Takagi 函数的弱切和水平集

于汉

摘　要

在本文中, 我们研究 Takagi 函数及其水平集的一些性质。我们证明了以 a, b 为参数的 Takagi 函数存在大型水平集, 其中 ab 为 Littlewood 多项式的根.。因而, 我们证明了对某些参数 a, b,$T_{a,b}$ 的函数图像的 Assouad 维数严格大于其上盒维数。特别的, 我们可以找到这些图像的具有大的 Hausdorff 维数的弱切, 其 Hausdorff 维数大于原图像的上盒维数。

关键词： Assouad 维数, Littlewood 多项式, Takagi 函数的水平集

1　简介

在本文中, 我们研究以下函数的图像,

$$T_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n T(b^n x),$$

其中,a, b 是满足 $a < 1, b > 1, ab > 1$ 的实参数,$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 1, 在单位区间内如下定义的帐篷函数,

$$T(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

这样的函数 $T_{a,b}$ 就称为 Takagi 函数。最开始,Takagi 函数指的是 $T_{\frac{1}{2},2}$, 但是我们称 $T_{a,b}$ 为 Takagi 函数也不会产生异议。人们对此类函数图像的 Hausdorff 维数和盒计数维数非常感兴趣。对盒维数, 我们从 [1, 第 2 章] 与 [4, 定

理 2.4] 中可知, 这些函数 $T_{a,b}$ 的图像的上盒维数可由以下公式计算得出

$$B = 2 + \frac{\ln a}{\ln b} = 1 + \frac{\ln ab}{\ln b}.$$

相比之下, 这些函数的图像的 Hausdorff 维数更难获得, 有关相关问题的最新结果, 请参见 [19],[5] 和其中的参考文献。

这篇文章的结论之一是关于某些 Takagi 函数的 Assouad 维数。在本文后续内容中, 对函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 我们记以下集合为函数 f 在区间 [0,1] 上的图像,

$$\Gamma_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], y=f(x)\}.$$

定理 1.1 (Assouad 维数)**.** *设 a,b 为正数且其乘积 $ab>1$ 为 $k-1$ 阶 Littlewood 多项式的根, 即*

$$\sum_{n=0}^{k-1}\epsilon_n(ab)^n.$$

其中, 序列 $\{\epsilon_n\}_{n\in\{0,\cdots,k-1\}}$ 取自 $\{-1,1\}$。此外, 如果 b 是一个大于 2 的整数, 则我们有以下结论,

$$\dim_{\mathrm{A}}\Gamma_{T_{a,b}} \geq 1+\frac{1}{k}.$$

评注 1.2. *事实上, 这个定理的证明说明了*

$$\dim_{\mathrm{A}}{}^{1/B}\Gamma_{T_{a,b}} \geq 1+\frac{1}{k},$$

其中,$B=\frac{\ln(ab^2)}{\ln b}$,$\dim_{\mathrm{A}}{}^{1/B}$ 是参数为 $1/B$ 的 Assouad 频谱。

在本文中, 我们仅关注 Assouad 维数。有关 Assouad 频谱的更多详情, 请参见 [10]。

注意到通过保持乘积 ab 不变, 并使 b 增大, 对于较大的 b, 这个下界可以比上盒维数 $\frac{\ln(ab^2)}{\ln b}$ 更大。例如, 当我们选取参数为 $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, b=8$, 则 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}\Gamma_{T_{a,b}}\approx 1.23$ 且 $\dim_{\mathrm{A}}\Gamma_{T_{a,b}}\geq\frac{4}{3}$。

定理 1 的一个结果是, 存在 Takagi 函数图像的大的弱切。有关维度的概念、弱切的定义和一些基本性质的更多详情, 请参阅第 4 节。

引理 1.3 (弱切)**.** *设 a,b 如定理 1.1 所述, 则存在 $\Gamma_{T_{a,b}}$ 的一个弱切 E, 使得*

$$\dim_{\mathrm{H}}E = \dim_{\mathrm{A}}\Gamma_{T_{a,b}} \geq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}\Gamma_{T_{a,b}}.$$

