什么是数学

Spencer Tian

created: 2017-10-13
last updated: 2017-11-29

目录

什么是数学

数学，作为人类思维的表达方式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是：逻辑和直观、分析和构作、一般性和个别性。虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量的相互作用以及它们综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值。

毫无疑问，一些数学的发展在心里上都或多或少地是基于实际的。但是理论一旦在实际的需要中出现，就不可避免地会使它自身获得发展的动力，并超越出直接实用的局限。这种从应用科学到理论科学的发展趋势，不仅常见于古代历史中，而且在工程师和物理学家为近代数学不断作出的许多贡献中更是屡见不鲜。

有记载的数学起源于东方。大约在公元前两千年，巴比伦人就搜集了及其丰富的资料，这些资料今天看来应属于初等代数的范围。至于数学作为现代意义的一门科学，则是迟至公元前五至公元前四世纪才在希腊出现的。东方和希腊之间的接触不断增多（始于波斯帝国时期，至亚历山大远征时期则达到高峰），使希腊人得以熟悉巴比伦人在数学和天文学方面的成就，数学很快就被加入到风行于希腊城邦的哲学讨论之中，因而希腊的思想家逐渐意识到，在连续、运动、无限大这些概念中，以及在用已知单位去度量任意一个量的问题中，数学都存在着固有的极大困难。面对这个挑战，经过了一番不屈不挠的努力，产生了欧多克斯（Eudoxus）的几何连续统理论，这个成果是唯一能和两千多年后的现代无理数理论相媲美的。数学中这种公理演绎的趋向起源于欧多克斯时代，又在欧几里得（Euclid）的“原本”中得以成熟。

虽然希腊数学的理论化和公理化的倾向一直是它的一个重要特性，并且曾经产生过巨大的影响。但是，对这一点我们不能过分强调，因为在古代数学中，应用以及同物理现实的联系恰恰起了同样重要的作用，而且那时候人们宁愿采用不像欧几里得那样严密的表达方式。

由于较早地发现了与“不可公度”的量有关的这些困难，使希腊人没能发展早已为东方所掌握的数字计算的技术。相反，他们却迫使自己钻进了纯粹公理几何的丛林之中。于是科学史上出现了一个奇怪的曲折。这或许意味着人类丧失了一个很好的时机。几乎两千年来，希腊几何的传统力量推迟了必然会发生的数的概念和代数运算的进步，而它们后来构成了近代科学的基础。

经过了一段缓慢的准备，到十七世纪，随着解析几何与微积分的发展，数学和科学的革命也开始蓬勃发展起来。虽然希腊的几何学仍然占有重要的地位，但是，希腊人关于公理体系和系统推演的思想在十七世纪和十八世纪不复出现。从一些清清楚楚的定义和没有矛盾的“明显”公理出发，进行准确的逻辑推理，这对于数学科学的新的开拓者来说似乎是无关紧要的。通过毫无拘束的直观猜想和令人信服的推理，再加上荒谬的神秘论以及对形式推理的超人力量的盲目相信，他们征服了一个蕴藏着无限财富的数学世界。但是后来，大发展引起的狂热逐渐让位于一种自我控制的批判精神。到了十九世纪，由于数学本身需要巩固已有成果，而且人们也希望把它推向更高阶段时不致发生问题（这是受到法国大革命的影响），就不得不回过头来重新审查这新的数学基础，特别是微积分及其赖以建立的极限概念。因此十九世纪不仅成为一个新的发展时期，而且也以成功地返回到那种准确而严谨的证明为其特征。在这方面它甚至胜过了希腊科学的典范。于是，钟摆又一次向纯粹性和抽象性的一侧摆去。目前我们似乎仍然处于这个时期。但是人们可以期望，在纯粹数学和具有活力的应用之间产生了这种不幸分离（可能在批判性的审查时期，这是不可避免的）之后，随之而来的应是一个紧密结合的时代。这种重新获得的内在力量，更主要的是由于理解更加明晰而达到认识上的极大简化，将使得今天有可能在不忽略应用的情况下来掌握数学理论。再一次在纯数学和应用学科之间建立起有机的结合，在抽象的共性和色彩缤纷的个性之间建立起牢固的平衡，这或许就是不久的将来数学上的首要任务。

