Комплексный анализ, ФН-12, ИУ-9, 4-й семестр. Ответы на вопросы к экзамену

Весна 2024

Содержание

1 Непрерывность и дифференцируемость функций коплексного переменного, их связь. Теорема Коши-Римана. Голоморфные функции.

ФКП $f : G \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ **непрерывна** в точке z_0, если:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ФКП $f(z)$ **$\mathbb{C}$–дифференцируема в точке** $z_0 \Leftrightarrow$

1. f определена в окрестности точки z_0;
2. $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$,

где $A \in \mathbb{C}$, $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$

Предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ называют **производной ФКП** $f(z)$ **в точке** z_0 и обозначают $f'(z_0)$.

Теорема (1-ый критерий $\mathbb{C}$–дифференцируемости):

ФКП $f(z)$ дифференцируема в точке z_0

$\Leftrightarrow$

$\exists$ производная $f'(z_0)$ функции f в точке z_0, при этом $f'(z_0) = A$.

Доказательство.

"$\Rightarrow$"

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} (A + \alpha(\Delta z)) = A \; (\alpha(\Delta z) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists f'(z_0) = A$.

"$\Leftarrow$"

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$. $\square$

Функция $w = f(z)$ называется **голоморфной (аналитической)** в точке $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f$ – $\mathbb{C}$ – дифференцируема в окрестности точки z_0.

Теорема (об условиях Коши-Римана):

Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где $z = x + iy$, $\mathbb{C}$ – дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда:

1. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ $\mathbb{R}^2$ – дифференцируемы в точке $M_0(x_0, y_0)$;
2. Выполняются условия (уравнения) Коши-Римана:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) \end{cases}$$

При этом $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$.

Доказательство.

"$\Rightarrow$"

$\Delta f(z_0, \Delta z) = A\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z$, но при этом:

$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + i\Delta v(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) =$

$= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + \gamma(\Delta z)\Delta z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + Re(\gamma(\Delta z)\Delta z) \\ \Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + Im(\gamma(\Delta z)\Delta z), \end{cases}$$

где $\dfrac{\gamma(\Delta z)\Delta z}{|\Delta z|} \to 0$ при $\Delta z \to 0$ $((\Delta x, \Delta y) \to 0)$, так как $\gamma(\Delta z) \to 0$, а $\dfrac{\Delta z}{|\Delta z|}$ – ограничена при $\Delta z \to 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} Re(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \\ Im(\gamma(\Delta z)\Delta z) = o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow 1);$$

$$\begin{cases} \Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \\ \Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = \alpha = v'_y \\ u'_y = -\beta = -v'_x \end{cases} \Rightarrow 2)$$

Тогда $f'_z = \alpha + i\beta \Rightarrow \Rightarrow f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0)$

"$\Leftarrow$:" Аналогично $\square$

2 Геометрический смысл комплексной производной. Конформные отображения, связь конформности и дифференцируемости, примеры.

Пусть задана кривая $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, имеющая касательную в точке t_0 с направляющим вектором $\xi = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Назовем ξ касательным вектором в точке t_0 к кривой z.

Теорема (геометрический смысл комплексной производной):

1. Любая голоморфная в т. $z_0 = z(t_0)$ функция f определяет линейное отображение касательных касательных векторов $\eta = f'(z_0)\xi$, где η – образ касательного вектора ξ, являющийся касательным вектором к кривой $f(z)$ в точке $f(z_0)$.

2. Это отображение касательных векторов состоит в растяжении с коэффициентом $|f'(z_0)|$ и повороте на угол $arg f'(z_0)$.

□ а) По правилу дифференцирования сложной функции (в смысле $\mathbb{R}^2$)

$$\eta = \frac{df(z(t))}{dt}(t_0) = f'(z(t_0))z'(t_0) = f'(z_0)\xi$$

б) $|\eta| = |f'(z_0)| \cdot |\eta|$ – растяжение с коэффициентом $|f'(z_0)|$; $arg\eta = arg f'(z_0) + arg\xi \pm 2\pi$ – поворот на угол $arg f'(z_0)$. ■

Отображение F называется **конформным** в точке $M_0(x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда касательное отображение в точке M_0 сохраняет углы.

Отображение F называется **конформным** в области $U \subset \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда оно конформно в любой из точек U.

$U \subset \mathbb{C}$, $H(U)$ – множество голоморфных в U функций.

Теорема (о связи конформности и диффиренцируемости):
U – область в $\mathbb{C}$. Если $f \in H(U)$ и $\forall z \in U \quad f'(z) \neq 0$, тогда f – конформное в U отображение.

□ Доказательство следует из предыдущей теоремы:
В каждой точке $z_0 \in U$ лин.отображение $f'(z_0)$ растигивает в $|f'(z_0)| \neq 0$ и поворачивает на угол $arg\, f'(z_0) \Rightarrow$ лин.отображение в z_0 сохраняет углы.

■

Определение: Угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равнен углу между касательными к $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_2$ в точке 0, где $\hat{\gamma}_1 = \dfrac{1}{\gamma_1}$ и $\hat{\gamma}_2 = \dfrac{1}{\gamma_2}$.

Отображение F называется **конформным** в точке ∞ тогда и только тогда, угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке ∞ равен углу между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ в точке ∞.

3 Определить дробно-линейное отображение (ДЛО). Сформулировать и доказать конформность и групповое свойство ДЛО.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,\ a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c}:\ w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty:\ w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c},\ c \neq 0 \\ \infty,\ c = 0 \end{array}\right.$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Конформность:

Любое ДЛО — конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Доказательство.

1) Рассмотрим точки $z_0 \neq -\frac{d}{c},\ \infty:$

Тогда $w' = \dfrac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

Значит функция w голоморфна в точках z_0 и по теореме о конформности голоморфных отображений, она конформна в этих точках z_0.

2) Рассмотрим точку $z_0 = -\frac{d}{c}:$

$$z \xrightarrow{L} w = \frac{az+b}{cz+d} \xrightarrow{L_0} \xi = \frac{1}{w}$$

$$-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}} \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{L_0} \mathbf{0}$$

Отображение $\xi = \dfrac{1}{w}$ сохраняет углы, то есть L_0 конформно.

Рассмотрим $L_0 \circ L$ в точке $z_0 = -\dfrac{d}{c}$:

$$(L_0 \circ L)'_{|z=-\frac{c}{d}} = \frac{cb - ad}{(az+b)^2}_{|z=-\frac{c}{d}} \neq 0$$

Значит отображение $L_0 \circ L$ конформно в точке $z_0 = -\dfrac{c}{d}$
$L = L_0^{-1} \circ (L_0 \circ L)$ конформно, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны.

3) Рассмотрим точку $z_0 = \infty$:

$$\xi = \frac{1}{z} \xleftarrow{L_0} z \xrightarrow{L} w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{L_0} \infty \xrightarrow{L} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$

Рассмотрим отображение $L \circ L_0^{-1}$:

$$w = \frac{a \cdot \frac{1}{\xi} + b}{c \cdot \frac{1}{\xi} + d} = \frac{b \cdot \xi + a}{d \cdot \xi + c}$$

$$w'_{|0} = \frac{dc - da}{(d \cdot \xi + c)^2}_{|\xi=0} \neq 0$$

Значит отображение $L \circ L_0^{-1}$ конформно в точке $\xi_0 = 0$.
Тогда отображение $L = (L \circ L_0^{-1}) \circ L_0$ конформно в точке $z_0 = \infty$, так как композиция конформных и обратное к конформному отображению конформны. □

Групповое свойство ДЛО:

Совокупность всех ДЛО Λ образует некоммутативную группу $(\Lambda; \circ)$ относительно операции композиции.

Доказательство.

0) Замкнутость:

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $\xi = \dfrac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$

$$\xi = \frac{a_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + b_1}{c_1 \cdot \frac{az+b}{cz+b} + d_1} = \frac{a_1(az+b) + b_1(cz+d)}{c_1(az+b) + d_1(cz+d)} =$$
$$= \frac{(a_a + b_1c)z + a_1b + b_1d}{(c_1a + d_1c)z + c_1b + d_1d}$$

Определитель $\begin{vmatrix} a_1a + b_1c & a_1b + b_1d \\ c_1a + d_1c & c_1b + d_1d \end{vmatrix}$ не равен 0, так как иначе композиция ДЛО была бы отображением в одну точку, но композиция биекций есть биекция.

1) Ассоциативность выполняется, так как композиция отображений ассоциативна

2) Существование единицы:
$E: \ w = z, \ \begin{pmatrix} a = 1 & b = 0 \\ c = 0 & d = 1 \end{pmatrix}, \ det = 1 \neq 0$

3) Существование обратного:
Пусть $L: \ w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ — ДЛО.
Построим обратное:

$$w(cz+d) = az + b$$

$$z(wc - a) = b - dw$$

$$L^{-1}: \ z = \frac{b - dw}{wc - a} \text{ — ДЛО, так как } \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

4) Некоммутативность:
Приведем контрпример

$$L_1: \ w = z + a, \ L_2: \ w = \frac{1}{z}$$

$$L_1 \circ L_2: \ z \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z} \xrightarrow{L_1} w = \frac{1}{z} + a$$

$$L_2 \circ L_1: \ z \xrightarrow{L_1} w = z + a \xrightarrow{L_2} w = \frac{1}{z+a}$$

Получили, что $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$ $\square$

4 Дробно-линейные функции, их геометрическая интерпретация и свойство трёх точек.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \ \ a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c} : \ \ w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty : \ \ w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c}, \ \ c \neq 0 \\ \infty, \ \ c = 0 \end{array} \right.$$

Тогда ДЛО: $w : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Геометрическая интерпретация: ДЛО — взаимно-однозначное непрерывное отображение $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Теорема о трех точках

Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 и других трех различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛО $L(z) : L(z_i) = w_i$

Доказательство

1) *Существование*

Для любых 3-х точек z_1, z_2, z_3 существует ДЛО, отображающее их в $0, \infty, 1$ соответственно:

$$w = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

Тогда рассмотрим отображения $L_1 : \xi = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ и L_2 : $\xi = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$. Из группового свойства ДЛО следует, что L_2^{-1} – тоже ДЛО, и композиция ДЛО – тоже ДЛО. Тогда получаем, что отображение $L = L_2^{-1} \circ L_1$ есть ДЛО, причем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2^{-1}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то есть L есть искомое ДЛО.

2) *Единственность* Пусть λ – ДЛО, отличное от L, построенного в пункте 1, удовлетворяющее условиям теоремы.

Рассмотрим отображение $\mu = L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1}$. Из группового свойства ДЛО полученное отображение – ДЛО, причем

$$\mu : \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Теперь покажем, что $\mu = id$:

$\mu = \dfrac{az+b}{cz+d}$

a) $\mu(\infty) = \dfrac{a}{c} = \infty \Rightarrow c = 0$

b) $\mu(0) = \dfrac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0$

c) $\mu(1) = \dfrac{a}{d} = 1 \Rightarrow a = d$

В итоге получаем, что $\mu(z) = z \Rightarrow \mu = id$, то есть $L_2 \circ \lambda \circ L_1^{-1} = id \Rightarrow \lambda = L_2^{-1} \circ L_1 = L$, что и требовалось доказать.

