha - \operatorname{Re} p < 0 \\
 f'(t) &\doteq -f(0) + p \cdot F(p) \quad \square
 \end{aligned}$$

7. Теорема об интегрировании оригинала:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

8. Теорема о дифференцировании изображения:

$$-t \cdot f(t) \doteq F'(p)$$

9. Теорема об интегрировании изображения:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(z)dz$$

Сверткой функций f, g называется:

$$f \star g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

Теорема умножения изображений:

$$(f \star g)(t) \doteq F(p) \cdot G(p)$$

24 Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.

Три теоремы разложения:

1. Если $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$ сходится при $|p| > R$, то:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

2. Второй метод построения оригинала по изображению:
Каждая рациональная функция $F(p)$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением:

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \deg Q > \deg R$$

3. Пусть $f(t) \doteq F(p)$; $F(p)$ – аналитическая функция при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, а при $\operatorname{Re} p \leq \sigma_0$ имеет конечное число изолированных особых точек p_1, \dots, p_n . Тогда:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(e^{pt} \cdot F(p))(p_k)$$

Теорема подобия:

$$\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

Доказательство.

$$f(\lambda t) \doteq \int_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} \tau = \lambda t \\ t = \frac{\tau}{\lambda} \\ dt = \frac{1}{\lambda} d\tau \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} \frac{1}{\lambda} d\tau =$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$$

□

Теорема запаздывания:

$$\forall \tau > 0 : f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

Доказательство.

$$f(t - \tau) \doteq \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-p\tau} dt = \left| \begin{array}{l} t_1 = t - \tau \\ dt_1 = dt \\ t = t_1 + \tau \end{array} \right| = \int_{-\tau}^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1 =$$

$$\int_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1 + \int_{-\tau}^0 f(t_1) \cdot e^{-pt_1 - p\tau} dt_1$$

Из определения оригинала: $f(t_1) = 0$ при $t_1 < 0$. Тогда:

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \int_0^{+\infty} f(t_1) e^{pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \cdot F(p)$$

□