这里不是对数学进行详细的哲学或心理学的分析的地方，但有几点应当强调一下。目前过分强调数学的公理演绎特点的风气，似乎有盛行起来的危险。事实上，那种创造发明的要素，那种起指导和推动作用的直观要素，虽然常常不能用简单的哲学公式来表述，但是它们却是任何数学成就的核心，即使在最抽象的领域里也是如此。如果说完善的演绎形式是目标，那么直观和构作至少也是一种动力。有一种观点对科学本身是严重的威胁，它断言数学不是别的东西，而只是从定义和公理推导出来的一组结论，而这些定义和命题除了必须不矛盾之外，可以由数学家根据他们的意志随意创造。如果这

个说法是正确的话，数学将不会吸引任何有理智的人。它将成为定义、规则和演绎法的游戏，既没有动力也没有目标。认为灵感能创造出有意义的公理体系的看法，是骗人的似是而非的真理。只有在以达到有机整体为目标的前提下，以及在内在需要的引导下，自由的思维才能作出有科学价值的成果来。

尽管逻辑分析的思维趋势并不代表全部数学，但它却使我们对数学事实和它们相互间的依赖关系有更深刻的理解，以及对数学中的主要概念有更深刻的理解，并由此发展了可作为一般科学态度的典范的近代数学观点。

不论我们持什么样的哲学观点，就科学观察的目的来说，对一个对象的人事，完全表现在它与认识者（或仪器）的所有可能关系之中。当然仅仅是感觉并不能构成知识和见解，必须要与某些基本的实体即“自在之物”相适应、相印证。所谓“自在之物”并不是物体观察的直接对象，而是属于形而上学的。然而，对于科学方法来说，重要的是应放弃带有形而上学性质的因素，而去考虑那些可观测的事实，把它们作为概念和构作的最终根源。放弃对“自在之物”的领悟，对“终极真理”的认识以及关于世界的最终本质的阐明，这对于质朴的热诚者来说，可能会带来一种心理上的痛苦，但事实上它却是近代思想上最有成效的一种转变。

物理学上所取得的一些最伟大的成就，正是由于敢于坚持“消除形而上学”这个原则的结果。当爱因斯坦（A. Einstein）试图把“在不同地方同时发生的事件”这一概念归结为可观测的现象时，当他揭露出，认为上述概念必须有它自身的科学意义的信念只是形而上学的偏见时，他已发现了他的相对论的关键所在。当玻尔（N. Bohr）和他的学生们指出，任何物理观测必然伴随着观测工具对被观测对象的影响这个事实时，问题变得很清楚，在物理上，同时准确地确定一个粒子的位置和速度是不可能的。这个发现的深远意义体现在为每个物理学家所熟悉的近代量子力学的理论中。在十九世纪流行着一种概念，认为机械力和粒子在空间中的运动是自在之物，而电、光和磁都应当归结为力学现象或者作为力学现象来“解释”，正如以前处理“热”的方法那样。人们曾经假设过“以太”，作为一种假设性的媒介物，把它用于那些对我们来说不能完全加以解释的运动中，例如光或电。后来人们才慢慢地认识到以太是肯定无法观测到的，它属于形而上学，而不属于物理学。于是乎，在某些方面感到忧虑，而在另一些方面又感到安慰的心情下，关于光和电的力学解释连同以太最后一齐都被放弃了。

在数学中有些情况与此相类似，甚至更为突出。世世代代以来，数学家一直把他们研究的对象，例如数、点等等，看成实实在在的自在之物。但是，准确地描述这些实体的种种努力总是被这些实体自身给否定了。从而十九世

纪的数学家逐渐开始懂得，要问当作实体的这些对象究竟是什么，这是没有意义的，即使有的话也不可能在数学范围内得到解决。所有适合它们的论断都不涉及这些实体的现实，而只说明数学上“不加定义的对象”之间的相互关系以及它们所遵循的运算法则。至于点、线、数，“实际上”是什么，这不可能也不需要在数学科学中加以讨论。“可验证”的事实只是结构和关系：两点决定一直线，一些数按照某些规则组成其他一些数，等等。基本的数学概念必须抽象化，这一见解是近代公理化发展中最重要和最丰富的成果之一。

幸运的是，创造性思维不顾某些教条的哲学信仰而继续发展着，而如果思维屈从于这种信仰就会阻碍出现建设性的成就。不论对专家来说，还是普通人来说，唯一能回答“什么是数学”这个问题的，不是哲学而是数学本身中的活生生的经验。

