

层次分析法

Analytic Hierarchy Process

成都信息工程大学学生数学建模协会



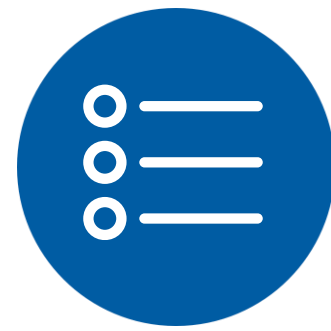
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/266405027>
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/452361480>
<https://blog.csdn.net/u013007900/article/details/45932851>

清风数学建模课程

主讲人：李振东

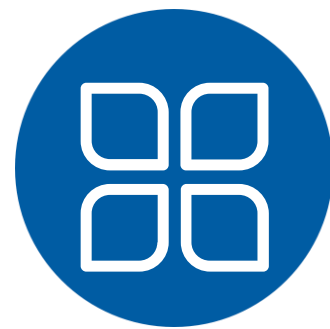
目录

CONTENTS



01 /

适用情况



02 /

数学模型介绍



03 /

层次分析法的局限



01 /

适用情况

Applicable Situation



什么是层次分析法

层次分析法(Analytic Hierarchy Process,AHP)是一种定性和定量相结合的、系统的、层次化的分析方法。

这种方法的特点就是在对复杂决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入研究的基础上，利用**较少的定量信息**使决策的思维过程**数学化**，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。是对难以完全定量的复杂系统做出决策的模型和方法。



