Исходная задача:

$$y'(t)\cdot(1-t) = y(t) + \psi\cdot f(t) - \frac{\sqrt{y^2(t)-1}}{\theta}, \quad y(0)=1.$$

Требуется идентифицировать $f(t)$, если функция $y(t)$ задана таблично (приближённо).

В дальнейшем примем следующие обозначения:

$$z(t) = y(t)\cdot(1-t), \qquad u(t) = \psi\cdot f(t), \qquad c = \frac{1}{\theta}.$$

Введение функции $z(t)$ удобно, потому что $y(t)$ не существует (вообще говоря) при $t=1$.
К тому же задача Коши принимает более простой вид:

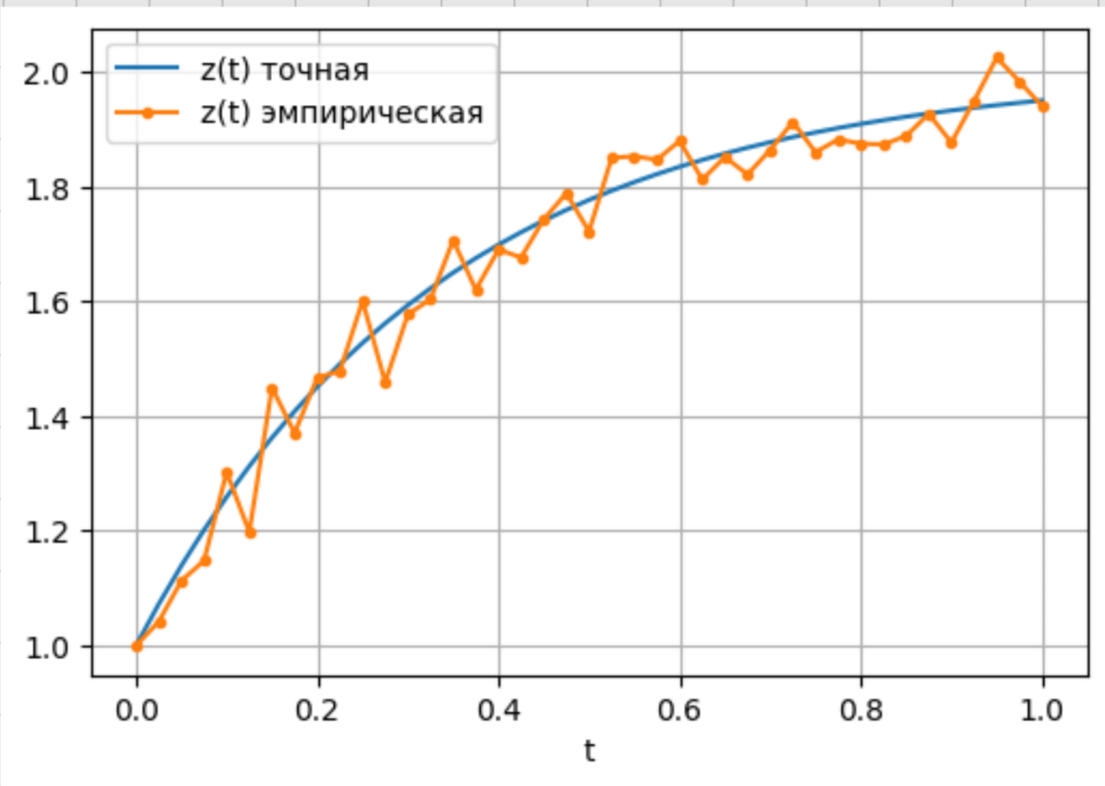
$$z'(t) = -c\sqrt{\left(\frac{z}{1-t}\right)^2 - 1} + u(t), \qquad z(0)=1 \qquad (ЗК)$$

Поэтому в дальнейшем будем работать с функциями $z(t)$, $u(t)$ и считаем, что имеются табличные данные для $z(t)$.
С их помощью мы можем восстановить вид функции $u(t)$ каким-либо образом. Вопрос — как проверить надёжность полученного результата? Предлагаю следующий порядок действий, который я называю „твин-эксперимент".