5 Дробно-линейные функции, их геометрические свойства: круговое свойство и сохранение симметричности.

Дробно-линейные отображения — это функции вида:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Доопределим функцию выше следующим образом:

$$z = -\frac{d}{c}: \;\; w(-\frac{d}{c}) = \infty$$

$$z = \infty: \;\; w(\infty) = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{c}, \;\; c \neq 0 \\ \infty, \;\; c = 0 \end{array}\right.$$

Тогда ДЛО: $w: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

Круговое свойство ДЛО

Любое ДЛО преобразует обобщенную окружность (окружность и ли прямая в $\overline{\mathbb{C}}$) в обобщенную окружность.

Доказательство.

1) случай, когда $c = 0$:

$L: \;\; w = az + b$

$z \xrightarrow{L_1} z_1 = az \xrightarrow{L_2} z_2 = z_1 + b$

L_1 — растяжение с поворотом: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

L_2 — сдвиг: окружность перейдет в окружность, а прямая в прямую

2) случай, когда $c \neq 0$:

$$L: \;\; w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{caz + bz - acz - ad}{c(cz+d)} =$$

$$\frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

Обозначим $A = \dfrac{a}{c}, \;\; B = \dfrac{bc-ad}{c}, \;\; C = \dfrac{d}{c}$:

$L: \ w = A + \dfrac{B}{z+C}$

$z \xrightarrow{L_1} z_1 = z + C \xrightarrow{L_2} z_2 = \dfrac{1}{z_1} \xrightarrow{L_3} z_3 = B \cdot z_2 \xrightarrow{L_4} w = A + z_3$

Отображения L_1 и L_4 — сдвиги, L_3 — растяжение с поворотом. Они переводят окружности в окружности, а прямые в прямые.

Рассмотрим отображение $L_2: \ w = \dfrac{1}{z}$

Общее уравнение обобщённой окружности на плоскости xOy:

$$E(x^2+y^2) + F_1 x + F_2 y + G = 0$$

$$E, F_1, F_2, G \in \mathbb{R}, \ (E, F_1, F_2, G) \neq (0,0,0,0)$$

Запишем это уравнение через переменную $z = x + iy$:

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2}, \ y = \frac{z-\overline{z}}{2i} = i\frac{\overline{z}-z}{2}$$

$$Ez\overline{z} + F_1\frac{z+\overline{z}}{2} + F_2 i\frac{\overline{z}-z}{2} + G = 0$$

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0,$$

$$\text{где } F = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{2}iF_2 \in \mathbb{C}, \ \overline{F} = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}iF_2$$

Тогда кривая, полученная в результате преобразования L_2 задается уравнением:

$$E\frac{1}{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + F\frac{1}{z} + \overline{F}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} + G = 0 | \cdot z\overline{z}$$

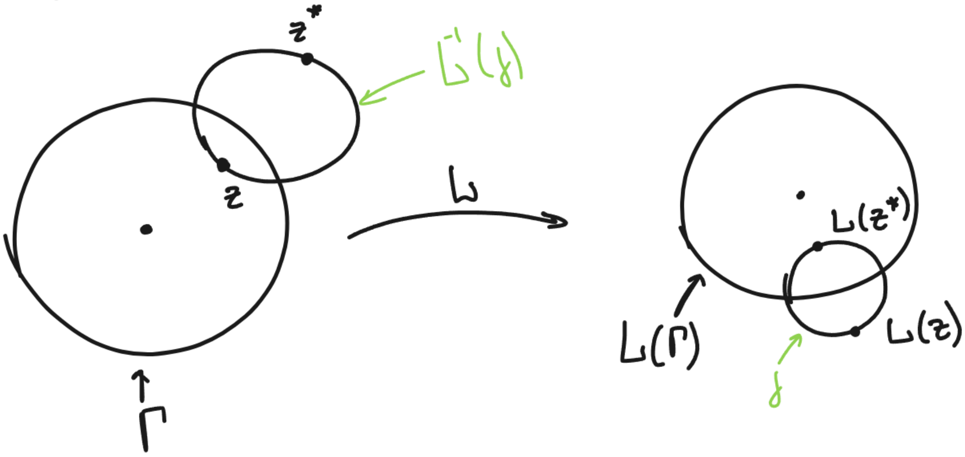
$$E + F\overline{z} + \overline{F}z + Gz\overline{z} = 0,$$

что является уравнением обобщенной окружности. Значит отображение L_2 переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность. $\square$

Свойство ДЛО сохранения симметричности

Произвольное ДЛО L преобразует любые точки z и z^*, симметричные относительно обобщенной окружности Γ, в точки

$L(z)$ и $L(z^*)$, симметричные относительно обобщенной окружности $L(\Gamma)$.



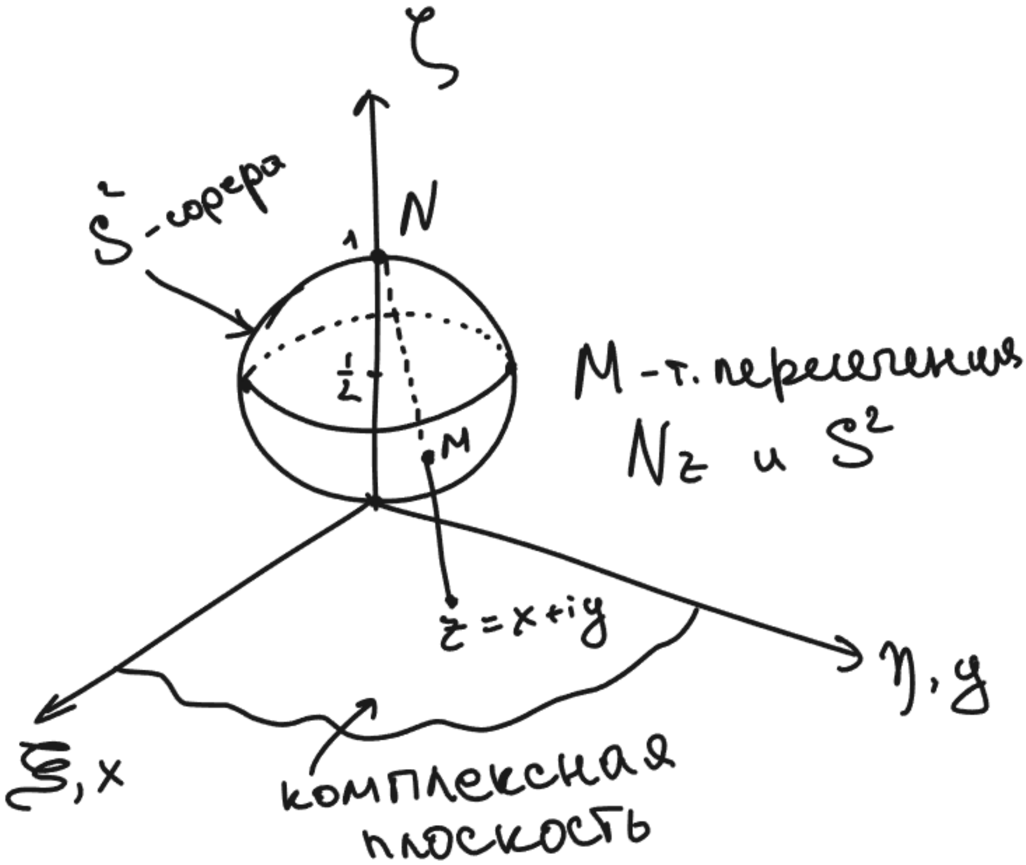
Доказательство.
Пусть γ — произвольная обобщенная окружность, проходящая через точки $L(z)$ и $L(z^*)$. Тогда $L^{-1}(\gamma)$ — обобщенная окружность по круговому свойству ДЛО.

Так как $L(z)$, $L(z^*) \in \gamma$, то:
$L^{-1}(L(z)) = z \in L^{-1}(\gamma)$ и $L^{-1}(L(z^*)) = z^* \in L^{-1}(\gamma)$.

По определению симметричных точек окружности Γ и $L^{-1}(\gamma)$ ортогональны. ДЛО L сохраняет углы, а значит $L(\Gamma)$ ортогональна $L(\gamma)$. $\square$

6 Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость и ее топология. Бесконечно удаленная точка, ее окрестности. Угол между кривыми в бесконечности. Дифференцируемость и конформность в бесконечности. Дробно-линейные функции как отображения расширенной комплексной плоскости.

Выберем ДСК с осями ξ, η, ζ, причем оси ξ, η совпадают с осями x, y. Рассмотрим сферу радиуса $\dfrac{1}{2}$ в этой системе коор-



динат, которая описывается уравнением

$$S^2 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

а также луч, исходящий из точки $N(0,0,1)$, и пересекающий плоскость $0xy$ в точке (x,y), заданный параметрически:

$$\begin{cases} \xi = 0 + tx \\ \eta = 0 + ty \\ \zeta = 1 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Точка пересечения луча со сферой (ξ, η, ζ) (подставляем в уравнение сферы уравнения луча):

$$t^2x^2 + t^2y^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) - t = 0 \quad | : t \neq 0$$

$$t = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{x}{1 + |z|^2} \\ \eta = \dfrac{y}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{y}{1 + |z|^2} \\ \zeta = \dfrac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} = \dfrac{|z|^2}{1 + |z|^2} \end{cases} \tag{3}$$

Обратное отображение:

$$\zeta = \frac{|z|^2 + 1 - 1}{1 + |z|^2} \Rightarrow \frac{1}{1 + |z|^2} = 1 - \zeta$$

$$\Rightarrow \xi = x(1 - \zeta), \eta = y(1 - \zeta) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\xi}{1 - \zeta} \\ y = \dfrac{\eta}{1 - \zeta} \end{cases} \tag{4}$$

Отображения (3) и (4) являются однозначными отображениями между $\mathbb{C}$ и $S^2 \setminus N$, так как в преобразованиях не возникали неоднозначности.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}$ называется **расширенной комплексной плоскостью**.

Топология $\overline{\mathbb{C}}$:

Открытое множество на S^2 – $U \cap S^2$, где U – открытое в $\mathbb{R}^3$.

Условимся, что точке $N(0,0,1)$ соответствует точка ∞ поля $\overline{\mathbb{C}}$, тем самым определяется биекция между S^2 и $\overline{\mathbb{C}}$, точка ∞ называется **бесконечно удаленной точкой**.

Окрестностью U бесконечно удаленной точки называется множество точек z, удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| > R, R \in \mathbb{R}$$

Функция $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in U$, **дифференцируема в точке** ∞, если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ дифференцируема в нуле.

Функция $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in U$, **конформна в точке** ∞, если функция $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ конформна в нуле.