第一章　自然数

引言

数是近代数学的基础。然而数是什么呢？当我们说 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot=\frac{1}{4}$ 和 $(-1)(-1)=1$ 时，这是什么意思呢？在中、小学校里我们已经学过处理分数和负数的方法，但是为了真正理解数系，我们必须回到更简单的基础。虽然希腊人曾经把点和线等几何概念作为他们的数学基础，但是，所有的数学命题最终应归结为关于**自然数**[①]$1, 2, 3, \ldots$ 的命题，这一点已变成了现代的指导原则。“上帝创造了自然数，其余的是人的工作。”在这句话中，克隆尼克（L. Kronecker，1823～1891）指出了建立数学结构稳固基础的条件。

由人类智慧所创造的数，可用来数各种集合中的对象的个数，它和对象所特有的性质无关。例如数“六”是从所有包含六个东西的实际集合中抽象出来的；它不依赖这些对象的任何特殊性质，也不依赖于表示它所采用的符号。只有在智力发展到一个比较先进的阶段，数字概念的抽象性才变得清楚了。对儿童来说，数通常总是和实际的对象连在一起的，例如手指或珠子。而且在早期的语言中，是通过对不同对象使用不同类型的数的语言来表达一个具体数字的意义的。

幸而数学家不必去讨论从具体对象的集合转化到抽象数的概念的哲学性质。因此，我们把自然数及其两种基本运算——加法和乘法一一当作已知的概念接受下来。

[①]本书中的自然数不包括 0，和现代的自然数定义略有不同。——译注

1.1 整数的计算

1.1.1 算术的规律

自然数或正整数的数学理论就是众所周知的算数。算术的基础在于：整数的加法和乘法服从某些规律。为了要叙述这些具有普遍性的规律，我们不能用像 $1, 2, 3$ 这种表示特定数的符号。两个整数，不管它们的次序如何，它们的和相同。而

$$1 + 2 = 2 + 1$$

这一命题仅仅是这一般规律的一个特殊例子。因此当我们希望表示整数之间的某个关系——不论所涉及的一些特定的整数值如何——是正确的，我们可以用字母 $a, b, c, \ldots$ 作为表示整数的符号。于是，读者所熟知的五个算术基本规律可叙述为：

$$\begin{aligned}
&1)\ a + b = b + a,\\
&2)\ ab = ba,\\
&3)\ a + (b + c) = (a + b) + c,\\
&4)\ (ab)c = a(bc),\\
&5)\ a(b + c) = ab + ac,
\end{aligned}$$

三个数相加时，或者我们把第一个加上第二个与第三个的和；或者我们把第三个加上第一个与第二个的和，其结果都相同。第四个是乘法的结合律。最后一个是**分配律**，它表明用一个整数去乘一个和时，我们可以用这整数去乘这和的每一项，然后把这些乘积加起来。

这些算术规律是简单的，而且好像是显然的。但是它们对于整数以外的对象可能不适用。如果 a 和 b 不是整数的符号，而是化学物质的符号；同时，如果“加”这个词正是我们平常说话中所用的那个意思，那么很显然，交换律并不总是成立的。例如，如果把硫酸加到水中，得到的结果是稀释，而把水加到硫酸中则会对实验人员产生灾难性的后果。类似的例子还表明，在这类化学“算术”中，加法的结合律和分配律也会失灵。因此，人们可以想象在这些算术中，规律 1) $\sim$ 5) 中的某一个或者某一些并不成立。实际上，这样的系统在现代数学中已在研究着。

对抽象的整数概念给出一个具体模型就能够说明规律 1) $\sim$ 5) 所依据的直观基础。对于一个给定的集合（比如说某一棵树上的所有苹果），其中对

象的个数我们不用通常的符号 $1,2,3$ 等来表示，而在一个方框放一些点来表示，一个点代表一个对象。通过这些方框的运算我们可以看到这些整数的算术规律。两个整数 a 和 b 相加时，我们把相应的方框两端相连，并去掉中间的相隔线。

$$\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

图 1 加法

为了乘 a 和 b，我们把两个方框中的点排成行构成一个新方框，其中有 a 行，b 列个点。

$$\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

图 2 乘法

现在我们可以把规律 1) $\sim$ 5) 看成是用这些直观明了的方框来进行运算的性质。

$$\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

图 3 分配律

从两个整数的加法定义出发，我们可以定义**不等**关系。$a<b$（读作 a 小于 b）和 $a>b$（读作 a 大于 b）, 这两个命题中的任何一个都是指：方框 b 可以由方框 a 加上一个适当选择（使得 $b=a+c$）的第三个方框 c 而得到。这是我们记