什么是层次分析法

我们在生活中总是会面对一些复杂且影响因素较多的决策，我们在做出决策的时候往往个人主观因素对结果有一定的影响

汽车的选购
常见案例：旅游目的地选择
高考志愿的选择



02 / 数学模型介绍

Mathematical model



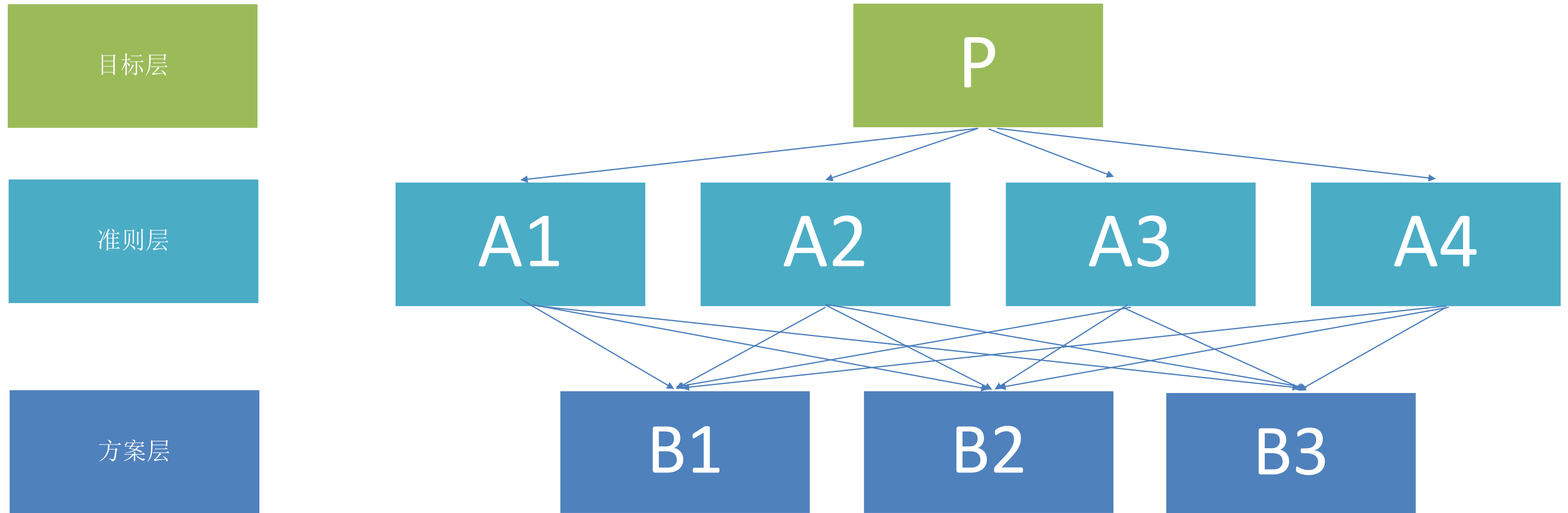
层次分析法的步骤

- 1, 建立层次结构模型
- 2, 构造判断矩阵
- 3, 对判断矩阵进行**一致性检验**
- 4, 通过构造的判断矩阵用三大方法得出准则层和方案层对应的**权重**
- 5, 根据得分选择分数最高的方案