7 Интеграл от функции комплексного переменного вдоль пути в $\mathbb{C}$. Его свойства.

Путь – параметризованная кривая, возможно с самопересечением (непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

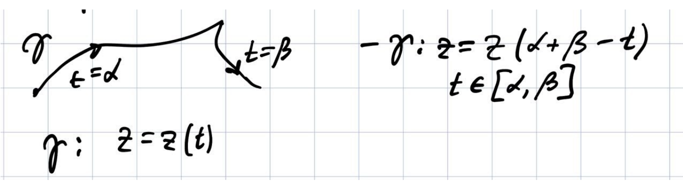
Пусть γ – гладкий путь, то есть $\gamma : z = z(t)$, $t \in J = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $z(t) \in \mathbb{C}$, $z(J) \subset \mathbb{C}$, функция $f(z)$ определена на $z(J)$ и функция
$f(z(t)) : J \to \mathbb{C}$ непрерывна (говорят, что f непрерывна на γ).

Число $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$ называют **интегралом от функции f вдоль пути γ** и обозначают $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, где $z(t) = x(t) + iy(t)$, $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Свойства интеграла:

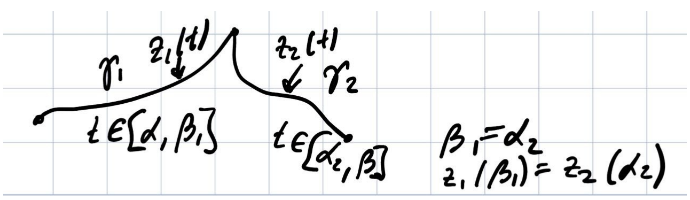
1. Линейность: $\displaystyle\int_\gamma [af(z)+bf(z)]\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + b\int_\gamma f(z)\,dz$;

2. Ориентированность:



$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz;$$

3. Аддитивность:



$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : z = \begin{cases} z_1(t), t \in [\alpha, \beta_1]; \\ z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta]. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz;$$

4. Независимость интеграла от выбора параметризации кривой:
   Пусть $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma_1 : z = z_1(\tau)$, $\tau \in [\alpha_1, \beta_1]$ – два непрерывно дифференцируемых пути, $z_1(\tau) = z(t(\tau))$ $\forall \tau \in [\alpha_1, \beta_1]$, где $t = t(\tau) : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ – непрерывно дифференцируемая возрастающая функция, f непрерывна на γ.
   Тогда $\displaystyle\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz;$
5. Оценка интеграла:
   Если f – непрерывная функция на кусочно-гладком пути $\gamma : z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то $\displaystyle|\int_{\gamma} f\,dz| \le \int_{\gamma} |f(z)||z'(t)|\,dt$
   ($|z'(t)|dt = |dz|$ – дифференциал длины дуги).

Доказательство.

4. Независимость интеграла:

$$\int\limits_{\gamma} f dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt =$$

$$\left| t = t(\tau),\ dt = t'(\tau)d\tau,\ \frac{dz(t(\tau))}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dz(t(\tau))}{dt} \right|$$

$$= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(z))) \cdot z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(\tau))z'(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_1} dz$$

5. Оценка интеграла:

Пусть $I = \displaystyle\int\limits_{\gamma} f dz \in \mathbb{C} = |I| \cdot \exp^{i\theta}$

$|I| = \exp^{-i\theta} \cdot I = \int \exp^{-i\theta} f[z(t)]z'(t)dt$

Обозначим $g(t) = \exp^{-i\theta} f[z(t)]z'(t)$.

Тогда $|I| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Re\, g(t)dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} Im\, g(t)dt \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} |g(t)|dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\exp^{-i\theta}| \cdot$ $|f(z(t))| \cdot |z'(t)|dt$ $\square$

8 Теорема Коши для односвязных и многосвязных областей

Теорема 1 (Коши для односвязной области)
Если $D \subset \mathbb{C}$ – односвязная область, $f \in H(D)$ (f голоморфна), $\gamma \subset D$ – замкнутая кривая, то $\displaystyle\int_\gamma f\,dz = 0$.

Доказательство.
Для случая, когда $f'(z)$ непрерывная в D:
$z = x + iy$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$I = \int\limits_\gamma f dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int [u(zx(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))]\cdot$$

$$[x'(t) + it'(t)]dt = \int\limits_\alpha^\beta [u \cdot x' - v \cdot y') + i(uy' + vx')]dt = \int\limits_\alpha^\beta (ux' -$$

$$vy')dt + i\int\limits_\alpha^\beta (uy' + vx')dt = \int\limits_\gamma udx - vdy + i\int\limits_\gamma udy + vdx =$$

Разрежем γ на простые контуры γ_i:

$\gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \gamma_j$, G_j – область внутри γ_j

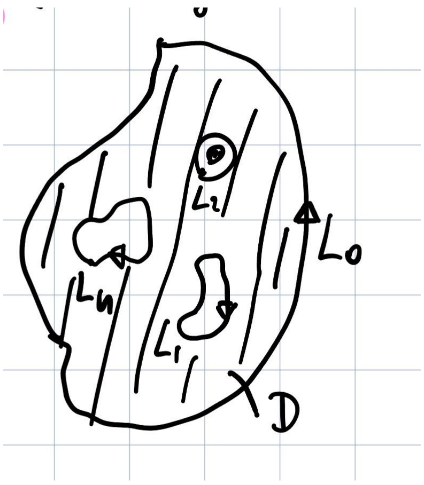
$$I = \sum_{j=1}^{k} \left[\oint\limits_{\gamma_j} u\,dx - v\,dy + i \oint\limits_{\gamma_j} v\,dx + u\,dy \right] =$$

$$= \sum_j \left[\iint\limits_{G_j} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy + i \iint\limits_{G_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy \right] = 0$$

□

Теорема 2 (Коши для многосвязной области)

Пусть многосвязная область D ограничена внешним конту-



ром L_0 и внутренними контурами L_1, ..., L_n, контуры L_1, ..., L_n – кусочно-гладкие, $f \in H(D \cup L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n)$.
Тогда $\displaystyle\int_L f\,dz = 0$, где $L = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_n$, обход L_0 – против часовой стрелки, L_1, ..., L_n – по часовой стрелке.

Замечание. $\displaystyle\oint_{L_0} f\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{L_i} f\,dz$, где обход L_0, L_1, ..., L_n против часовой стрелки.

Доказательство.
С помощью разрезов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ получим односвязную область D^*. Тогда $D = D^* \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$.
Так как D^*–односвязная, то $0 = \displaystyle\int\limits_{D^*} f dz =$

Граница $D^* = L_0 \cup \gamma_1 \cup -\gamma_1 \cup L_1 \cup \ldots \cup \gamma_n \cup -\gamma_n \cup L_n$.
Тогда из аддитивности и ориентированности:

$$= \int\limits_{L_0} f dz + \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{\gamma_i} f dz + \int\limits_{-\gamma_i} f dz + \int\limits_{L_i} f dz \right] = \int\limits_{L} f dz = 0 \qquad \square$$

9 Интегральная формула Коши для функции и ее производных.

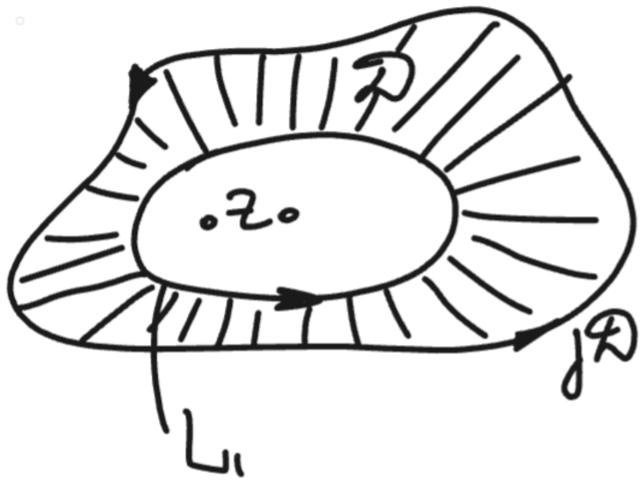
Интегральная формула Коши для голоморфных функций:

Пусть D — односвязная область в $\mathbb{C}$, ∂D — граница D, $f \in H(D \cup \partial D)$.

Тогда для $z_0 \in D$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство.



1) Пусть L_1 – простой контур, $L_1 \subset D$

Пусть D_1 – область внутри L_1, $G = D \backslash D_1 \backslash L_1$ – многосвязная область

По т. Коши для многосвязной области:

$$\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

т.к. $\dfrac{f(z)}{z - z_0} \in H(G)$

Имеем $\partial G = \partial D \cup (-L_1)$:

$$\oint \partial D \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0$$

2) Пусть $\gamma:\ z = z + r\cdot e^{it},\ t\in[0,2\pi],\ r>0$
$f(z) = (z-a)^n;\ n\in\mathbb{Z}$

$$\int\limits_\gamma (z-a)^n dz = \int\limits_0^{2\pi}(a+r\cdot e^{it}-a)^n\cdot r\cdot ie^{it}dt = r^{n+1}\cdot i\cdot\int\limits_0^{2\pi}e^{it(n+1)}dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow \oint\limits_{L_1}\dfrac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$, где L_1 – окр-ть с центром в точке z_0

3) Пусть σ_1 – радиус L_1 и $L_1\subset D$

$$I = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f)(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{dz}{z-z_0}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_1}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi|i|}\oint\limits_{L_1}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| z'(t)dt$$

4) Так как $f\in H(D)$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\ |z-z_0|<\delta\to$
$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$
Имеем $z\in L_1:\ |z-z_0| = \sigma_1$:
$\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sigma_1}:\ \oint\limits_{L_1}|z'(t)|dt$ – длина L_1, то есть $2\pi\sigma_1$

Тогда $I \le \dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\gamma_1}\cdot 2\pi\sigma_1 = \varepsilon \Rightarrow$ не зависит от ε

□

Интегральная формула Коши для производных:

Пусть $f\in H(D):\ G\cup\partial G\subset D;\ D$ — область, ограниченная конечным числом замкнутых кривых, $z_0\in G$

Тогда:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Доказательство.

По теоремам о разложении голоморфной функции в степенной ряд и теореме о единственности разложения в степенной ряд:

$c_n = \dfrac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma r} \dfrac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}; \oint\limits_{\gamma r} ... = \oint\limits_{\gamma G}$ □

10 Степенные ряды в $\mathbb{C}$, их свойства. Голоморфность суммы степенного ряда.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ — **степенной** ряд, $c_n \in \mathbb{C}$.

Свойства:

1. Теорема Абеля:

   Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке z_1, то этот ряд сходится в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < |z_1-z_0|\}$ и на любм компакте $K \subset U$ он сходится равномерно.