1) Зададим какую угодно функцию $z(t)$ аналитически.

Например, $z(t) = 2 - e^{-3t}$

2) Добавляем к $z(t)$ некоторый „шум", то есть случайные колебания. Затем берём набор значений полученной функции в узлах сетки (т.е. в точках $t_n = n \cdot \Delta t$, $\Delta t = 0{,}025$). Результат назовём „эмпирической функцией" — как будто это данные, полученные в ходе физического эксперимента. Но фокус в том, что мы знаем точное решение $z(t)$, т.к. мы сами его придумали. Получается примерно следующий результат:



3) Теперь „забываем" про точную $z(t)$, работаем только с эмпирической. Восстанавливаем $u(t)$ каким-либо способом (способы обсудим далее).

4) Как только получена $u(t)$, вычисляем $z(t)$ как решение задачи Коши (ЗК). Такая задача является корректной, её можно решать классическими методами (например, Рунге-Кутты). Восстановленную $z(t)$ сравниваем с исходной, которую сами придумали: $2 - e^{-3t}$.

Способы вычисления $u(t)$.

Обсудим шаг 3 более подробно. Имеются табличные данные z_n, соответствующие узлам $t_n = n \cdot \Delta t$, $\Delta t = 0{,}025$. Требуется приближённо вычислить $u(t)$ из задачи Коши

$$z'(t) = -c\sqrt{\left(\frac{z}{1-t}\right)^2 - 1} + u(t), \qquad z(0) = 1 \qquad (3K)$$

Точная функция $z(t)$ неизвестна; z_n – это только приближённые значения.

$$\boxed{\text{I способ („наивный").}}$$

Дискретизируем дифференциальное уравнение согласно узлам t_n:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = -c\sqrt{\left(\frac{z_n}{1-t_n}\right)^2 - 1} + u_n, \qquad z_0 = 1,$$

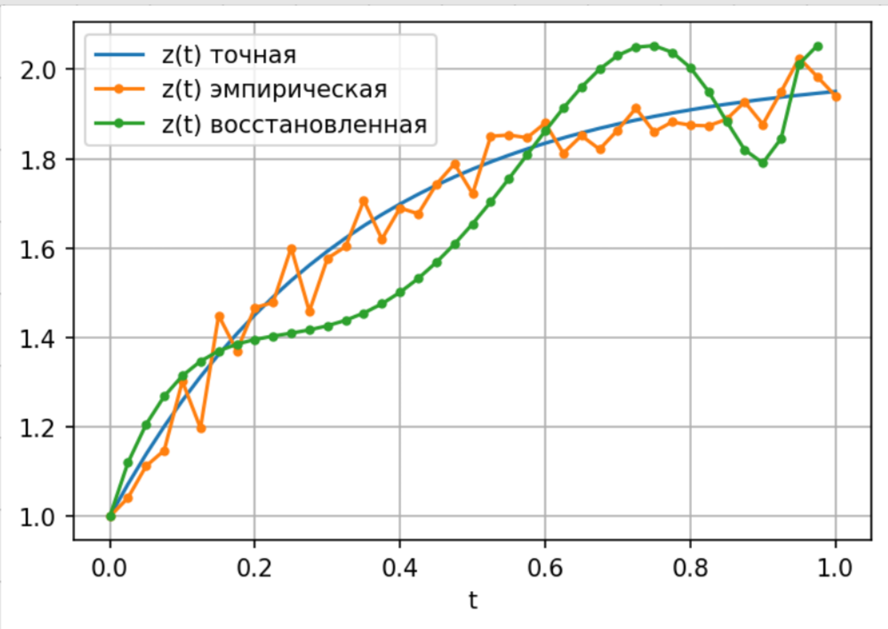
$$n = 0, 1, \ldots, 39, \qquad \Delta t = \frac{1}{40} = 0{,}025.$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} + c\sqrt{\left(\frac{z_n}{1-t_n}\right)^2 - 1} \qquad (*)$$