最右侧的不等式可以是严格的。

根据图 $T_{a,b}$ 的大型水平集的存在, 可以得出定理 1.1, 我们认为这一结果本身就很有趣。

定理 1.4. *设 $a.b$ 如定理 1.1 所述, 我们也允许 $ab=1$。对每一个 $y\in\mathbb{R}$, 我们定义以下水平集*

$$L(y)=\{x\in[0,1]:T_{a,b}(x)=y\}\times\{y\}.$$

存在 $y\in\mathbb{R}$ 使得

$$\dim_{\mathrm{H}}L(y)\geq\frac{1}{k}.$$

将乘积 ab 作为某类代数整数的限制似乎很强。然而, 只要稍加努力, 我们可以证明那些代数整数在 $[\frac{1}{2},2]$ 中是稠密的。

定理. *设 L 是代数整数的集合, 这些代数整数是 Littlewood 多项式的根, 即 $x\in\mathbb{C}$ 并存在整数 $k\geq 1$ 和一个有限序列 $\epsilon_n\in\{\pm1\},n\in\{0,1,\cdots,k-1\}$ 使得*

$$\sum_{n=0}^{k-1}\epsilon_n x^n=0.$$

则 $L\cap[\frac{1}{2},2]$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 中稠密。

上述结论的证明及其一般化可参见 [2,3,18]。

2 讨论与未来工作

在本节中, 我们将介绍定理 1.1 与定理 1.4 的一些背景。我们也将提出一些与本文的结果相关的问题。

2.1 函数图像的 Assouad 维数

定理 1.1 涉及一些 Takagi 函数的 Assouad 维数。很自然地, 我们可以考虑其它处处不可微的函数的 Assouad 维数, 例如,Weierstrass 函数和 Wiener 过程的图像。对后者, 我们有以下结论 ([12, 定理 2.2])。

定理 2.1 (HY17)**.** *单位区间上的 Wiener 过程的图像 $W(\cdot)$ 几乎肯定具有 Assouad 维数 2。*

我们还未完全确定任一 Takagi 函数的 Assouad 维数。我们只是说明了 Takagi 函数图像的 Assouad 维数可能严格大于上盒维数。

问题 2.2. 对 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $ab > 1$, 定义 $T_{a,b}$ 图像的 *Assouad* 维数。

2.2 Takagi 函数的水平集

有关 Takagi 函数水平集的更多详情, 请参见 [1,16]。注意到, 如果我们设 $a = 0.5, b = 2$, 则我们能找到 $T_{a,b}$ 的 Hausdorff 维数至少为 0.5 的水平集。这是精确的, 参见 [6]。对其他的 a, b 的值, 例如 $a = \frac{\sqrt{5}+1}{16}, b = 8$ 我们看到, 我们可以找到一个 Hausdorff 维数至少为 $\frac{1}{3}$ 的水平集, 但我们不知道它是否精确。

问题 2.3. *Takagi* 函数 $T_{\frac{\sqrt{5}+1}{16},8}$ 的水平集能达到的最大 *Hausdorff* 维数是多少?

3 符号

1. 对一个实数 $x \in \mathbb{R}$, 我们用符号 x^+ 来表示一个数 $x + \epsilon$ 其中 $\epsilon > 0$ 是某个固定的正数, 其值可以自由选择, 必要时我们会指出 ϵ 的具体值。相似的, 我们用 x^- 来表示一个比 x 小但是非常接近 x 的数。

2. 对一个函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 下列集合称为其在 [0,1] 区间上的图像

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = f(x)\}.$$

3. 对一个实数 x, 我们用 $\lfloor x \rfloor$ 来表示不超过 x 的最大整数。

4 预备知识

现在, 我们将介绍本文中使用的一些维数的概念。我们用 $N_r(F)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集 F 用半径为 $r > 0$ 的球的最小覆盖数。

4.1 Hausdorff 维数

F 的 Hausdorff 维数定义为

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s : \forall \delta > 0, \exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \textit{ such that } \bigcup_i U_i \supset F, \sum_i \mathrm{diam}(U_i)^s < \delta\}.$$

4.2 上盒维数

F 的上盒维数是

$$\overline{\dim_{\mathrm{B}}} F = \limsup_{r \to 0} \Big(-\frac{\log N_r(F)}{\log r} \Big).$$