建立层次结构模型

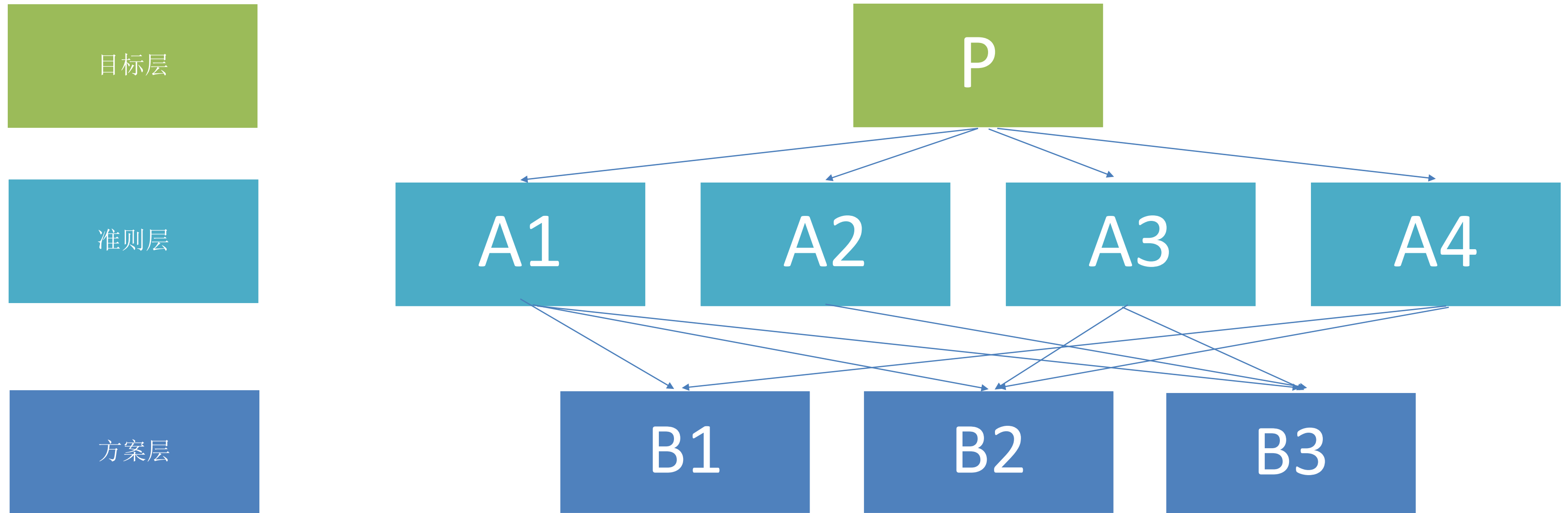
层次结构模型分为三部分：目标层，决策层，方案层





建立层次结构模型

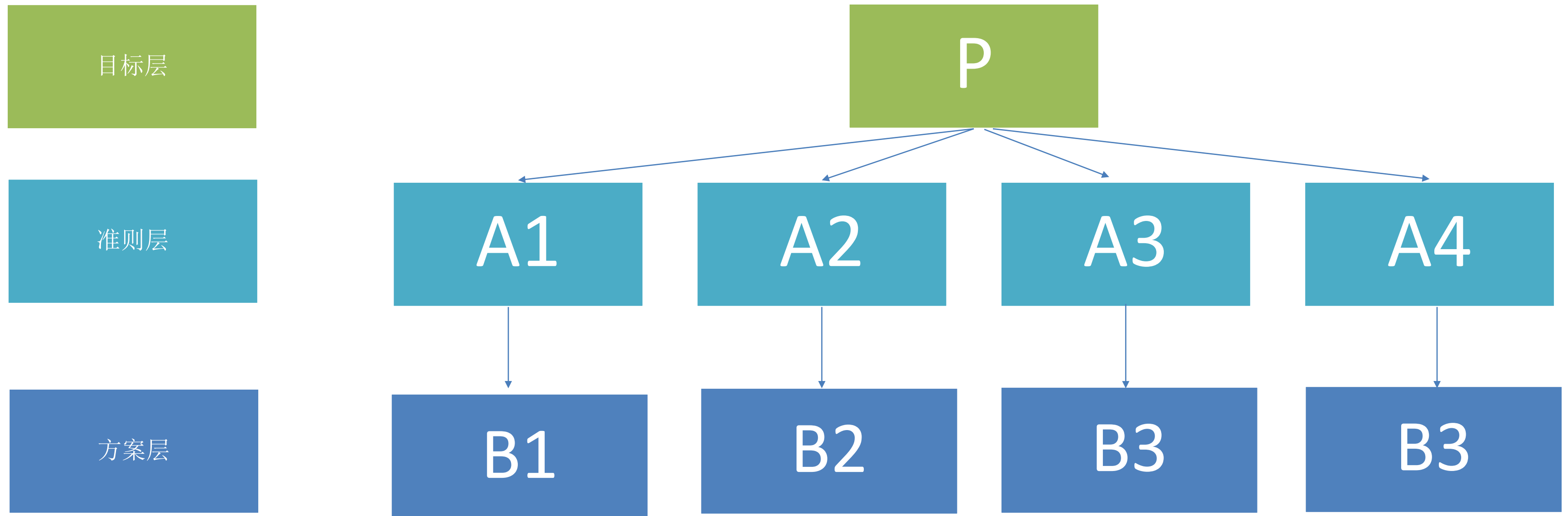
层次结构模型分为三部分：目标层，决策层，方案层





建立层次结构模型

层次结构模型分为三部分：目标层，决策层，方案层





构造判断矩阵

同色单元格和为1

	指标权重	B1	B2	B3
A1				
A2				
A3				
A4				



构造判断矩阵

P	A1	A2	A3	A4
A1				
A2				
A3				
A4				

A	B1	B2	B3
B1			
B2			
B3			



构造判断矩阵

A	B1	B2	B3
B1	1		
B2		1	
B3			1

B_{ij} = i与 j相比i的重要程度（满意度）

构造判断矩阵的标准

标度	含义+
1	同样重要性
3	稍微重要
5	明显重要
7	强烈重要
9	极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值
倒数	A和B相比如果标度为3, 那么B和A相比就是1/3



一致性检验

判断矩阵特点:

1, 是正互反矩阵

$$(B_{ij} = 1/B_{ji})$$

2, 对角线上标度为1

A	B1	B2	B3
B1	1	2	5
B2	1/2	1	2
B3	1/5	1/2	1



一致性检验

第一步：计算一致性指标CI

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

第二步：查找对应的平均随机数指标RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

第三步：计算一致性比例CR

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

如果 $CR < 0.1$ 则判断矩阵的一致性可以接受，否则需要进行修改



一致性检验

修改判断矩阵：

一致矩阵

A	B1	B2	B3
B1	1	2	4
B2	1/2	1	2
B3	1/4	1/2	1

A	B1	B2	B3
B1	1	2	9
B2	1/2	1	2
B3	1/9	1/2	1



算术平均法求权重

第一步：将判断矩阵归一化

第二步：将归一化后的矩阵按行求和

第三步：将第二步得到的一个列向量除以n

假设判断矩阵A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

用数学语言表达:

$$\omega_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}} \quad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$



几何平均法求权重

第一步：将A的元素按行相乘得到一个新的列向量

第二步：将新的列向量的每个元素开n次方

第三步：进行归一化得到权重

假设判断矩阵A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

用数学语言表达:

$$\omega_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^n a_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^n a_{kj} \right)^{\frac{1}{n}}} \quad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$