$$c=b-a,$$

它定义了**减法**运算。

$$\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{bmatrix}$$

图 4 减法

加法和减法称为**互逆**运算，因为如果整数 a 加整数 d，然后再减整数 d，得到的结果还是原来的整数 a：

$$(a+d)-d=a.$$

应当注意，整数 $b-a$ 仅当 $b>a$ 时才有定义，当 $b<a$ 时，符号 $b-a$ 解释为**负整数**，这将在后面讨论。

为了方便起见，我们用记号 $b \geq a$（读作“b 大于等于 a”）或 $a \leq b$（读作“a 小于等于 b”）来表示对 $a>b$ 的否定。

引入整数**零**（它用一个完全空的方框表示），使我们可以稍微扩大正整数（它们用有点的方框表示）的范围。如果我们用通常的符号 0 来表示空方框，则按照加法和乘法的定义，对于每一个整数 a 有

$$a+0=a,$$
$$a \cdot 0=0.$$

因为 $a+0$ 表示一个空方框加到方框 a 上，而 $a \cdot 0$ 表示一个没有列的方框，即一个空方框。

通过对每个整数 a 建立

$$a-a=0,$$

减法的定义很自然地推广了。这些是**零**的特殊算术性质。

类似于上述方框中加点的集合模型（如古代算盘），一直到中世纪的后期都被广泛地用在数值计算上。从中世纪以后，它们才逐渐被建立在十进制上的更高级的符号方法所替代。

1.1.2 整数的表示

我们必须仔细地把每一个整数和用来表示它的符号 $5, V, \ldots$ 区分开来。在十进位制中，$0,1,2,3,\ldots,9$，这十个数码符号是用来表示零和前九个正整数的。一个较大的正整数，例如“三百七十二”可表示为

$$300+70+2=3 \cdot 10^2+7 \cdot 10+2$$

的形式，而这在十进位制中用符号 372 表示。这里重要的是，数码符号 $3,7,2$ 的意义依赖于它们在个位、十位、百位的**位置**。有了这个“位置记法”，我们用十个数码符号的各种组合就可以表示出任何整数。表示一个整数的一般规则可以用

$$z = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$$

来说明。这里数码 a, b, c, d 是从零到九的整数。这时，我们用缩写符号

$$abcd$$

来表示整数 z。我们注意到系数 d, c, b, a 是整数 z 连续被 10 除后的余数，例如

$$\begin{array}{r c}
10\underline{)\,372} & \text{余}\quad\text{数} \\
10\underline{)\,37} & 2 \\
10\underline{)\,3} & 7 \\
0 & 3
\end{array}$$

上面对 z 给出的这种特殊表达式，仅能表示小于一万的正整数，因为再大的正整数，要求用五个或五个以上的数码符号来表示。如果 z 是在一万到十万之间的一个整数，我们可以用

$$z = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

的形式来表示，并且用符号 $abcde$ 来记它。对十万到百万之间的整数以及更大的数，类似的表达式都成立。如果用一个简单的公式能完整概括地表述这些结果，那将是十分有用的。我们可以这样作：对不同的系数 $e, d, c, \ldots$ 我们用一个带有不同“下标”的字母 a，即 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ 来表示，十的幂不论有多大，都可以这样来表示，即记这最高次幂为 10^n，而不是上面例子中的 10^3 或 10^4，这里 n 理解为是一个任意的正整数。这时，在十进位制中表示一个正整数 z 的一般方法是，把 z 表示为

$$(1) \qquad z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

而且用符号

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$$

来记它。与上面的特殊情况一样，我们看到数字 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 z 连续

被 10 除后所得到的一系列余数。

在十进位系统中，数十，是单独选出作为基底的。一般人可能没认识到，并不一定非得选取十不可，任何大于一的正整数都可用来作基底。例如，可以用一个七进位系统（基底是 7）。在这样一个系统中，一个正整数可以表示为

$$(2) \qquad b_n \cdot 7^n + b_{n-1} \cdot 7^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot 7 + b_0,$$

这些 b 是从零到六的数码。这时这个正整数用

$$b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$$

来表示。因此“一百零九”在七进位系统中用符号 214 表示，其意义是

$$214 = 2 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 4$$

作为一个练习，读者可以证明：从以十为基底变成任何其他基底 B 的一般规则是，用 B 连续除以十为基底的整数 z，所得的余数将是在以 B 为基底的系统中的数码，例如

$$\begin{array}{rc} 7\overline{)\,109} & \text{余 数} \\ 7\overline{)\,15} & 4 \\ 7\overline{)\,2} & 1 \\ 0 & 2 \end{array}$$

109(十进位制)=214(七进位制)