4.3 Assouad 维数和弱切

F 的 Assouad 维数是

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{A}} F = & \inf\{s \geq 0 : (\exists C > 0)(\forall R > 0)(\forall r \in (0, R))(\forall x \in F) \\ & N_r(B(x, R) \cap F) \leq C \Big(\frac{R}{r}\Big)^s\}.\end{aligned}$$

其中 $B(x, R)$ 表示以 x 为球心,R 为半径的闭合球。

一个学习 Assouad 维数的重要工具是 [17] 中介绍的弱切和 [11] 中介绍的微集。下面的定义出现在 [9, 定义 1.1]。

定义 4.1. 设 $X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 是一个固定的参考集（通常是闭合的单位球或立方体）并设 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集。假设存在一列相似映射 $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得当 $k \to 0$ 时 $d_{\mathcal{H}}(E, T_k(F) \cap X) \to 0$。则 E 称为 F 的一个弱切。

这里 $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \mathrm{d}_{\mathcal{H}})$ 是一个具有 Hausdorff 度量的完备的度量空间, 即对于两个紧集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 有以下定义

$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\},$$

其中, 对任意紧集 $C \subset \mathbb{R}^n$

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \delta \text{ for some } y \in C\}.$$

引理 1.3 是定理 1.1 和以下结果的直接结论, 见 [15, 命题 5.7]。

定理 4.2 (KOR)**.** 设 F 是满足 $\dim_{\mathrm{A}} F = s$ 的紧集。则存在 F 的一个弱切 E 使得

$$\dim_{\mathrm{H}} E = s.$$

换言之, 我们有

$$\dim_{\mathrm{A}} F = \max\{\dim_{\mathrm{H}} E : E \text{ is a weak tangent of } F\}.$$

4.4 由不相邻的立方体覆盖

为了方便, 在本文中我们将用不相邻的方格而非球来计算覆盖数。对 $a \in \mathbb{R}^2, R > 0$, 我们用 $S(a, R)$ 表示以 a 为中心, 边长为 $2R$ 的正方形, 其边平行于坐标轴。因为我们处理的是函数图像, 所以坐标轴的选择是自然的。我们表示以下覆盖数,

$$\begin{aligned} N(F \cap S(a,R), r) = &|\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \cap [0, \lfloor \frac{R}{r} \rfloor + 1]^2 : \\ &S((a - \frac{R}{2} + \frac{r}{2} + ir, a - \frac{R}{2} + \frac{r}{2} + jr), r) \cap F \neq \emptyset\}|. \end{aligned}$$

这相当于 $N_r(F \cap B(a, R))$, 因为存在一个常数 $C > 0$, 使得对于所有的 $a \in F, 0 < r < R < 1$, 我们都有以下不等式,

$$C^{-1} N_r(F \cap B(a,R)) \leq N(F \cap S(a,R), r) \leq C N_r(F \cap B(a,R)).$$

4.5 Takagi 函数的一些性质

在本文中, 我们会使用以下结论, 其证明在 [13] 中, 且我们使用 [4, 定理 2.4] 中给出的版本。

引理 4.3. 设 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续分段的 C^1 且为周期函数。则以下函数

$$T_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n T(b^n x)$$

一定满足以下两个性质之一,

1 : $T_{a,b}$ 是分段 C^1 的。

2 : 对一个正常数 $C > 0$ 以及任意区间 $J \subset \mathbb{R}$, 我们有以下不等式,

$$\sup_{x,y \in J} |T_{a,b}(x) - T_{a,b}(y)| \geq C|J|^{-\frac{\ln a}{\ln b}}.$$

注意到如果 $a < 1, ab > 1$, 则有 $-\frac{\ln a}{\ln b} \in (0,1)$。并且我们注意到, 如果 $|J| < 1$ 则有

$$\sup_{x,y\in J} |T_{a,b}(x) - T_{a,b}(y)| \geq C|J|.$$

评注 4.4. 当 T 是在第一节开始定义的帐篷函数时, 众所周知, 当 $a < 1, ab \geq 1$ 时, 函数 $T_{a,b}$ 是处处不可微的, 因此引理 4.3 中仅有第二个性质是对的。

5 大型水平集, 定理 1.4 的证明

我们证明具有特定参数 a, b, 的函数 $T_{a,b}$ 存在大型水平集。因为 ab 是 Littlewood 多项式的一个根, 我们可以得到

$$\sum_{i=0}^{k} \epsilon_i (ab)^i = 0.$$

其中,$k \geq 1$ 为整数, 和 $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ 的某个选择。接下来我们考虑前 k 项的部分和