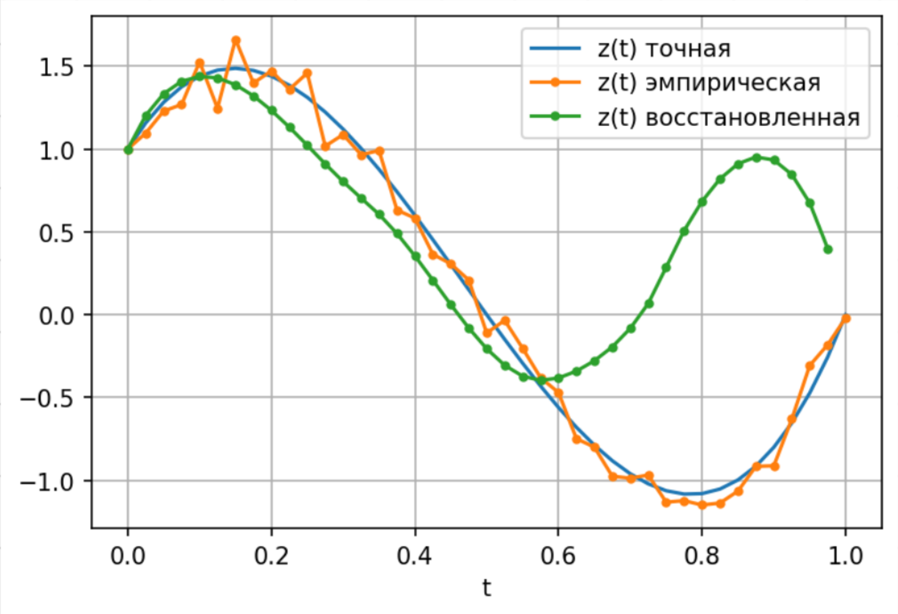
То есть u_n вычисляется с помощью конечных разностей для z_n. Такой способ ненадёжный, т.к. численное дифференцирование – некорректная операция. Убедимся в этом на примере.

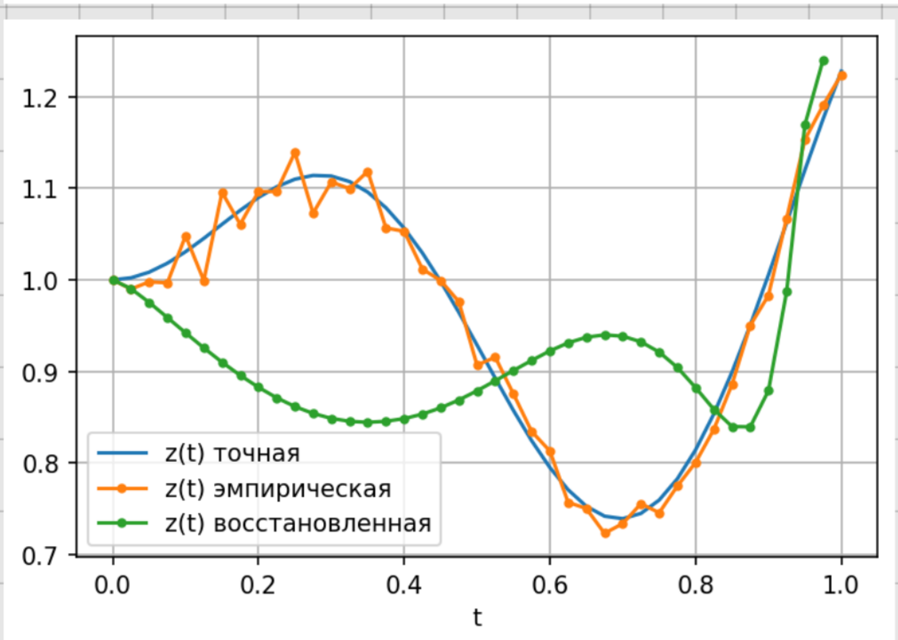
Пусть $z(t) = 2 - e^{-3t}$; эмпирическая функция задана как на рисунке выше. Вычисляем u_n по формулам (*). После этого проводим регрессию, чтобы приблизить u_n некоторой гладкой функцией по методу наименьших квадратов. Вид искомой функции должен быть таким, чтобы при взгляде на график было понятно, что это действительно хорошее приближение (например, это могут быть многочлены, экспоненты и т.п.)