特征值法求权重

- 第一步： 求出矩阵A的最大特征值及其所对应的特征向量
- 第二步： 对特征值进行归一化得到权重

	指标权重	B1	B2	B3
A1				
A2				
A3				
A4				



03 / 层次分析法的局限

Limitations of AHP



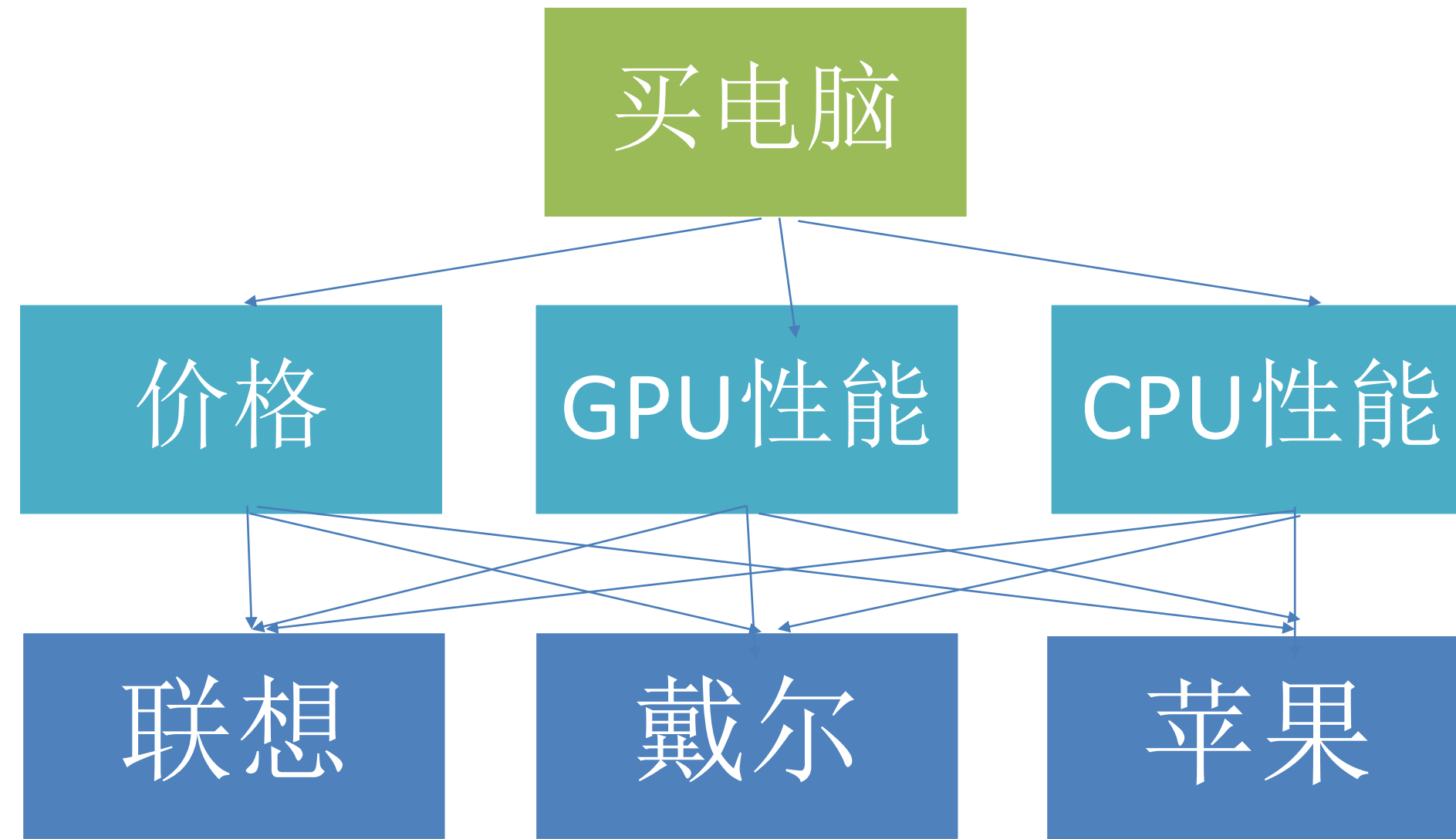
层次分析法的局限

- 1, 平均随机数指标CI的最高只到**15**，当指标数量大于**15**就不可用层次分析法
- 2, 不能为决策提供新的方案
- 3, 定性成分为主，定量成分较少，结果难以让人信服
- 4, 不能处理已有详细数据的方案（可以使用**topsis**法）



实践

假如说我们现在要买电脑，
要求即实惠又性能强大





实践

	指标权重	联想	戴尔	苹果
价格				
GPU性能				
CPU性能				



实践

买电脑	价格	GPU性能	CPU性能
价格	1	3	4
GPU性能	1/3	1	2
CPU性能	1/4	1/2	1

	指标权重	联想	戴尔	苹果
价格	0.6250			
GPU性能	0.2385			
CPU性能	0.1365			

算术平均法求权重的结果为：

0.6232

0.2395

0.1373

几何平均法求权重的结果为：

0.6250

0.2385

0.1365

特征值法求权重的结果为：

0.6250

0.2385

0.1365

一致性指标CI=

0.0091

一致性比例CR=

0.0176

因为 $CR < 0.10$ ，所以该判断矩阵A的一致性可以接受！



实践

价格	联想	戴尔	苹果
联想	1	1/4	5
戴尔	4	1	8
苹果	1/5	1/8	1

	指标权重	联想	戴尔	苹果
价格	0.6250	0.2438	0.6893	0.0669
GPU性能	0.2385			
CPU性能	0.1365			

A=[1 1/4 5;4 1 8;1/5 1/8 1]

算术平均法求权重的结果为：

0.2438
0.6893
0.0669

几何平均法求权重的结果为：

0.2370
0.6986
0.0643

特征值法求权重的结果为：

0.2370
0.6986
0.0643

一致性指标CI=

0.0470

一致性比例CR=

