Задача об обтекании профиля крыла идеальной несжимаемой жидкостью

Гаврилов Олег Алексеевич

Филиал МГУ в Сарове

2023

Краевая задача

$$\Delta u(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f = -\vec{w}_\infty \vec{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(u^+ - u^-)|_{\Sigma_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}(u^+ - u^-)|_{\Sigma_1} = 0.$$

Сведение к граничному интегральному уравнению

Ищем решение в виде

$$u(x) = U[\Sigma, g](x) + U[\Sigma_1, g_1](x),$$

где $U[\Sigma, g](x)$ — потенциал двойного слоя с плотностью g, размещённый на поверхности Σ:

$$U[\Sigma, g](x) = \int\limits_{\Sigma} g(y)\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}dy, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}.$$

Тогда возникает интегральное уравнение

$$\int\limits_{\Sigma} g(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}dy + \int\limits_{\Sigma_1} g_1(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}dy = f(x),$$

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 0, \quad g_1(x) = g^+(x) - g^-(x).$$

Численная схема — метод коллокаций

Поверхность Σ аппроксимируется ячейками $\sigma_i, \ i = \overline{1, n}$, а поверхность Σ_1 — ячейками $\sigma_{n+j}, \ j = \overline{1, m}$. Ищем приближённое решение в виде

$$\widetilde{u} = \sum_{j=1}^{n+m} = g_j U_{\sigma_j}[e],$$

где $U_{\sigma_j}[e]$ — потенциал двойного слоя с плотностью $e(x) \equiv 1$, размещённого на ячейке σ_j.

После этого получаем и решаем СЛАУ относительно неизвестных $g_j, \ j = \overline{1, n+m}$.

Приближённое поле скоростей:

$$\vec{w}(x) = \vec{w}_\infty + \sum_{j=1}^{n+m} g_j \vec{W}_{\sigma_j}(x), \quad \vec{W}_{\sigma_j}(x) = grad\, U_{\sigma_j}[e].$$

Коэффициент давления на поверхности крыла:

$$C_p(x) = 1 - 4\|\vec{w}(x)\|^2.$$

Подъёмная сила:

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{5} \int\limits_{\Sigma} \vec{n}_y C_p(y) dy.$$

Распределение C_p

Для первой геометрии (wing_10_20):

Распределение C_p

Для второй геометрии (wing_20_10):

Распределение C_p

Для третьей геометрии (wing_20_40):

Подъёмная сила

$$\vec{F}_p = \left(F_p^1,\ F_p^2,\ F_p^3\right).$$

Для первой геометрии (wing_10_20): $F_p^2 \approx 0.28.$

Для второй геометрии (wing_20_10): $F_p^2 \approx 0.3355.$

Для третьей геометрии (wing_20_40): $F_p^2 \approx 0.327.$