很自然地会问，究竟选择哪一个基底最合适。我们从下面会看到，太小的基底有它不方便之处，而一个大的基底要求记住许多数码符号和有一个更大的乘法表。有人曾鼓动过用十二作基底，因为十二能被二、三、四和六整除，这样，涉及除法和分数时，常能简化。为了写出任一以十二为基底（十二进位系统）的正整数，我们要求对十和十一采用两个新的数码符号，让我们用 α 表示十，用 β 表示十一。这样在十二进位制中，“十二”将写成 10，而“二十二”将是 1α，“二十三”将是 1β，“一百三十一”是 $\alpha\beta$。

位置记法的发明应归功于苏马连人或巴比伦人，后来为印度人所发展。这个发明对人类文明有巨大的意义。早期的数字系统是建立在纯粹的加法规则上的。例如在罗马人的符号表示中，

$$\text{CXVIII} = \text{壹佰} + \text{拾} + \text{伍} + \text{壹} + \text{壹} + \text{壹}.$$

埃及、希伯来和希腊的数字系统也是处在同样的水平上。在任何纯粹的加法记忆中，有一个不方便之处，就是当数变大时需要越来越多的新符号。当然早期的科学家并没有被我们现代的天文数字或原子数字所困扰。但是古代系统（例如罗马系统）的一个主要缺点是，数的计算十分困难以至于除了最简单的问题外，只有专家才能掌握。这与现在通用的（即印度的）位置记法是很不同的。位置记法是中世纪由意大利商人（他们从穆斯林那里学会的）引进欧洲的。位置记法有一个很方便的性质：所有的数，不论多大或多小，都能用一小组不同的数码符号来表示（在十进位制中就是“阿拉伯数字” $0, , 1, 2, \cdots, 9$）。而且其更重要的优点就是容易计算。用位置记法所表示的数，其计算规则可以用这些数码的加法表和乘法表的形式来表示，而且一旦记住，便可永远运用自如。古代的计算技巧一度只限于少数专家所掌握，而现在则是小学里的课程了。像这样科学进步对日常生活有如此深刻的影响，并带来极大的方便的例子还不是很多的。

1.1.3 非十进位制中的计算

以十为基底的用法要回溯到世界文明的初期，而且毋庸置疑这是由于人们用十个手指进行计算的缘故。但是在许多语言中，从数目字上来看，显示出曾用过其他基底的遗迹，特别是十二和二十。在英文和德文中，11 和 12 就不是按照十进位的原则把数码和“十”（teens）组合在一起的，在语言上它们与十完全无关。在法文中 20 和 80 的写法是“廿”（vingt）和“四-廿”（quatre-vingt），这可能由于某种目的曾用过一个以 20 为基底的系统。在丹麦文中 70 的写法是“halvfirsindstyve”，这意思是从三倍二十到四倍二十的某个中间值。巴比伦的天文学家有过一种记数系统，其中部分是六十进位的（以六十为基底），可以认为这和我们习惯上把一小时和一度角分为六十分有关。

在非十进位制中，算术规则仍不变，但必须用不同的加法表和乘法表来计算。由于我们习惯于十进位制并且已把数的语言与十进位制紧密连在一起了，因此在一开始时，我们可能会感到有点别扭。让我们试试在七进位制中作一乘法。在进行之前最好写下我们必须用的表：

加法

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	10
2	3	4	5	6	10	11
3	4	5	6	10	11	12
4	5	6	10	11	12	13
5	6	10	11	12	13	14
6	10	11	12	13	14	15

乘法

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	11	13	15
3	3	6	12	15	21	24
4	4	11	15	22	26	33
5	5	13	21	26	34	42
6	6	15	24	33	42	51

现在，让我们用 24 乘 265，在这里数的符号是七进位制中的符号（在十进位制中，这相当于 18 乘 145）。乘法规则和十进位制中的情形一样。我们开始用 4 乘 5，由乘法表知，得 26。

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 5 \\ 2\ 4 \\ \hline 1\ 4\ 5\ 6 \\ 5\ 6\ 3\ \ \\ \hline 1\ 0\ 4\ 1\ 6 \end{array}$$

我们在个位处写下 6 并把 2“进”到前一位，然后我们求出 $4 \cdot 6 = 33$，和 $33+2=35$，我们写下 5 然后继续以这种方式进行直到全部乘完。把 1456 和 5630 加起来，在个位上我们得 $6+0=6$，在七位的地方我们有 $5+3=11$，再写下 1 并把 1 记到第四十九位上，在那我们有 $1+6+4=14$。最后的结果便是 $265 \cdot 24 = 10416$。