0.0904

因为CR<0.10，所以该判断矩阵A的一致性可以接受！

当A23为7的时候：

一致性比例CR=

0.1190

注意：CR >= 0.10，因此该判断矩阵A需要进行修改！



实践

GPU性能	联想	戴尔	苹果
联想	1	2	4
戴尔	1/2	1	3
苹果	1/4	1/3	1

	指标权重	联想	戴尔	苹果
价格	0.6250	0.2438	0.6893	0.0669
GPU性能	0.2385	0.5884	0.3196	0.1220
CPU性能	0.1365			

A=[1 2 4;1/2 1 3;1/4 1/3 1]

算术平均法求权重的结果为：

0.5571
0.3202
0.1226

几何平均法求权重的结果为：

0.5584
0.3196
0.1220

特征值法求权重的结果为：

0.5584
0.3196
0.1220

一致性指标CI=

0.0091

一致性比例CR=

0.0176

因为CR<0.10，所以该判断矩阵A的一致性可以接受!



实践

CPU性能	联想	戴尔	苹果
联想	1	2	1/5
戴尔	1/2	1	1/6
苹果	5	6	1

	指标权重	联想	戴尔	苹果
价格	0.6250	0.2438	0.6893	0.0669
GPU性能	0.2385	0.5884	0.3196	0.1220
CPU性能	0.1365	0.1721	0.1020	0.7258
		0.31620005	0.5209601	0.1699812

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1/5 \\ 1/2 & 1 & 1/6 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

算术平均法求权重的结果为：

0.1741

0.1033

0.7225

几何平均法求权重的结果为：

0.1721

0.1020

0.7258

特征值法求权重的结果为：

0.1721

0.1020

0.7258

一致性指标CI=

0.0145

一致性比例CR=

0.0279

因为 $CR < 0.10$ ，所以该判断矩阵A的一致性可以接受！



感谢聆听

现实世界的奥秘等你探索 and 发现，
体验数学魅力， 让你收益终身！