2. Теорема Коши-Адамара:

   Пусть для ряда $A : \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ имеем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{1}{R}$, где $, \leq R \leq \infty$.
   Тогда в любой точке $z : \ |z-z_0| < R$ ряд сходится и в любой точке $z : \ |z-z_0| > R$ ряд расходится.

Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < R\}$ $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

Тогда $S \in H(U_R(z_0))$ и $S'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z-z_0)^{n-1}$ $(*)$

Доказательство.
$r : \ 0 < r < R$ – произвольные.
Пусть $z_1 \in U_R(z_0) : \ |z-z_0| > r$
$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z-z_0| < r\} :$
$$|n \cdot C_n(z-z_0)^{n-1}| = n\left|C_n\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(z_1-z_0)^n}\right| \cdot |(z_1-z_0)^n| = n\frac{1}{|z_1-z_0|} \cdot$$

$|C_n(z_1-z_0)^n| \cdot \left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^{n-1} \leq n\dfrac{M}{|z_1-z_0|}\rho^{n-1}$,

где $M > |C_n(z_1-z_0)^n|$, $\rho = \left|\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|$

То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\dfrac{M}{|z_1-z_0|}\rho^{n-1} = \dfrac{M}{|z_1-z_0|}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ – мажорирующий для ряда $(*)$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ сходится при $\rho \in (0;1)$ как ряд из производных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $(*)$ сходится равномерно и абсолютно в $U_r(z_0)$.

Для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U_r(z_0)$ по теореме Коши:

$$\oint\limits_{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(z-z_0)^{n-1}\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \oint\limits_{\gamma}(z-z_0)^{n-1}dz = 0$$

Значит функция $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n(z-z_0)^{n-1}$ имеет первообразную в $U_r(z_0)$, которая равна:

$$\int\limits_{z_0}^{z} g(\xi)d\xi = \int\limits_{z_0}^{z}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n(\xi-z_0)^{n-1}d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n\frac{(z-z_0)^n}{n} =$$

$S(z) - S(z_0) = S(z) - C_0$.

Следовательно $S \in H(U_r(z_0)) \forall r \in (0;R)$.

Поэтому $S \in H(U_R(z_0))$ и $S' = g$. $\square$

Следствия из этой теоремы:

1. Производная функции $f \in H(D)$ голоморфна в D

Доказательство.

$z_0 \in D$ – произвольная точка множества D $\Rightarrow z_0$ – внутренняя точка D, так как D – открытое множество $\Rightarrow$

$\exists R > 0 : U_R(z_0) \subset D \Rightarrow$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow \text{(голом. степенного ряда)}$$

$\Rightarrow$ $f'(z)$ – сумма степенного ряда, значит голоморфна $\square$

2. Если функция f в области D первообразную, то $f \in H(D)$
3. $f \in H(D) \Rightarrow f$ бесконечно дифференцируема и все ее производные голоморфны

11 Теорема о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля.

Теорема о разложение голоморфной функции в ряд Тейлора:

Пусть D – область в $\mathbb{C}$ $f \in H(D)$, $z_0 \in D, U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset D$.

Тогда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$, $z \in U_R(z_0)$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\gamma_r} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$, $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

Доказательство.
По интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \text{ если } |z - z_0| < r$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \ (=)$$

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

$$(=) \ \frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n, \ \frac{1}{2\pi i} f(z) \text{ – непрерывна.}$$

Тогда $\dfrac{1}{2\pi i} f(z) \cdot \dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{2\pi i} \sum \dfrac{f(\xi)(z - z_0)^n}{0}$ – сходится равномерно, значит можно интегрировать почленно.

Тогда получаем утверждение теоремы:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

□

Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

Пусть функция $f \in H(\overline{U})$, где $U = \{z : |z - z_0|d \leq r\}$ и $\partial\overline{U} = \gamma_r$, $|f(z) \leq M$.

Тогда коэффициенты ряда Тейлора f удовлетворяют следующему неравеству: $|c_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$

Доказательство.

$$|c_n| = |\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

так как $|f(\xi)| \leq M$ и $(\xi - z)^{n+1} \leq r^{n+1}$ □

Теорема Лиувилля:

$f \in H(\mathbb{C})$ и f – ограниченная функция $\Rightarrow$ $f = const$

Доказательство. По теореме о разложении голоморфной функции в ряд Тейлора функция f представима в виде $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ внутри окружности любого радиуса R, причем по этой же теореме коэффициенты ряда не зависят от R.

Тогда из неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

Из того что R произвольный следует, что $c_n = 0$ для любого n, а значит $f = const$ □

12 Бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Морера. Эквивалентность голоморфности в смысле Римана, Коши и Вейерштрасса.

Голоморфность суммы степенного ряда:

Пусть в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$ $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Тогда $S \in H(U_R(z_0))$ и $S'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n(z - z_0)^{n-1}$ $(*)$

Доказательство.
$r : \ 0 < r < R$ – произвольные.
Пусть $z_1 \in U_R(z_0) : \ |z - z_0| > r$
$\forall z \in U_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\} :$
$|n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1}| = n \left| C_n \dfrac{(z - z_0)^{n-1}}{(z_1 - z_0)^n} \right| \cdot |(z_1 - z_0)^n| = n \dfrac{1}{|z_1 - z_0|} \cdot$
$|C_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^{n-1} \leq n \dfrac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1},$
где $M > |C_n(z_1 - z_0)^n|, \ \rho = \left| \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|$
То есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \dfrac{M}{|z_1 - z_0|} \rho^{n-1} = \dfrac{M}{|z_1 - z_0|} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \rho^{n-1}$ – мажорирующий для ряда $(*)$.
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ сходится при $\rho \in (0; 1)$ как ряд из производных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $(*)$ сходится равномерно и абсолютно в $U_r(z_0)$.

Для любой замкнутой кривой $\gamma \subset U_r(z_0)$ по теореме Коши:

$$\oint\limits_{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nC_n(z-z_0)^{n-1}\right)dz=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\oint\limits_{\gamma}(z-z_0)^{n-1}dz=0$$

Значит функция $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot C_n(z-z_0)^{n-1}$ имеет первообразную в $U_r(z_0)$, которая равна:

$$\int\limits_{z_0}^{z} g(\xi)d\xi=\int\limits_{z_0}^{z}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot C_n(\xi-z_0)^{n-1}d\xi=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n\frac{(z-z_0)^n}{n}=$$
$S(z)-S(z_0)=S(z)-C_0$.
Следовательно $S\in H(U_r(z_0))\forall r\in(0;R)$.
Поэтому $S\in H(U_R(z_0))$ и $S'=g$. □

Следствие из этой теоремы: Производная функции $f\in H(D)$ голоморфна в D

Доказательство.
$z_0\in D$ – произвольная точка множества D $\Rightarrow$ z_0 – внутренняя точка D, так как D – открытое множество $\Rightarrow$

$\exists R>0: U_R(z_0)\subset D\Rightarrow$

(теорема о разложении голоморфной функции в ряд)

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\Rightarrow$ (голом. степенного ряда)

$\Rightarrow$ $f'(z)$ – сумма степенного ряда, значит голоморфна □

Из следствия 1 теоремы о разложении функции в степенной ряд следует бесконечная дифференцируемость голоморфных функций.

Теорема о единственности разложения в степенной ряд:

Если в $U_R(z_0)$ $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, то $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Доказательство.

$$f(z_0) = c_0$$

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1} = c_1$$

$$\dots$$

$$f^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k} =$$

$$= k(k-1)\cdot \dots \cdot 1 = k!c_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

□

Теорема Морера:

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – область, $f \in C(D)$ и $\int\limits_{\partial\Delta} = 0$ для произвольного треугольника Δ при $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$.

Тогда $f \in H(D)$

Доказательство.

Пусть $a \in D$ – призвольная точка.

Так как D – открытое, то $\exists r : U_r(a) \subset D$

Рассмотрим функцию $F = \int\limits_{[a,z]} f(\xi)d\xi$, $z \in U_r(z_0)$

Аналогично доказательству теоремы о первообразной $F \in H(D)$ и $F'(z) = f(z)$

Из голоморфности производной голоморфной функции следует утверждение теоремы □

Теорема об эквивалетности трех определений голоморфности: 3 следующих утверждения эквивалентны: R) функция f в некоторой окрестности $U(a)$ имеет комплексную производную (Риман)

C) $f \in C(U(a))$ и $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ для любого треугольника $\Delta \subset U(a)$ (Коши) W) функция f разложима в степенной ряд в окрестности точки a по $(z-a)$ (Вейерштрасс)

Доказательство.
$R) \Rightarrow C)$ – из теоремы Коши

$R) \Rightarrow W)$ – по теореме о разложении голоморфной функции степенной ряд

$W) \Rightarrow R)$ – теорема о голоморфности суммы степенного ряда

$C) \Rightarrow R)$ – по теореме Морера $\square$

13 Нули голоморфной функции, их свойства. Теорема единственности. Вычисление порядка нуля.

Определение:

Нулем функции f называется точка $a \in \mathbb{C} : f(a) = 0$

Теорема:

Если $f(a) = 0$, f голофорфна в точке a, и $f \equiv 0$ в какой то окрестности точки a, то $\exists n \in \mathbb{N} : f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z) \neq 0$ и φ голоморфна в точке a

Доказательство.

По теореме о разложении голоморфной функции в степенной ряд:

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ в некоторой окрестности точки a

$f(a) = c_0 = 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ $c_n \neq 0$ (иначе $f(z) \equiv 0$)

Пусть $n \in \mathbb{N}$ – такое, что $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^k = (z-a)^k \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n}$$

Функция $\varphi = \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n}$ и есть искомая функция (голоморфна и не ноль в a) $\square$

Следствие:

Если $f(a) = 0$, f голоморфна в точке a, то существует выколотая окрестность точки a, где функция не имеет нулей, то есть ее нули – изолированные точки

Теорема о порядке нуля голомофрной функции:

Порядок нуля $a \in \mathbb{C}$ голоморфной функции f совпадает с n в формуле $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$

Доказательство.
В ходе доказательства теоремы о представлении голоморфной функции имеющей нуль было показано,

что $c_0 = \ldots c_{n-1}$. Из того что $c_k = f^{(k)}(a)$ следует доказательство теоремы □

Теорема единственности:

Если D – область в $\mathbb{C}$; $f_1, f_2 \in H(D)$, $\forall z \in \mathcal{E} \subset D : f_1 = f_2$,

a – предельная точка множества $\mathcal{E}$ и $a \in D$, то $f_1 = f_2$ на всем D

Доказательство.
$f = f_1 - f_2 \in H(D)$, $\mathcal{R} = \{z \in D : f_1 = f_2\}$.

Тогда a – предельная точка множества $\mathcal{R}$

Тогда есть последовательность $\{z_n\}$, $z_n \to a$ при $n \to \infty$.