С полученной гладкой функцией $u(t)$ решаем (ЗК) методом Рунге-Кутты 4-го порядка (результат вычислений по этому методу будет достаточно надёжным). Сравниваем восстановленную $z(t)$ с исходной.



Видно, что результат не такой, как хотелось бы.
Вот ещё пара примеров с другими функциями $z(t)$:





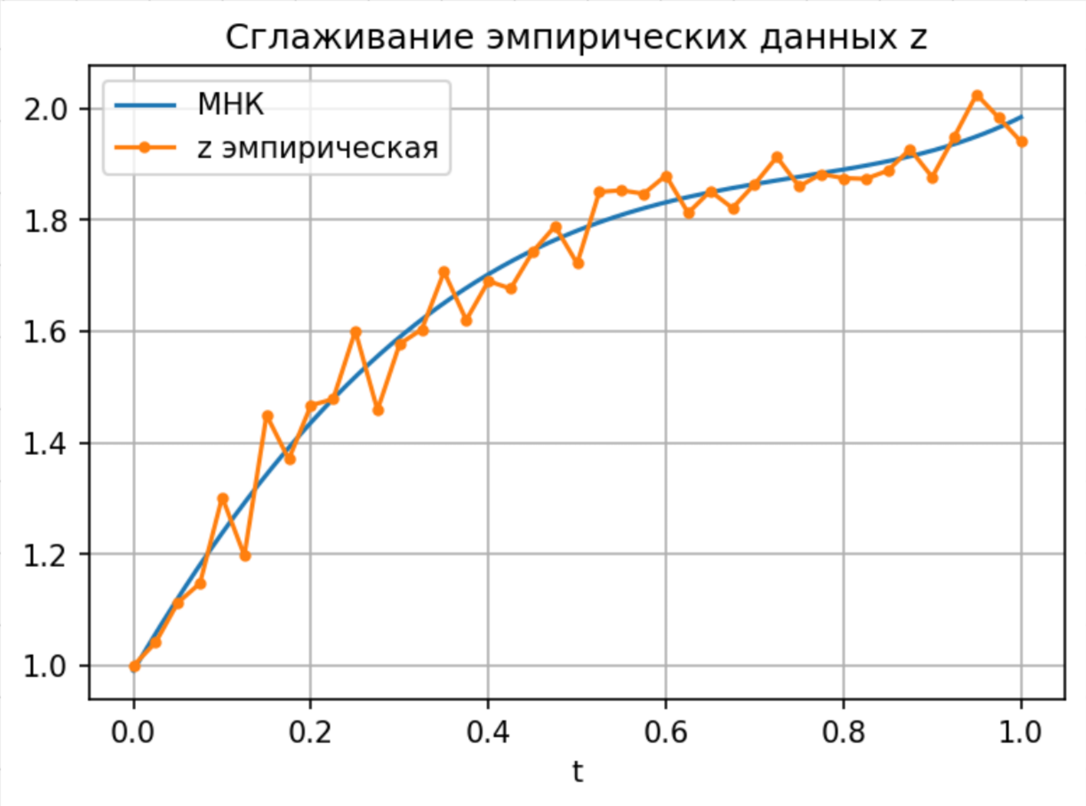
II способ вычисления $u(t)$ (минимизация функционала)

$$z'(t) = -c\sqrt{\left(\frac{z}{1-t}\right)^2 - 1} + u(t), \qquad z(0) = 1 \qquad (3K)$$

