# k-th minimum in a circle

lovezzt

September 3, 2013

## 1 problem

$n$ 个随机变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ , $x_i$ 在 $[0,1]$ 上面均匀分布，并且满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ 询问 $x_i$ 中第 $k$ 小的数的期望。

## 2 solutin

一般考虑第 $k$ 的问题，我们都从简单考虑，即先从最小考虑，再从 $k$ 小考虑，所以我们分 $2$ 部分处理。

### 2.1 求最小值的期望

对于概率论的题目，我们首先要设事件，如果不设时间茫然去做的话，一定会悲剧的。
所以我们设

$$A : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$B : \min_{i=1}^{n} x_i = x$$

并且设 $f(n, x)$ 为最小值为 x 的概率密度函数。可以知道

$$f(n, x) = f\{B|A\} = \frac{f\{AB\}}{f\{A\}}$$

下面我们的目标就是计算 $f\{AB\}$ 和 $f\{A\}$。

#### 2.1.1 $f\{A\}$

首先由于 $x_i$ 在 $[0,1]$ 上均匀分布，所以

$$f\{x_i = x\} = 1$$

所以
设 $s_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$

$$
\begin{aligned}
& f\{A\} \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-s_1} \dots \int_0^{1-s_{n-2}} dx_{n-1} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-s_1} \dots \int_0^{1-s_{n-3}} 1 - s_{n-2} dx_{n-2} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-s_1} \dots \int_0^{1-s_{n-4}} \tfrac{1}{2}(1-s_{n-3})^2 dx_{n-3} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^1 \int_0^{1-s_1} \dots \int_0^{1-s_{n-5}} \tfrac{1}{6}(1-s_{n-4})^2 dx_{n-4} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^1 \tfrac{1}{(n-2)!}(1-x_1)^{n-2} dx_1 \\
= & \tfrac{1}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

### 2.1.2 $f\{AB\}$

根据全概率公式设最小值是 $y$

$$f\{AB\} = \sum_{i=1}^{n} f\{AB|(x_i = x)\}$$

我们不妨计算 $x_n$ 设

$$C : AB|(x_n = x)$$

$$
\begin{aligned}
& f\{C\} \\
= & \int_0^{1-nx} \int_0^{1-nx-s_1} \dots \int_0^{1-nx-s_{n-3}} dx_{n-2} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^{1-nx} \int_0^{1-nx-s_1} \dots \int_0^{1-nx-s_{n-4}} 1 - nx - s_{n-3} dx_{n-3} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^{1-nx} \int_0^{1-nx-s_1} \dots \int_0^{1-nx-s_{n-5}} \tfrac{1}{2}(1-nx-s_{n-4})^2 dx_{n-4} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^{1-nx} \int_0^{1-nx-s_1} \dots \int_0^{1-nx-s_{n-6}} \tfrac{1}{6}(1-nx-s_{n-5})^2 dx_{n-5} \dots dx_2 dx_1 \\
= & \int_0^{1-nx} \tfrac{1}{(n-3)!}(1-x_1)^{n-3} dx_1 \\
= & \tfrac{1}{(n-2)!}(1-nx)^{n-2}
\end{aligned}
$$

所以可以得到

$$f\{AB\} = \frac{n}{(n-2)!}(1-nx)^{n-2}$$

### 2.1.3 $f(n, x)$

$$f(n,x) = f\{B|A\} = \frac{f\{AB\}}{f\{A\}} = n(n-1)(1-nx)^{n-2}$$

#### 2.1.4 求期望

设 $g(n,1)$ 为 $n$ 个随机变量最小值的期望。

$$\begin{aligned}
& g(n,1) \\
= & \int_0^{\frac{1}{n}} xn(n-1)(1-nx)^{n-2}dx \\
= & n(n-1)\int_0^{\frac{1}{n}} x(1-nx)^{n-2}dx \\
= & (n-1)\int_0^{\frac{1}{n}} x(1-nx)^{n-2}dnx \\
= & \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} nx(1-nx)^{n-2}dnx \\
= & \frac{n-1}{n}\int_0^{1} u(1-u)^{n-2}du \\
= & \frac{n-1}{n}\int_0^{1} (1-u)u^{n-2}du \\
= & \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

### 2.2 求第 k 小值的期望

我们设 $g(n,k)$ 为 $n$ 个数的第 $k$ 小的期望。求这个值时候我们可以考虑枚举最小值 $x$，那么剩下 $n-1$ 个数的和为 $1-nx$。那么在最小值为 $x$ 的条件下，第 k 小期望为 $g(n-1,k-1)(1-nx)+x$。根据全概率公式我们可以得到

$$\begin{aligned}
& g(n,k) \\
= & \int_0^{\frac{1}{n}} \left[(1-nx)g(n-1,k-1)+x\right] f(n,x)dx \\
= & \int_0^{\frac{1}{n}} xf(n,k)dx + g(n-1,k-1)\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)f(n,x)dx \\
= & \frac{1}{n^2} + g(n-1,k-1)n(n-1)\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^{n-1}dx \\
= & \frac{1}{n^2} + g(n-1,k-1)(n-1)
\end{aligned}$$

由上面可知

$$g(n-k+1,1) = \frac{1}{(n-k+1)^2}$$

所以

$$g(n,k)n = \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{1}{i}$$

$$g(n,k) = \frac{1}{n}\sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{H_n - H_{n-k}}{n}$$

这样这个题可以 $o(n)$ 预处理加上 $o(1)$ 输出答案。

## 3 感想

对于概率论的题目，一定要把事件清晰地设出来，求概率密度时一定要明确自己求的是什么事件的概率密度; 巧妙运用全概率公式、贝叶斯公式等将不好算的东西装话成好算的; 对于概率题目的每一步推导，一定要清晰地分析他的理论依据。