Из непрерывности f следует что $\lim\limits_{z_n} f(z_n) = 0$, а

Из того что a – предельная точка множества $\mathcal{R}$ и следствия теоремы следует, что

$f \equiv 0 \Rightarrow f_1 = f_2$ в некоторой окрестности точки a

Из того что a – произвольная предельная точка имеем, что $\mathcal{R}$ – замкнутое подмножество D

Из связности D следует, что $Int\mathcal{R} = D$ □

14 Ряды Лорана, их области сходимости. Теоремы о разложении голоморфной функции и о единственности разложения в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Ряд Лорана:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Первая сумма, с отрицательными коэффициентами, $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$, называется **главной частью**.

Вторая сумма называется **правильной частью**.

Ряд Лорана сходится, когда сходятся оба ряда.

Ясно, что правильная часть сходится, если

$$|z-a| < R_1$$

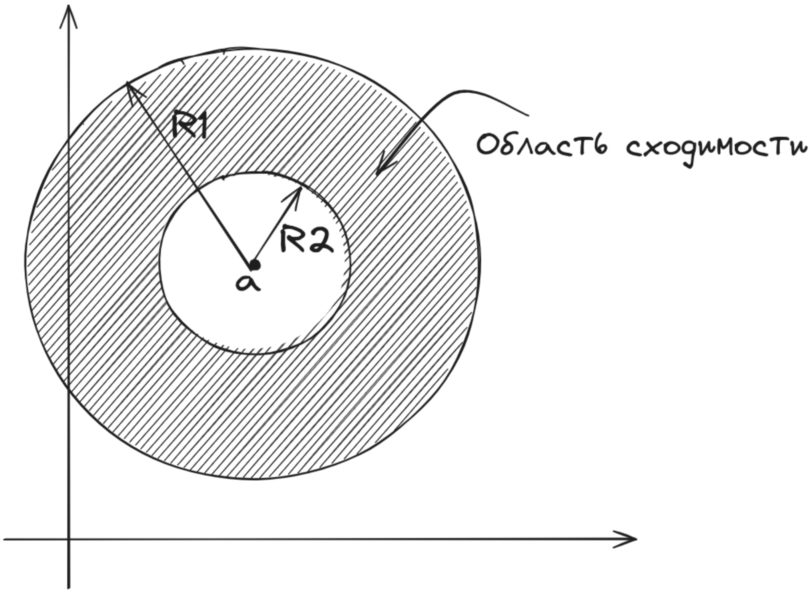
где R – некоторое действительное число. Аналогичным образом при замене $\xi = \dfrac{1}{z-a}$ главная часть преобразуется к обычному ряду

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \xi^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\xi^k$$

откуда $\xi < R_2$, где R_2 – некоторое действительное число, откуда

$$|z-a| > R_2$$

Таким образом получаем два условия сходимости ряда Лорана, оба из которых должны выполняться для сходимости ряда, а значит областью сходимости ряда Лорана (за исключением граничных случаев) является кольцо:



Теорема Лорана.

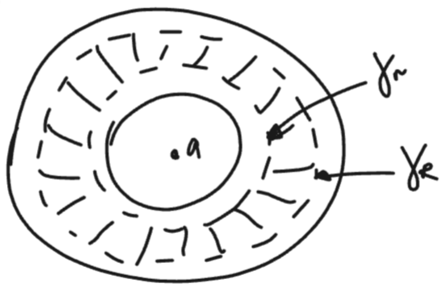
Пусть $0 \le R_2 < R_1 \le \infty$, $V = \{z \in \mathbb{C} \mid R_2 < |z-a| < R_1\}$, $f \in H(V)$.

Тогда $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

$n \in \mathbb{Z}, R_2 < \rho < R_1$

Доказательство.



Пусть r, R – такие, что $R_2 < r < R < R_1$.
Тогда $V' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$

$\gamma V' = \gamma_r(a) \cup \gamma_R(a) \subset V, a \in V'$

Интегральная формула Коши: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot \displaystyle\int\limits_{\gamma V'} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R(a)} ... - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r(a)} ...(=)$$

На $\gamma_R(a)$ обход против часовой стрелки:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a)(1 - \frac{z-a}{\xi-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} =$$

$$\frac{-1}{(z-a)(1 - \frac{\xi-a}{z-a})} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}} =$$

$$-\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}}$$

$$(=) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint \gamma_R(a) \to \gamma_\rho(a) f(\xi) \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi =$$

$$= \sum_{k=-1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_r(a) \to \gamma_\rho(r)} f(\xi) \frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n +$$

$$+ \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^{-k}$$

$\square$

Теорема о единственности разложения в ряд Лорана.

Если в кольце $V = \{z \in \mathbb{C} \ | \ r < |z - a| < R\}$

$$(*) f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

то

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

где $n \in \mathbb{Z}, r < \rho < R$

Доказательство.
Ряд сходится равномерно на γ, т.к.:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$
1.
$|c_n(z-a)^n| = |c_n| \cdot |z-a|^n = |c_n|\rho^n < |c_n|R^n, z = a + \rho e^{it}$
$r < r_1 < \rho < R_1 < R$
$\sum |c_n|R^n$ – сходится, значит по признаку Вейерштрасса первая часть $f(z)$ сходится равномерно.
2.
$|c_{-k}(z-a)^{-k}| = \dfrac{|c_{-k}|}{|z-a|^k} = \dfrac{|c_{-k}|}{\rho^k} < \dfrac{|c_{-k}|}{r_1^k};$
$\sum \dfrac{|c_{-k}}{r_1^k}$ сходится, значит вторая часть сходится равномерно.

$$f(z) \cdot (z-a)^{-k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^{n-k-1} \Rightarrow \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \oint\limits_{\gamma} (z-a)^{n-k-1}dz = \begin{cases} 0, \text{ если } n-k \neq 0 \\ 2\pi i, \text{ если } n-k = 0 \end{cases} = c_k \cdot 2\pi i$$

□

Неравенство Коши для коэффициентов Лорана.

Пусть $V = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$, $f \in H(V)$,
$\gamma = \{z \mid |z-a| = \rho\}, \rho \in (r, R)$
$\forall z \in \gamma \quad |f(z)| \leq M$, тогда

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

15 Изолированные особые точки голоморфных функций, их классификация и характеризация в терминах рядо Лорана. Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек.

Точка $\mathbf{z_0}$ — изолированная особая точка функции f, если:

$$\exists r > 0 : \;\; f \in H(\overset{\circ}{U}_r(z_0))$$

Разложение в ряд лорана в окрестности z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_r(z_0)$$

Главная часть: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$

Правильная часть: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$

Классификация особой точки a (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

Характеризация устранимой особой точки:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции f в окрестности точки a не содержит главной части.

3. Функция f ограничена в окрестности точки a.

Доказательство.

"2) $\to$ 1)":

Разложение в ряд Лорана в $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$:

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \to c_0$ при $z \to a \Rightarrow 1)$

"1) $\to$ 3)":

$\lim z \to af(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ – ограниченная в некоторой окрестности точки a.

"3) $\to$ 2)":

$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$ по теореме Лорана

$\Rightarrow f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ в $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$.

Пусть $\delta_1 > 0$; f ограниченна $M > 0$ в $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a), \rho \in (0; \delta_1) \Rightarrow$ по неравенству Коши $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \leq \dfrac{M}{\rho^n}$

Если $n < 0$, то $\dfrac{M}{\rho^n} \to 0$ при $\rho \to 0$. Но $|c_n|$ не зависит от выбора ρ. Поэтому $c_n = 0$ при $n < 0 \Rightarrow 2)$.

$\square$

Характеризация полюса:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a содержит конечное (>0) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3. $f = \dfrac{1}{\varphi}$, где φ — голоморфная в точке a и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство.

"2) $\to$ 1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где $\dfrac{1}{(z-a)^N} \to \infty$ при $z \to a$ и $\displaystyle\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$ — степенной ряд $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$.

"1) $\to$ 3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \text{ если } z \neq a \\ 0, \text{ если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфнаяв точке } a$$

Функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет устарнимую особую точку в $a \Rightarrow \dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3) $\to$ 2)": Пусть N – такое, что $a_0 = 0 = a_1 = ... = a_{N-1}$, $a_N \neq 0$. Тогда $\dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$ – голоморфна в точке a, равна $a_N \neq 0$;

$\dfrac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$ – голоморфна в окрестности точки a.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c_n}(z-a)^n; \tilde{c_{-N}} = c_0 \neq 0$$

□

Характеризация существенно особой точки:
Изолированная особая точка a функции f является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a имеет бесконечное число слагаемых.

Доказательство.
Следует из характеризаций устранимой особой точки и вычета.

□

Поведение голоморфных функций в окрестности особых точек. Теорема Сохоцкого:
Если a – существенная особая точка функции f, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}}$ $\exists \{z_n\}$:

$$z_n \to z_0 \text{ при } n \to \infty, f(z_n) \to A$$

.

Доказательство.
Пусть $A = \infty$. Так как f не может бысть ограниченной в проколотой окрестности $\{0 < |z-a| < r\}$ (из характеризации устранимой особой точки), то найдется в этой окрестности такая точка z_1, в которой $|f(z_1)| > 1$. Точно так же в $\{0 < |z-a| < \dfrac{|z_1-a|}{2}\}$ найдется точка z_2, в которой $|f(z_2)| > 2$ и т.д., в $\{0 < |z-a| < \dfrac{|z_1-a|}{n}\}$ найдется точка z_n,

в которой $|f(z_n)| > n$. Очевидно, $z_n \to a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Пусть теперь $A \neq \infty$. Либо точки, в которых f равна A имеют a своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательности $z_n \to a$, на которой $f(z_n) = A$, либо существует проколотая окрестность $\{0 < |z - a| < r'\}$, в которой $f(z) \neq A$. В этой окрестности голоморфна функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$, для которой a также является существенно особой точкой (т.к. $f(z) = A + \dfrac{1}{\varphi(z)}$ и если бы φ при $z \to a$ стремилась к конечному или бесконечному пределу, то f – также). По доказанному существует последовательность $z_n \to a$, по которой $\varphi(z_n) \to \infty$, но по этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(z_n)} = A$$

□

16 Вычеты, их вычисление. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

Вычетом функции f в точке z_0 называют число:

$$res\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial r} f(z)dz$$

Вычисление вычетов: Теорема о связи вычета с рядом Лорана:

Пусть f — голоморфна в выколотой окрестности точки a. Тогда:

$$res\, f(a) = c_{-1},$$

где $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

Доказательство.