На самом деле $z = z(t, u(t))$, т.е. z зависит от выбора $u(t)$. Метод состоит в подборе такой функции $u(t)$, чтобы восстановленная $z(t, u(t))$ мало отличалась от эмпирических данных z_n. Но проблема в том, что эмпирические данные содержат случайные колебания, поэтому их нужно предварительно сгладить.

Рассмотрим тот же пример с аналитическим решением

$$z(t) = 2 - e^{-3t}.$$



Пусть $\tilde{z}(t)$ — сглаженные данные (синий график выше).
Дискретизируем эту гладкую функцию по узлам нашей сетки:

$$\tilde{z}_n = \tilde{z}(t_n), \qquad n = 0, 1, \dots, 40.$$

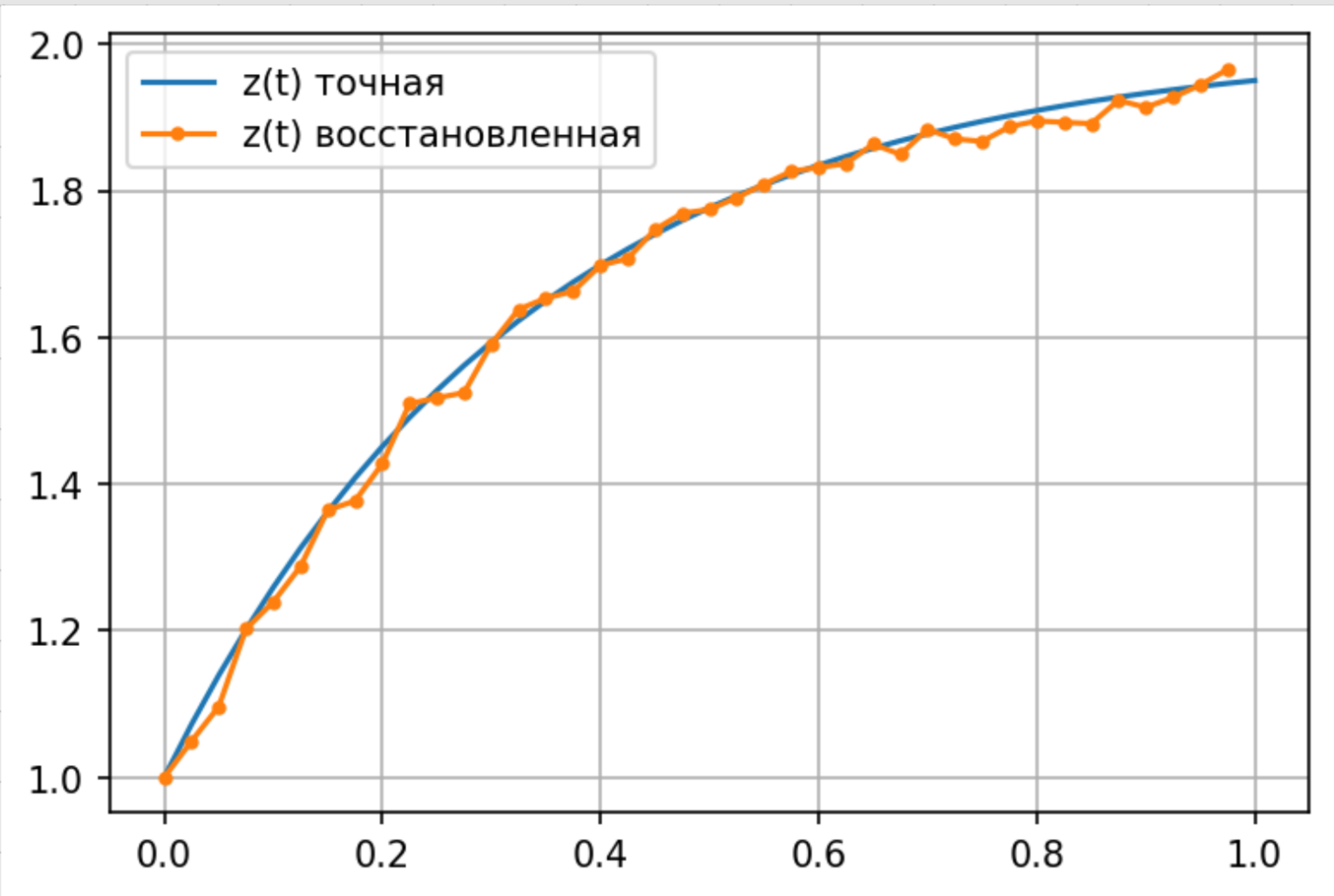
Пусть $\bar{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{40})$ — приближённые значения $u(t)$, полученные любым способом (например, наивным).
Составляем функционал