为了核对这个结果，我们可以在十进位制中乘同样的数。10416（七进位制）在十进位制中可以这样写：找 7 的幂一直到第四位，$7^2 = 49$，$7^3 = 343$，$7^4 = 2401$。因此，$10416 = 2401 + 4 \cdot 49 + 7 + 6$，这是十进位制中的值。通过把这些数加起来，我们就知道在七进位制中的 10416 等于十进位制中的 2610。现在在十进位制中我们用 18 乘 145，其结果也是 2610，所以上述计算是对的。

习题：1）作出二十进位制中的加法表、乘法表，并作一些同样类型的练习。

2）以 5、7、11、12 为**基底**的进位制中，表示“三十”和“一百三十三”。

3）在这些进位制中，符号 11111 和 21212 是什么数？

4）对以 5、11、13 为**基底**的进位制建立加法表和乘法表。

从理论观点来看，在所有可能的基底中最小的基底是以 2 为基底的进位制。**在二进位制中**，只有数码 0 和 1，其他任何数都用一行 0、1 来表示。加法表和乘法表仅由规则 $1+0=1$ 和 $1\cdot 1=1$ 组成。显然，这系统也有它的不方便之处：即，为了表示一个很小的数却需要很长的一行表达式。这样，七十九（可表为 $1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1$）在二进位制中被写成 1001111。

为了说明二进位制中乘法的简单性，我们用十进位制中 5 乘 7，它们相应的表示是 101 和 111。只要记住在该系统中 $1+1=10$，我们就有

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array} = 2^5+2+1
$$

这是 35，它的确应该是这个数。

莱布尼茨（W.Leibniz）（1646～1716）是他那个时代最伟大的思想家之一，他十分欣赏二进位制。用拉普拉斯（Laplace）的话来说："莱布尼茨在他的二进位算术中看到了宇宙创始的原象。他想象 1 表示上帝，而 0 表示虚无，上帝从虚无中创造出所有实物，恰如在他的数学系统中用 1 和 0 表示所有了的数。"

习题: 考虑以 a 为基底表示整数的问题。为了在这个系统中叫出一个数的名字，我们需要对数字 $0,1,\cdots,a-1$ 和 a 的各幂次：$a,a^2,a^3,\cdots$ 给出数字的名称。对 $a=2,3,\cdots,15$，若给零到一千的数字起名字，需要多少个不同的数字和名称？哪一种基底要求的数字名称最少？（例如 $a=10$，我们需要对十个数字给出名称，再加上 $10,100,1000$ 这三个，一共有 13 个；例如，$a=20$，我们需要对二十个数字给出名称，再加上 $20,400$，一共 22 个，对 $a=200$，我们需要 100 个数字再加上一个。）

1.2 数系的无限性 数学归纳法

1.2.1 数学归纳法原理

自然数序列 $1,2,3,4,\cdots$ 是没有止尽的，因为在任何自然数 n 后，我们还可以写出下一个自然数 $n+1$。为了表达自然数序列的这个性质，我们说，有**无穷多个**自然数。自然数序列是数学上无限性的一个最简单最自然的

例子，而数学上的无限性在近代数学中起着重要的作用。这本书的许多地方我们将必须处理包含无穷多个数学对象的集合，例如直线上的所有点的集合，平面上的所有三角形的集合等。自然数的无限序列是无限集中最简单的例子。

从 n 到 $n+1$，这一步接一步的程序产生了数的无限序列，也构成数学推理的一个最基本的类型（即数学归纳法）的基础。在自然科学中，“经验归纳法”是从对某个对象的一系列特殊的观测出发，直到表达成这现象每次发生时都服从的一般规律。这个规律的可信程度要依赖于观测的次数和证实的次数。这种归纳推理通常是完全令人信服的：预言明天太阳将从东方升起，这就是完全肯定的事。但这种命题的特点和用严格逻辑或数学推理来证明定理是不一样的。