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, где $f \in H(\overset{\circ}{U}_\delta(a))$

$\gamma_r = \{z : |z-a| = r\}, r \in (0, \delta)$, т.е. $\gamma_r \subset \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

Значит ряд сходится равномерно на $\gamma_r \Rightarrow$

$\Rightarrow res\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_{-infty}^{+\infty} \oint \gamma_r c_n(z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \cdot 2\pi i.$ $\square$

Следствие:

В устранимой особой точке z_0: $res\, f(z_0) = 0$

Формула вычисления вычета в полюсе

Пусть z_0 — полюс функции f. Тогда:

$$res\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} (f(z)(z-z_0)^n)^{(n-1)}$$

Доказательство.
Разложение f в ряд Лорана:
$f(z) = \dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n} + ... + \dfrac{z_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + ...$
$f(z)\cdot(z-a)^n = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + ... + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + ...$
$[f(z)\cdot(z-a)^n]^{(n-1)} = c_{-1}\cdot(n-1)! + \dfrac{n!}{1!}\cdot c_0\cdot(z-a) + ...$
При $z \to a$:
$[f(z)\cdot(z-a)^n]^{(n-1)} \to c_{-1}\cdot(n-1)! = (n-1)! res\, f(a)$ □

Следствие:
Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ, ψ – голоморфны в точке a, $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$.
То $res\, f(a) = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

Доказательство.
1.
$\varphi(a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{\varphi'(z)}{\psi'(z)} = \dfrac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \in \mathbb{C} \Rightarrow a$ – устранимая ос.т. $\Rightarrow res\, f(a) = 0 = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$
2.
$\varphi(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ имеет в точке a нуль первого порядка. Значит a — полюс 1-ого порядка. Тогда:
$res\, f(a) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z-a) = \dfrac{\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)}{\lim\limits_{z\to a}\frac{\psi(z)}{z-a}} = \dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$ □

Теорема Коши о вычетах (вычисление контурных интегралов):
Пусть $f \in H(D\backslash\{a_1...a_n\})$, где $a_1...a_n$ — изолированные особые точки f, $G \cup \partial G \subset D$, ∂D не содержит особых точек f.

Тогда:

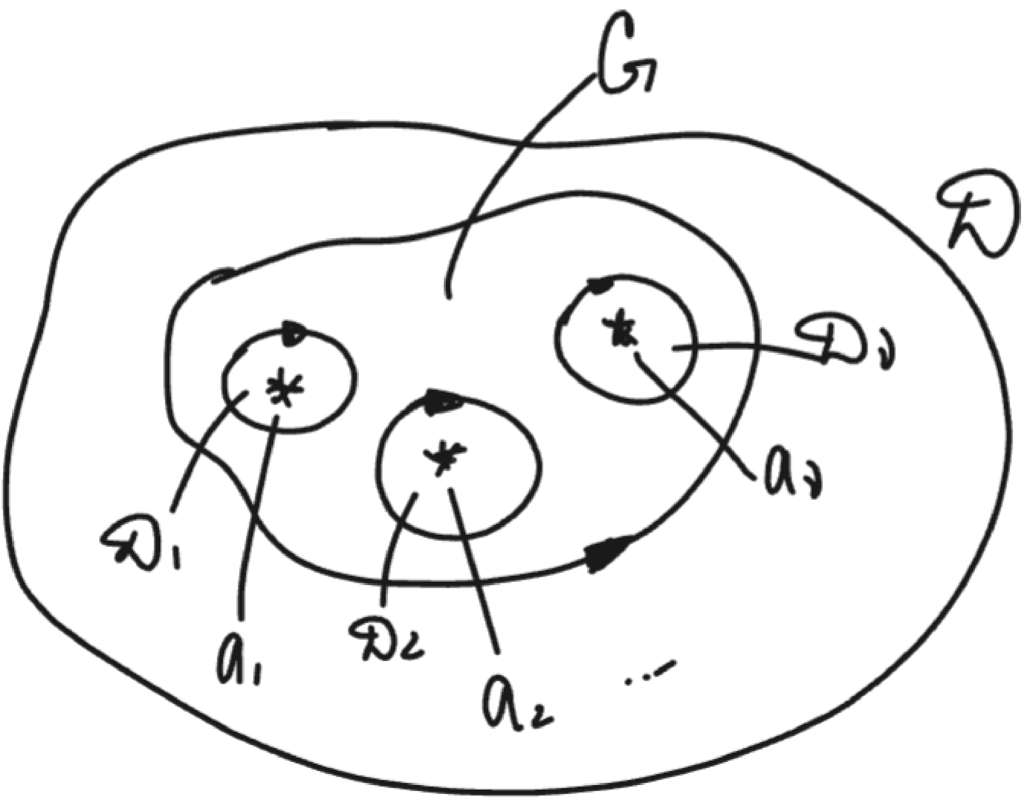
$$\oint\limits_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} res\, f(a_i)$$

(обход положительный)

Доказательство.

Следует из теоремы Коши для многосвязной области:

Окружности, окружающие $a_1, ..., a_\nu$ не пересекаются и лежат



внутри γG.

$\tilde{G} = G \backslash (D_1 \cup ... \cup D_\nu), f \in H(\tilde{G})$

$$\int\limits_{\gamma\tilde{G}} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma G} ... + \sum_{j=1}^{\nu} \int\limits_{-\gamma D_j} ... = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma G} ... - \sum_{j=1}^{\nu} 2\pi i \cdot res\, f(a_j) = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma G} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} res\, f(a_j).$$

$\square$

17 Характеризация в терминах рядов Лорана изолированной особой точки ∞. Вычет в бесконечности.

Точка ∞ — изолированная особая точка функции f, если:

$$\exists R > 0 : \ f \in H(\overset{\circ}{U}_R(\infty))$$

Разложение в ряд Лорана в окрестности ∞:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ обл. сход. содержит } U_R(\infty)$$

Главная часть: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$

Правильная часть: $\displaystyle\sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n$

Классификация особой точки ∞ (характеризация):

1. **Устранимая**, если существует конечный предел функции в этой точке.
2. **Полюс**, если предел функции равен бесконечности в этой точке.
3. **Существенно особая**, если не существует предела функции в этой точке.

Характеризация устранимой особой точки:

Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Лорановское разложение функции f в окрестности точки a не содержит главной части.
3. Функция f ограничена в окрестности точки a.

Доказательство.
"2) $\to$ 1)":
Разложение в ряд Лорана в $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \to c_0$ при $z \to a \Rightarrow 1)$
"1) $\to$ 3)":
$\lim z \to af(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ – ограниченная в некоторой окрестности точки a.

"3) $\to$ 2)":
$\exists \delta_1 > 0 f \in H(\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)) \Rightarrow$ по теореме Лорана
$\Rightarrow f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ в $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a)$.

Пусть $\delta_1 > 0; f$ ограниченна $M > 0$ в $\overset{\circ}{U}_{\delta_1}(a), \rho \in (0;\delta_1) \Rightarrow$ по неравенству Коши $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} |c_n| \le \dfrac{M}{\rho^n}$
Если $n < 0$, то $\dfrac{M}{\rho^n} \to 0$ при $\rho \to 0$. Но $|c_n|$ не зависит от выбора ρ. Поэтому $c_n = 0$ при $n < 0 \Rightarrow 2)$.

$\square$

Характеризация полюса:
Если точка $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то следующие условия эквивалентны:

1. a — устранимая особая точка
2. Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a содержит конечное (>0) число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

   где $N > 0, c_{-N} \neq 0$

3. $f = \dfrac{1}{\varphi}$, где φ — голоморфная в точке a и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство.

"2) $\to$ 1)":

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^N}\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N},$$

где $\dfrac{1}{(z-a)^N} \to \infty$ при $z \to a$ и $\displaystyle\sum_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^{n+N}$ — степенной ряд $\Rightarrow c_{-N} \neq 0$.

"1) $\to$ 3)":

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \text{ если } z \neq a \\ 0, \text{ если } z = a \end{cases} \quad \text{— голоморфнаяв точке } a$$

Функция $\dfrac{1}{f(z)}$ имеет устарнимую особую точку в $a \Rightarrow \dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

"3) $\to$ 2)": Пусть N – такое, что $a_0 = 0 = a_1 = \ldots = a_{N-1}$, $a_N \neq 0$. Тогда $\dfrac{1}{f(z)} = \displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \varphi(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^n} = \frac{1}{(z-a)^N}\cdot\frac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}},$$

где $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}$ – голоморфна в точке a, равна $a_N \neq 0$;

$\dfrac{1}{\sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-a)^{n-N}}$ – голоморфна в окрестности точки a.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^N}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k-N} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{\infty} \tilde{c_n}(z-a)^n; \tilde{c_{-N}} = c_0 \neq 0$$

□

Характеризация существенно особой точки:
Изолированная особая точка a функции f является существенно особой

$$\Leftrightarrow$$

Главная часть Лорановского разложения функции f в окрестности точки a имеет бесконечное число слагаемых.

Доказательство.
Следует из характеризаций устранимой особой точки и вычета.

□

Вычетом функции f в точке ∞ называют число:

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{-\gamma_R} f(z)dz,$$

где $\gamma_R = \{a : |z| = R\}$, R – такое, что вне γ_R нет особых точек, кроме, может быть ∞.

Теорема о связи вычета в бесконечности с рядом Лорана:

Если в некоторой выколотой окрестности ∞ функция f голоморфна, то:

$$res\, f(\infty) = -c_{-1},$$

где c_{-1} — коэффициент разложения f в ряд Лорана в окрестности ∞.

Доказательство.

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{-\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \oint\limits_{-\gamma_R} c_n z^n dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} c_{-1} \oint\limits_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -c_{-1}$$

Прим.: $\oint\limits_{-\gamma_R} \frac{dz}{z} = -2\pi i$, т.к. обход по часовой стрелке. □

18 Логарифмический вычет, его вычисление. Приращение (полярного) аргумента вдоль пути. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.

Пусть $f \in H(\mathring{U}_r(a)), a \in \mathbb{C}, r > 0$. Тогда вычет функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{d}{dt} Lnf(z)$ в точке a называют **логарифмическим вычетом функции f в точке a.**

Лемма о логарифмическом вычете в нуле и в полюсе:

Логарифмический вычет ф. $f(z)$ в точке a равен:

1. порядку нуля a, если a – нуль
2. пордяку полюса a, если a – полюс

Доказательство.
1) Пусть a — нуль порядка n ф-ии $f(z)$, тогда:
$f(z) = a_n(z-z)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + ... = (z-a)^n \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — сумма степенного ряда, откуда следует, что $\varphi \in H$
$\varphi(z) = c_n \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{n(z-a)^{n-1} \cdot \varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \dfrac{1}{z-a}(n + (z-a) \cdot \dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}) \Rightarrow a$ — полюс 1-ого порядка функции $\dfrac{f'}{f} \Rightarrow C_{-1} = n$, т.к. $\dfrac{n}{z-a}$ — главная часть.
2) Пусть a — полюс порядка p, тогда по теорему о полюсе a — нуль порядка p функции $\dfrac{1}{f(z)} = g(z)$.
$\dfrac{f'(z)}{f(z)} = -\dfrac{d}{dz} Ln \dfrac{1}{f(z)}$
Тогда логарифмический вычет функции g в точке a равен p, а функции f в точке a равен $-p$. □

Теорема о логарифмическом вычете:

Пусть f мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}, G \cup \partial G \subset D, \partial G$ не содержит ни нулей, ни полюсов функции f, N и P – количество нулей и полюсов с учетом их порядков функции f в G. Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$ (обход ∂G против часовой стрелки),

где $\int\limits_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ – логарифмический вычет функции f вдоль кривой ∂G.