$$J(\bar{u}) = J(u_0, u_1, \dots, u_{40}) = \max_n \left| \tilde{z}_n - z(t_n, \bar{u}) \right|,$$

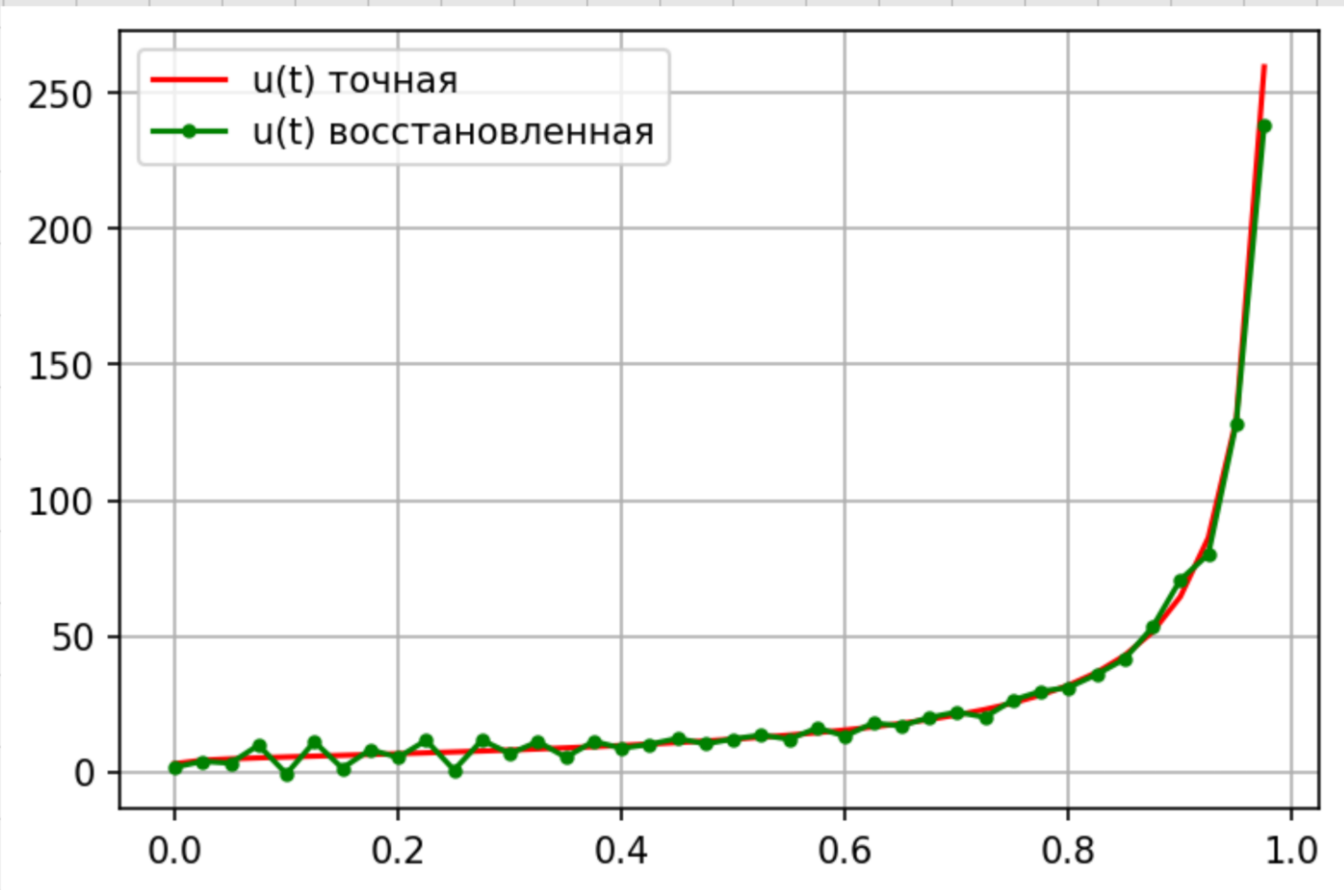
где $z(t_n, \bar{u})$ — это решение, полученное методом Рунге-Кутты 4-го порядка с заданным набором значений $\bar{u}$ и взятое в точке t_n.