数学归纳法是以一种很不同的方式来证明无穷序列情形都是正确的（第一个、第二个、第三个，一直下去概不例外）的数学定理。让我们用 A 表示一个有关任意自然数 n 的命题。例如 A 可以是这样的命题：“一个 $n+2$ 边的凸多边形的内角和是 n 倍 $180°$ 。”或 A' 是这样一个命题：“在平面上划 n 条直线不可能把平面分成多于 2^n 个部分。”为了证明这样一个对**每一个**自然数 n 都成立的定理，只对 n 的前 10 个、前 100 个甚至前 1000 个值来证明是不够的。这种做法相当于经验归纳法。与此相反，我们必须用一个严格数学的、非经验的推理方法。这种推理方法的特点我们下面用对命题 A 和 A' 的证明来说明。对于命题 A，我们知道，$n=1$ 时，这个多边形是三角形，由初等几何知，其内角和是 $1\cdot 180°$。对一个四边形，$n=2$，我们划一条对角线把四边形分为两个三角形，立刻看出四边形的内角和等于这两个三角形内角的和，由此得 $180°+180°=2\cdot 180°$。接着是 $n=3$（五边形）的情形，我们可把它分成一个三角形和一个四边形，由于刚才已证明了四边形的内角和是 $2\cdot 180°$。而三角形的内角和是 $180°$。因此对于五边形，我们则得到 $3\cdot 180°$。显然，依此类推，可逐次地证明 $n=4$，$n=5$，等等情形。而且，每一个命题都能以同样的方式由前一个命题推出，所以一般的定理 A 对于所有 n 都成立。

类似地，我们也能证明命题 A'。当 $n=1$ 时，其命题显然是对的，因为一条直线可把平面分成两部分。现在加上第二条直线，除非新的直线平行于第一条，否则上述的每一部分都被分成新的两部分。无论哪一种情形，对 $n=2$，我们所分的部分都不多于 $4=2^2$ 部分。现在加上第三条线，上述区域的每一个或者分成两部分，或者没被分割。因此总的部分不多于 $2^2\cdot 2=2^3$。证实这种情况正确之后，我们可以用同样的方式继续证明下一个情形，就这

样一直无限地进行下去。

上面讨论的基本思想是：为了证明一个对所有 n 成立的定理 A，我们连续地证明一系列特殊情形 A_1，A_2，$\cdots$。之所以能这样做，主要是基于：a) 存在一个一般方法，它表明：如果任意一命题 A_r 是正确的，则下一个命题 A_{r+1} 也是正确的；b) 第一个命题 A_1 已知是正确的。这两个条件（它们对证明所有命题 A_1，A_2，A_3，$\cdots$ 都正确，是足够了。）正如亚里士多德（Aristotel）的基本逻辑规则那样，对数学来说，它是基本的逻辑原则。我们把它叙述为：

假设我们希望证明整个一系列无穷多个数学命题

$$A_1, A_2, A_3, \cdots,$$

（它们合起来称为一般命题 A）。**假设 a) 通过某些数学论证证明了：如果 r 是任意正整数，且如果命题 A_r 已知是真的，则可推出命题 A_{r+1} 也真；b) 第一个命题 A_1 已知是真的。那么，序列的所有命题必然都是真的，从而 A 得证。**

就像接受简单的普通逻辑规则那样，我们将毫不犹豫地接受它，并把这作为数学推理的一个基本原则。因为这时我们能够证明任意命题 A_n 是正确的。这从给定的论断 b)（A_1 是真的）开始，然后重复地运用论断 a) 依次地证明 A_2，A_3，A_4 等等为真，一直到我们得到命题 A_n 为止。因此数学归纳法依赖于这样一个事实：任意一个自然数 r 都有一个后继的自然数 $r+1$，而且我们所求的自然数 n 可以从 1 开始经过这样的有限步骤达到。

通常在用数学归纳法原理时，并不明确地叙述出来，或者只是简单地用“等等”，“一直这样下去”这类的话来说明。这在初等数学中是常见的。但在比较细致的证明中，必须要明确地用归纳法讨论。我们将给出一些简单但又不是很显然的例子。

1.2.2　等差级数

对任意的 n 值，前 n 个整数的和 $1+2+3+\cdots+n$ 等于 $\frac{n(n+1)}{2}$。为了用数学归纳法证明这个定理，我们必须表明对任意的 n，命题 A_n：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

成立。a) 我们先看如果 r 是一正整数，且 A_r 已知是真的，即已知

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

这时，我们把数 $r+1$ 加到这等式的两边，得到等式

$$\begin{aligned}&1+2+3+\cdots+r+(r+1)\\=&\frac{r(r+1)}{2}+(r+1)\\=&\frac{r(r+1)+2(r+1)}{2}\\=&\frac{(r+1)(r+2)}{2},\end{aligned}$$

很清楚，这时命题 A_{r+1}。b) 由于 $1=\frac{1\cdot 2}{2}$，命题 A_1 显然是对的。因此按数学归纳法原理，命题 A_n 对每一个 n 都成立，这就是要证明的。

通常的证明是把和式 $1+2+3+\cdots+n$ 写成两种形式

$$S_n=1+2+\cdots+(n-1)+n$$
$$S_n=n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