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a^n T(b^n x).$$

对于整数 m, 上述函数的导数在点 $x = mb^{-k}$ 处不连续。现在让我们假设 x 是一个无理数, 则上述函数的导数为

$$F_1'(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon_i(x)(ab)^i.$$

其中 $\epsilon_i(x) \in \{\pm 1\}$ 取决于 x 的 b 级数展开。特别的, 如果

$$x = 0.b_1 b_2 \cdots$$

则

$$\epsilon_i(x) = \begin{cases} 1 & b_i \in [0, \frac{b}{2}] \\ -1 & b_i \in (\frac{b}{2}, 1]. \end{cases}$$

因此, 我们可以找到至少两个不相邻的长度为 $\frac{1}{2b^{k-1}}$ 的区间, 在这两个区间上 $F_1'(x)=0$ 且 $F_1(x)=a_1$ 是一个常数 $a_1\geq 0$。事实上, 当

$$\sum_{i=0}^{k-1}\epsilon_i(ab)^i=0.$$

我们也有

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\epsilon_i(ab)^i=0.$$

因此我们至少可以找到两个区间并且它们是关于 $\{x=0.5\}$ 对称的。又由于 F_1 本身也是关于 $\{x=0.5\}$ 对称的, 我们可以得到 $F_1(\cdot)$ 会在这两个区间上取相同的值, 我们把这两个区间称为 I_1, I_2。

我们考虑接下来的 k 项的和

$$F_2(x)=\sum_{n=k}^{2k-1}a^nT(b^nx).$$

则我们可以在 I_1, I_2 中找到 b 个长度为 $\frac{1}{2b^{2k-1}}$ 的区间, 使得在这些区间上, 上述和保持不变为 $a_2\geq 0$。要看到这一点, 考虑 I_1, 其长度为 $\frac{1}{2b^k}$。现在观察以下函数

$$F_2(x)=\sum_{n=k}^{2k-1}a^nT(b^nx)=\sum_{n=0}^{k-1}a^{n+k}T(b^kb^nx)=a^kF_1(b^kx).$$

因此,F_2 的图像是一个 F_1 图像的仿射复制, 或者直观地说, 是一个缩小的版本。然后我们看到, 在 I_1 中正好有 b 个长度为 $\frac{1}{2b^{2k-1}}$ 的区间, 使得在这些区间上,F_2 的取值为 a_2。事实上, 在任意形如 $[\frac{l}{b^{k-1}},\frac{l+1}{b^{k-1}}]$ 的区间上, F_2 的图像都有 $2b$ 个相同级别的平台。也就是说, 我们可以找到 $2b$ 个长度为 $\frac{1}{2b^{k-1}}$ 的区间, 在这些区间上,$F_2(x)=a_2$。因为 I_1 只是一个长度为 $\frac{1}{b^{k-1}}$ 一半的区间, 因此我们可以在区间 I_1 上找到 b 个平台。这里我们使用了 F_2 的镜像对称性。

对每一个 $j\geq 2$, 我们可以将上述论点应用于第 j 个 k 项的部分和, 因此, 我们可以找到一个 Cantor 集 C, 使得对一个常数 c, $T_{a,b}(C)=\{c\}$。通过构造, 该 Cantor 集可如下获得, 我们首先取两个长度为 $\frac{1}{2b^{k-1}}$ 的区间 I_1, I_2, 然后在这两个区间内放置 b 个长度为 $\frac{1}{2b^{2k-1}}$ 的区间。然后, 在这些长度为

$\frac{1}{2b^{2k-1}}$ 的区间内, 我们再放置 b 个长度为 $\frac{1}{2b^{3k-1}}$ 的区间。这个过程会无限期地进行, 并且自相似（就像中三分之一 Cantor 集的构造一样）。因此, 最终得到的 Cantor 集是一个自相似的满足开集条件的集合, 其 Hausdorff 维数是 $\frac{1}{k}$ （收缩比为 $\frac{1}{b^k}$, 分枝数为 b, 例如，参见 [7, 定理 9.3]）。这样, 我们就证明了定理 1.4。

6 压缩与计数，定理 1.1 的证明

略