Надо минимизировать $J(\bar{u})$ как функцию 41 переменных.
Проще всего использовать безградиентные методы, например, метод покоординатного спуска. Получаем $\bar{u}^*$ — набор u_n, при котором восстановленная $z(t)$ наиболее близка к сглаженной функции $\tilde{z}(t)$ по узлам сетки.

Результаты для нашего тестового примера:



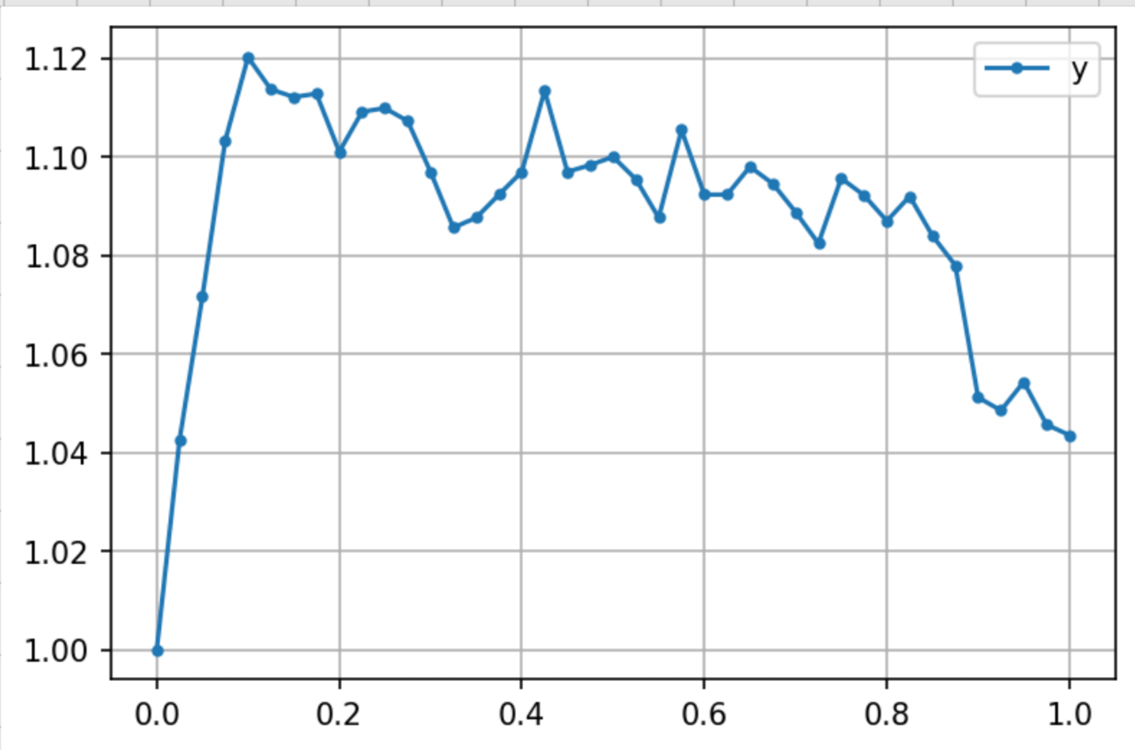
z(t) точная
z(t) восстановленная
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