Доказательство.

Особые точки $\frac{f'(z)}{f(z)}$ в области G:

1. полюса $a_1, .., a_l$ с порядками $p_1, ..., p_l$
2. нули $b_1, .., b_m$ с порядками $n_1, ..., n_m$

Тогда по лемме о логарифмическом вычете $\frac{f'}{f}(a_j) = -p_j$, $res\frac{f'}{f}(b_s) = n_s$

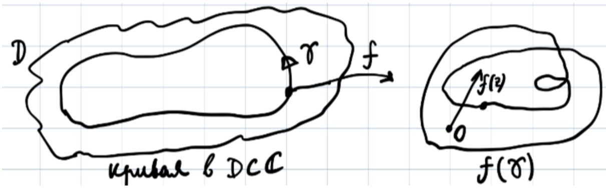
По теореме Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{l} res\frac{f'}{f}(a_j) + \sum_{s=1}^{m} res\frac{f'}{f)}(b_s)\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{l} p_j + \sum_{s=1}^{m} n_s = N - P$$

□

$\Delta_\gamma arg f = 2\pi k$, k – количество обходов точки O f(z), $z \in \gamma$, с учетом приращения.



Принцип аргумента. Пусть f мераморфна в $D \subset \mathbb{C}$, $G \cup \partial G \subset D$, ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов f. Тогда
$N - P = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} arg f.$

Доказательство.
Пусть $\partial G: \ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, $\Phi(t) = \ln f(z(t))$, где $\ln f$ непрерывно меняется при росте t от α до β. Тогда $\Phi'(t) = \dfrac{f'(z(t))}{f(z(t))} \cdot z'(t)$ и поэтому

$$\int\limits_{\partial G} \frac{f'}{f} dz = \int\limits_{\alpha}^{beta} \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$= \ln f(z(\beta)) - \ln f(z(\alpha)) = \ln |f(z(\beta))| + i\, arg\, f(z(\beta)) - \ln |f(z(\alpha))| -$
$= -i \cdot arg\, f(z(\alpha)) = i\Delta_{\partial G} arg\, f =$ (по т. о логар.выч.) $N - P =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \partial G \frac{f'(z)}{f(z)} dt = \frac{i\Delta_{\partial G} arg\, f}{2\pi i}$$

□

Теорема Руше:
Пусть $f, g \in H(G \cup \partial G)$ и $\forall z \in \partial G |f(z)| > |g(z)|$.
Тогда функции f и f+g имеют одинаковое количество нулей в G.

Доказательство.
$\forall z \in \gamma G |f(z)| > |g(z)| \geq 0$
$|(f + g)(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$
Отсюда следует, что функция f и $f + g$ не имеют нулей на

∂G.
По принципу аргумента $\Delta_{\partial G} arg\,(f+g) = N_{f+g}$ (количество нулей функции $f+g$ в G).
С другой стороны:
$\Delta\gamma G arg\, f(1+\frac{g}{f}) = \Delta_{\gamma G} arg\, f + \Delta_{\gamma G}(1+\frac{g}{f}) = N_f$

$\square$

Применение:

Найти число корней уравнения $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ в области $|z| < 1$.
На границе области $|z| = 1$, тогда т.к. $|z^8 + z^2 - 1| \leq |z|^8 + |z|^2 + |-1| = 3 < |-4z^5| = 4$ и уравнение $-4z^5 = 0$ имеет 5 корней в этой области, то исходное уравнение также иммеет 5 корней в этой области.

19 Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Принцип сохранения области.

Теорема о среднем: Пусть $f \in H(D), z_0 \in D, \partial U_\rho(z_0) \subset D$

Тогда $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})dt$

Доказательство.
По интегральной формуле Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{it})}{\rho e^{it}} i\rho e^{it}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})dt$$

Параметр $\partial U_\rho(z_0):\ z = z_0 + \rho e^{it}:\ t \in [0; 2\pi], z' = i\rho e^{it}$ □

Принцип сохранения области:

Функция f голоморфна в области D и $f \neq const$

$$\Rightarrow$$

Образ $f(D)$ есть область

Доказательство.
Нужно показать, что множество D^* связно и открыто.
1) Пусть w_1, w_2 — две произвольные точки D^*, а z_1, z_2 — их прообразы.
Так как множество D линейно связно, то существует путь $\gamma : [\alpha; \beta] \to D$, связывающий точки z_1, z_2. В силу непрерывности функции f образ $\gamma^* = f \circ \gamma$ будет путем, связывающим точки w_1, w_2. Таким образом D^* — линейно связно.

2) Пусть w_0 произвольная точка D^* и z_0 — один из ее прообразов в D. Так как D открыто, то сущестует круг $\{|z - z_0| \leq$

$r\} \subset D$.
Будем уменьшать r пока круг не перестанет содержать других точек, в которых функция f равна w_0 (это возможно, т.к. она не постоянная).
Обозначим $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ границу этого круга и

$$\mu = \min_{x \in \gamma} |f(x) - w_0|, \ \ \mu > 0$$

Если бы $\mu = 0$, то на γ существовала бы точка, в которой функция f равна w_0.

Теперь докажем, что $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$.
Пусть w_1 — произвольная точка этого круга, то есть $|w_1 - w_0| < \mu$. Тогда:
$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1)$.
Так как на γ в силу выбора μ имеем $|f(z) - w_0| \geq \mu$, то по теорему Руше функция $f(z) - w_1$ имеет внутри γ столько же нулей, сколько и $d(z) - w_0$, то есть по крайней мере один нуль z_0, а значит функция f внутри γ принимает значение w_1, то есть $w_1 \in D^*$. В силу произвольности выбора w_1 весь круг лежит в D^*, а значит оно является открытым множеством.
$\square$

Принцип максимума модуля:

Модуль голоморфной функции не может достигать строгого локального максимума внутри области.

Доказательство.
Пусть функция достигает максимума в некоторой точке z_0.
Воспользуемся принципом сохранения области. Если $f \neq const$, то она преобразует z_0 в точку w_0 области D^*.
Существует круг $\{|w - w_0| < \mu\} \subset D^*$, а в нем найдется точка w_1 такакя, что $|w_1| > |w_0|$. Значение w_1 принимается функ-

цией f в некоторой окрестности точки z_0, а это противоречит тому, что $|f|$ достигает максимума в этой точке. $\square$

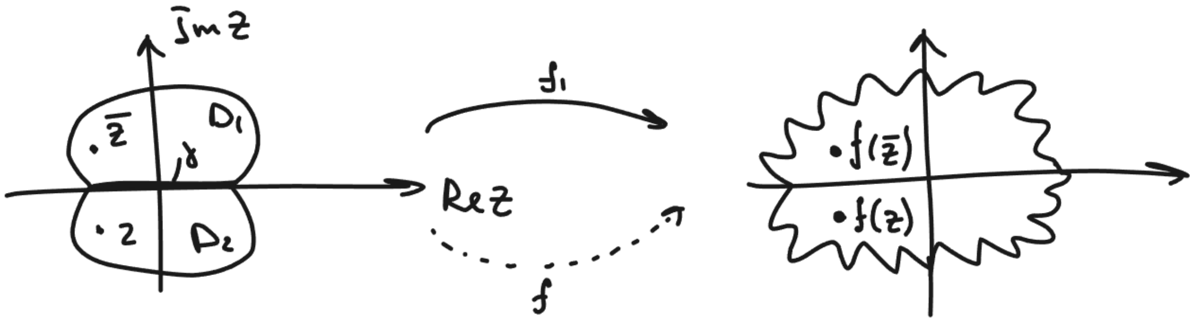
20 Основные теоремы и приложения теории конформных отображений. Теорема Римана, принцип симметрии Римана-Шварца, принцип соответствия границ с обратным принципом соответствия границ.

Основные теоремы и приложения конформных отображения:

1. **Теорема Римана** (о возможности конформного и взаимно однозначного отображения одной односвязной области на другую)
   Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее двух точек. Тогда:
   (a) $\exists$ голоморфная в D функция $w = f(z)$, которая отображает D конформно и однозначно на единственный круг $G : |w| < 1$;
   (b) эту функцию можно выбрать так, что $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$, где $Z_0 \in D$, $w_0 \in G$ – заданные точки, α – заданное действительное число.

   Функция f, удовлетворяющая 1. и 2. единственная.

2. **Принцип симметрии Римана-Шварца**
   Пусть D_1 – односвязная область, лежащая в верхней полуплоскости $Imz > 0$, граница Γ_1, которая содержит интервал γ действительной оси $Imz = 0$, область D_2 симметрична D_1 относительно действительной оси, функция $f(z)$ непрерывна на D_1, Γ_1, голоморфна на D_1 и принимает действительные занчения на γ. Тогда функция f может голоморфно продолжить в область $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ по формуле:
$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{если} z \in D_1 \cup \gamma, \\ \overline{f_1(\overline{z})}, & \text{если} z \in D_2. \end{cases} \tag{5}$$



3. **Принцип соответствия границ**

   Пусть Γ и Γ* – простые контуры, D и $D*$ – односвязные области, ограниченные Γ и Γ* соответственно, функция $f(z)$ однолистно и конформно отображает D на $D*$. Тогда

   (a) $f(z)$ имеет непрерывное продолжение $\overline{f}$ на Γ, то есть $\overline{f} : \overline{D} = D \cup \Gamma \to \mathbb{C}$ – непрерывна и $\overline{f}|_D = f$

   (b) $\overline{f}$ отображает Γ на Γ* взаимно однозначно, причемположительному обходу Γ соответствует положительный обход Γ*.

4. **Обратный принцип соответствия границ**

   Пусть D – односвязная область в $\mathbb{C}$, ограниченная кусочно-гладким контуром Γ. $\overline{D} = D \cup \Gamma$, $f \in H(D)$, функция $f(z)$ отображает контур Γ взаимно однозначно на простой кусочно-гладкий контур Γ*.

   Тогда $f(z)$ отображает D конформно и однозначно на область $D*$, ограниченную контуром Γ*, причем положительному обходу Γ соответствует положительный обход Γ*.

21 Вычисление несобственных интегралов с использование вычетов. Лемма Жордана и теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов.