然后加起来，我们看到在同一列的每一对数的和是 $n+1$，由于一共有 n 列，故知

$$2S_n=n(n+1)$$

这就证明了所要的结果。

从 (1) 我们立刻导出**任意等差级数**的前 $n+1$ 项的求和公式，

$$\begin{aligned}P_n&=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)\\&=\frac{(n+1)(2a+nd)}{2}.\end{aligned}\tag{2}$$

因为

$$\begin{aligned}P_n &= (n+1)a + (1+2+\cdots+n)d\\ &= (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}d\\ &= \frac{2(n+1)a + n(n+1)d}{2}\\ &= \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}.\end{aligned}$$

当 $a=0$，$d=1$ 时，这就是 (1)。

1.2.3　等比级数

可以用类似的方式来处理一般的等比级数。我们将证明对每个 n 值有

$$G_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{3}$$

（我们假设 $q \neq 1$，否则 (3) 式右边没意义。）

对 $n=1$，这命题肯定是对的，因为这时这命题为

$$\begin{aligned}G_1 = a + aq &= \frac{a(1-q^2)}{1-q}\\ &= a\frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = a(1+q).\end{aligned}$$

如果我们假设

$$G_r = a + aq + \cdots + aq^r = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q},$$

则可求得如下结果

$$\begin{aligned}G_{r+1} &= (a + aq + \cdots + aq^r) + aq^{r+1}\\ &= G_r + aq^{r+1} = a\frac{1-q^{r+1}}{1-q} + aq^{r+1}\\ &= a\frac{(1-q^{r+1}) + q^{r+1}(1-q)}{1-q}\\ &= a\frac{1-q^{r+1}+q^{r+1}-q^{r+2}}{1-q}\\ &= a\frac{1-q^{r+2}}{1-q}.\end{aligned}$$

这正好是命题 (3) 当 $n=r+1$ 时的情形。证毕。

在初等课本中，通常的证明是按如下步骤进行的。设

$$G_n = a + aq + \cdots + aq^n,$$

在等式的两边用 q 乘，得到

$$qG_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^{n+1}.$$

现在从原来的等式相应地减这个等式的两边，得到

$$G_n - qG_n = a - aq^{n+1},$$

$$(1-q)G_n = a(1-q^{n+1}),$$

$$G_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

1.2.4　前 n 项平方和

数学归纳法的另一个有趣的应用是关于前 n 项平方和。通过直接试验可以发现，至少在 n 不大时有

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{4}$$

人们**猜想**这个重要公式可能对**所有正整数** n 都成立。为了证明这点，我们再一次用数学归纳法原理。我们先看如果命题 A_n（在这里是等式 (4)）对 $n=r$ 时的情形是正确的，即

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$

然后在这等式两边加上 $(r+1)^2$，我们得到

$$\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2+(r+1)^2\\
=&\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+(r+1)^2\\
=&\frac{r(r+1)(2r+1)+6(r+1)^2}{6}\\
=&\frac{(r+1)[r(2r+1)+6(r+1)]}{6}\\
=&\frac{(r+1)(2r^2+7r+6)}{6}\\
=&\frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6}.
\end{aligned}$$

这情形正好就是命题 A_{r+1}，因为把 (4) 中的 n 用 $r+1$ 带入就得到它。为了完成证明，我们只须说明命题 A_1 成立，而这时等式

$$1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6},$$

显然成立。因此等式 (4) 对每个 n 都成立。

对于更高次的整数幂的和，$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$，这里 k 是任意一个正整数，都可以求出类似的公式。作为一个练习，读者可以用数学归纳法证明

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \tag{5}$$

应该指出的是，一旦公式 (5) 写出来后，用数学归纳法证明这公式就足够了，但这证明却没有表明这个公式最初是怎么产生的。为什么表达式 $[n(n+1)/2]^2$ 被人正确地猜到是前 n 项立方和的表达式，而不是 $[n(n+1)/3]^2$ 或 $(19n^2-41n+2)/2$ 或任何其他曾经被考虑过的无限多个相似类型的表达式。一个定理的证明在于应用某些简单逻辑规则，但这样一个事实并没有揭示数学中的创造性的成分，而创造性在于对被考察的各种可能性作一选择。假设 (5) 的来源问题，属于一个没有一般规律可循的领域，其中起作用的是经验、类比和直观。但是一旦叙述正确的假设，用数学归纳法就常可提供证明。由于这样一种证明方法并没有给出发现过程的线索，把它称为验证似乎更为合适。