Лемма Жордана:

Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в $\{Im\, z \geq 0\}$ за исключением изолированного множества точек;

$\gamma_R = \{z \in \mathbf{C} : |z| = R,\ Im\, z \geq 0\}$;

$M(R) = \max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$, $M(R) \to 0$ при $R \to \infty$;

Тогда $\forall\lambda > 0$ $\displaystyle\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz \to 0$

Теорема о вычислении несобственного интеграла от рациональной функции с помощью вычетов:

Пусть $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x), Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно, $n \geq m + 2$;

$Q_n(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R}$ (не имеет действительных корней);

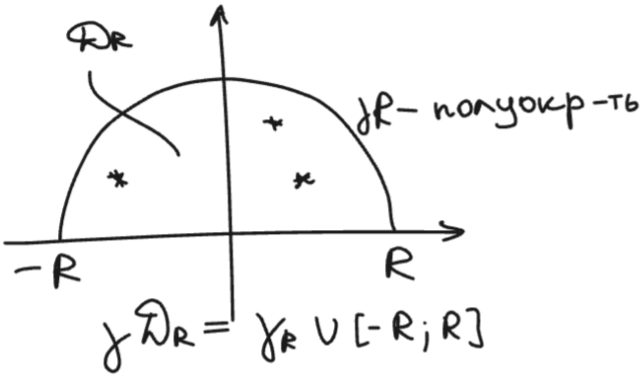
Тогда $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} res\, f(z_j)$,

где $z_1, ..., z_k$ – все полюса f в области $Im\, z > 0$

Доказательство.

Так как f непрерывна на компакте γ_R, то $\exists\max\limits_{z\in\gamma_R}|f(z)|$.

$$\max\frac{|P_m(z)|}{|Q_n(z)|} = \max_{|z|=R, Im\, z\geq 0}\frac{|d_m z^m + ...|}{|a_n z^n + ...|} \sim \max_{|z|=R, Im\, z\geq 0}\frac{|b_m||z|^m}{|a_n||z|^n} =$$



R – такое, что все особые т. f в обл. Im z > 0 расположены внутри полукруга

$$= \max_{|z|=R}\frac{|b_m|}{|a_n|}\cdot\frac{1}{|z|^{n-m}} \sim \frac{|b_m|}{|a_n|}\cdot\frac{1}{R^{n-m}} \text{ при } R\to\infty$$

Пусть $L(\gamma_R)$ – длина γ_R. Тогда:

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \max_{a\in\gamma_R}|f(z)|\cdot L(\gamma_R) \sim c\frac{1}{R^{n-m}}\pi R = \frac{c\pi}{R^{n-m-1}} \to 0$$

при $R\to\infty, n-m-1>0$

Откуда следует, что $\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz\right| \to 0$ при $R\to\infty$.

По теореме Коши: $\oint\limits_{\gamma D_R} f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{j=1}^{k} res\, f(z_j)$ не зависит от R, при $R\to\infty$:

$$\oint\limits_{\gamma D_R} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx \to 0 + \int\limits_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx. \qquad \square$$

Пример вычисления несобственного интеграла от тригонометрических функций:

Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x\cos x dx}{x^2-2x+10}$

Функция $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ удовлетворяет условиями леммы Жордана. Здесь $t = 1$ и $F(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+10}$. Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы первого порядка $z = 1 \pm 3i$. В верхней полуплоскости иммется единственная особая точка $z = 1+3i$. Вычислим относительно этой точки вычет функции $f(z)$:

$$res\, f(1+3i) = \frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+10)'} = \frac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i}$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} = 2\pi i\dfrac{(1+3i)e^{-3+i}}{6i} = \dfrac{\pi}{3}e^{-3}(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) = \dfrac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1) + i\dfrac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1).$

Сравнивая в обеисх частях этого равенства действительные и мнимые части с учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-2x+10} + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2-2x+10}$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1 - 3\sin 1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1 + \sin 1),$$

22 Определение преобразования Лапласа. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удаленной точке. Изображение элементарных функций (единичная функция Хевисайда, показательная и степенная функции). Теорема обращения.

Пусть $f(t)$ — функция, $t \in \mathbb{R}$
Преобразование Лапласа функции f — это

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \in \mathbb{C}$$

Обозначение: $F(p) \risingdotseq f(t), f(t) \fallingdotseq F(p)$

Функцию $f(t)$ называют **оригиналом**

$$\Rightarrow$$

1. $f(t)$ — кусочно-непрерывная при $t \geq 0$
2. $f()t) = 0$ при $t < 0$
3. $\exists M > 0 : \ \exists \alpha \in \mathbb{R} : \ |f(t)| \leq Me^{\alpha t}$

Теорема о существования изображения:

Пусть $f(t)$ — оригинал

Тогда: 1) интеграл $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится абсолютно в области $\{p \in \mathbb{C} : Re\, p > \alpha\}$
2) изображение $F(p)$ — аналитическая функция в U_α.

Доказательство.
$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ — условие 3) из определения оригинала
Пусть $p = \delta + is$, тогда:

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)| \cdot |e^{-\delta t}| \cdot |e^{-ist}| \leq Me^{\alpha t}e^{-\delta t} = Me^{(\alpha - \delta)t}$$

$|F(p)| = \lim\limits_{b\to+\infty} \left| \int\limits_0^b f(t)e^{-pt}dt \right| \leq$ по теореме об оценке

$\leq \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b |f(t)e^{-pt}|dt \leq \lim\limits_0^b Me^{(\alpha-\delta)t}dt = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{M}{\alpha-\delta}e^{(\alpha-\delta)t}|_0^b =$
$= \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{M}{\alpha-\delta}(e^{(\alpha-\delta)b}-1) = -\dfrac{M}{\alpha-\delta} = \dfrac{M}{\delta-\alpha}$, значит по признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Значит $Re\,(p = \delta + is) = \delta \Rightarrow Re\,pj > \alpha \Rightarrow F'(p) = \int\limits_0^{+\infty}(-t)f(t)e^{-pt}dt \Rightarrow$

$F(p)$ — аналитическая функция. □

Поведение изображения в бесконечности:

Если изображение $F(p)$ аналитическая функция в ∞, то $F(\infty) = 0$.

Доказательство.
Из доказательства теоремы 1:

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\delta-\alpha},$$

где $\alpha = const$, $\delta = Re\,p$.
Если $Re\,p \to \infty$, то $\dfrac{M}{\delta-\alpha} \to 0 \Rightarrow |F(p)| \to 0$, т.к. $F(p) \to F(\infty)$. □

Изображение элементарных функций:

1. Функция Хевисайда ν

   $\nu(t) = \begin{cases} 1, \text{ при } t \geq 0 \\ 0, \text{ при } t \geq 0 \end{cases}$

   $\int\limits_0^{\infty} 1e^{-pt}dt = -\dfrac{e^{-pt}}{p}|_0^{+\infty}$

При $p = \delta + is: \ |e^{-pt}| = |e^{-\delta t} \cdot e^{-ist}|$

Тогда $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$

2. Показательная функция

$e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\alpha}$

По теореме затухания $\forall \alpha \in \mathbb{C} : e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$

Так как $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, то имеем:

$e^{\alpha t} \cdot 1 \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$

3. Степенная функция

$t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Докажем по индукции:

По теореме об интегрировании оригинал $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$

При $n = 0$: выполняется. Пусть выполнено для $n = k$, тогда:

$f(\tau) = \tau^k \risingdotseq \dfrac{k!}{p^k}$

$t^{k+1} = (k+1) \cdot \int\limits_0^t \tau^k d\tau = (k+1) \cdot \dfrac{k!}{p^k \cdot p} = \dfrac{(k+1)!}{p^{k+1}}$

Теорема обращения:

Если $f(t)$ — оригинал с постоянной α;

$F(p) \fallingdotseq f(t)$; t – точка, в которой $f(t)$ – непрерывная.

То $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(p)e^{pt}dp$ — интеграл по прямой

$Re\, p = \gamma, \ \gamma > \alpha$

23 Основные свойства преобразования Лапласа. Теоремы линейности, подобия, затухания, запаздывания, опережения, дифференцирования и интегрирования оригинала, дифференцирования и интегрирования изображения. Свертка двух функций. Теорема умножения изображений. Доказать теоремы затухания и дифференцирования оригинала, сформулировать остальные теоремы.

Свойства преобразования Лапласа:

1. **Теорема линейности:**
   $\forall A, B \in \mathbb{R} : Af(t) + Bg(t) \risingdotseq A \cdot F(p) + B \cdot G(p)$

2. **Теорема подобия:**
   $\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{b}{\lambda}\right)$

3. **Теорема затухания (смещения):**
   $\forall a \in \mathbb{C} : e^{at} f(t) \risingdotseq F(p - a)$

   Доказательство.
   $$e^{at} f(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$
   $\square$

4. **Теорема запаздывания:**
   $\forall \tau > 0 : f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p)$

5. **Теорема опережения:**
   $$\forall \tau > 0 : f(t + \tau) \risingdotseq e^{p\tau} [F(p) - \int\limits_0^{\tau} f(t) e^{pt} dt]$$

6. **Теоерема дифференцирования интеграла:**
   $f'(t) \risingdotseq p \cdot F(p) - f(0)$

Доказательство.

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} f(t)de^{-pt} =$$

$$0 - f(0)e^{-p\cdot 0} + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$|f(t)e^{-pt}| \leq M\cdot e^{(\alpha - Re\,p)t} \to 0$ при $r \to +\infty, \alpha - Re\,p < 0$

$f'(t) \risingdotseq -f(0) + p\cdot F(p)$ □

7. **Теорема об интегрировании оригинала:**

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$

8. **Теорема о дифференцировании изображения:**

$-t\cdot f(t) \risingdotseq F'(p)$

9. **Теорема об интегрировании изображения:**

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{\infty} F(z)dz$$

Сверткой функций f, g называется:

$$f \star g = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Теорема умножения изображений:

$(f\star g)(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p)$

24 Три теоремы разложения. Доказать теоремы подобия и запаздывания.

Три теоремы разложения:

1. Если $F(p) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$ сходится при $|p| > R$, то:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

2. Второй метод построения оригинала по изображению: Каждая рациональная функция $F(p)$, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, является изображением:

$$F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, deg\, Q > deg\, R$$

3. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p); F(p)$ – аналитическая функция при $Re\, p > \sigma_0$, а при $Re \le \sigma_0$ имеет конечное число изолированных особых точек $p_1, ..., p_n$. Тогда:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} res(e^{pt} \cdot F(p))(p_k)$$

Теорема подобия:

$\forall \lambda > 0 : f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right)$

Доказательство.

$$f(\lambda t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} \tau = \lambda t \\ t = \frac{\tau}{\lambda} \\ dt = \frac{1}{\lambda} d\tau \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda}\tau} \frac{1}{\lambda} d\tau =$$

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda}\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{b}{\lambda}\right) \qquad \square$$

Теорема запаздывания:

$\forall \tau > 0 : f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \cdot F(p)$

Доказательство.

$$f(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-p\tau}dt = \begin{vmatrix} t_1 = t-\tau \\ dt_1 = dt \\ t = t_1 + \tau \end{vmatrix} = \int\limits_{-\tau}^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1-p\tau}dt_1 =$$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t_1) \cdot e^{-pt_1-p\tau}dt_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} f(t_1) \cdot e^{-p1_1-p\tau}dt_1$$

Из определения оригинала: $f(t_1) = 0$ при $t_1 < 0$. Тогда:

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} \int\limits_0^{+\infty} f(t_1)e^{pt_1}dt_1 = e^{-p\tau} \cdot F(p) \qquad \square$$