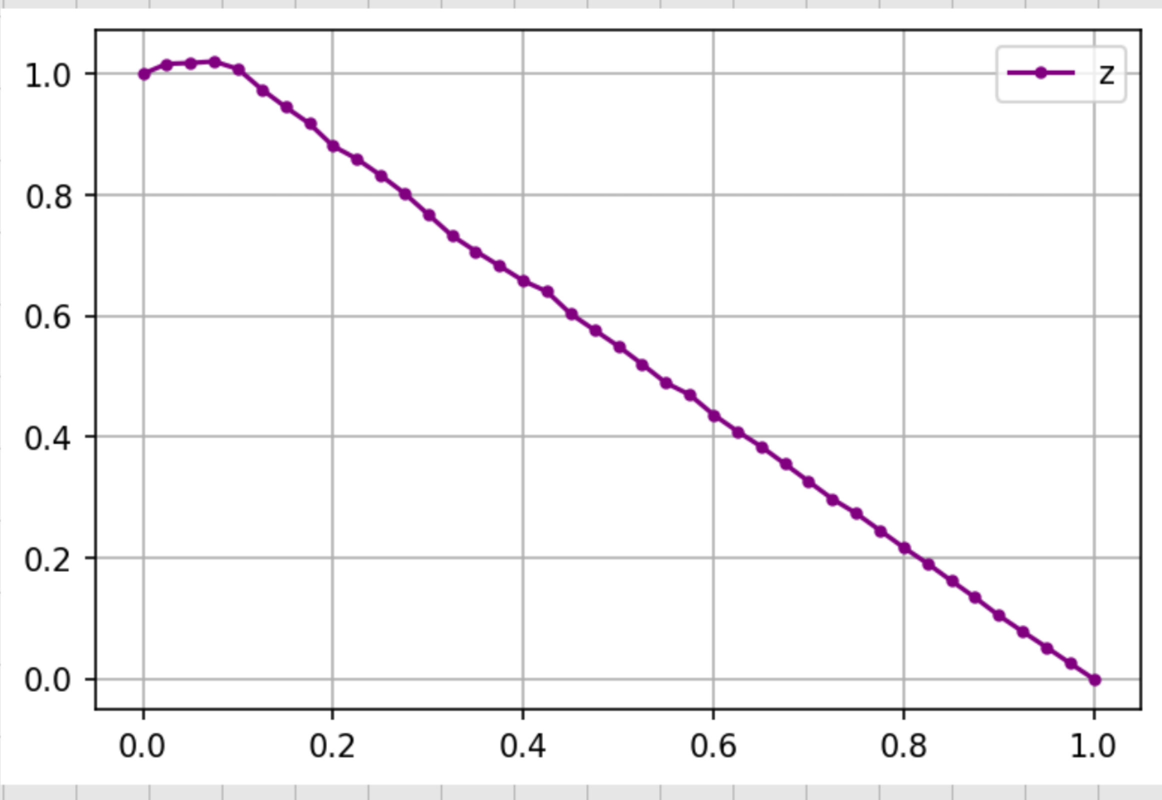
u(t) точная
u(t) восстановленная
250
200
150
100
50
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Эксперименты на реальных данных.

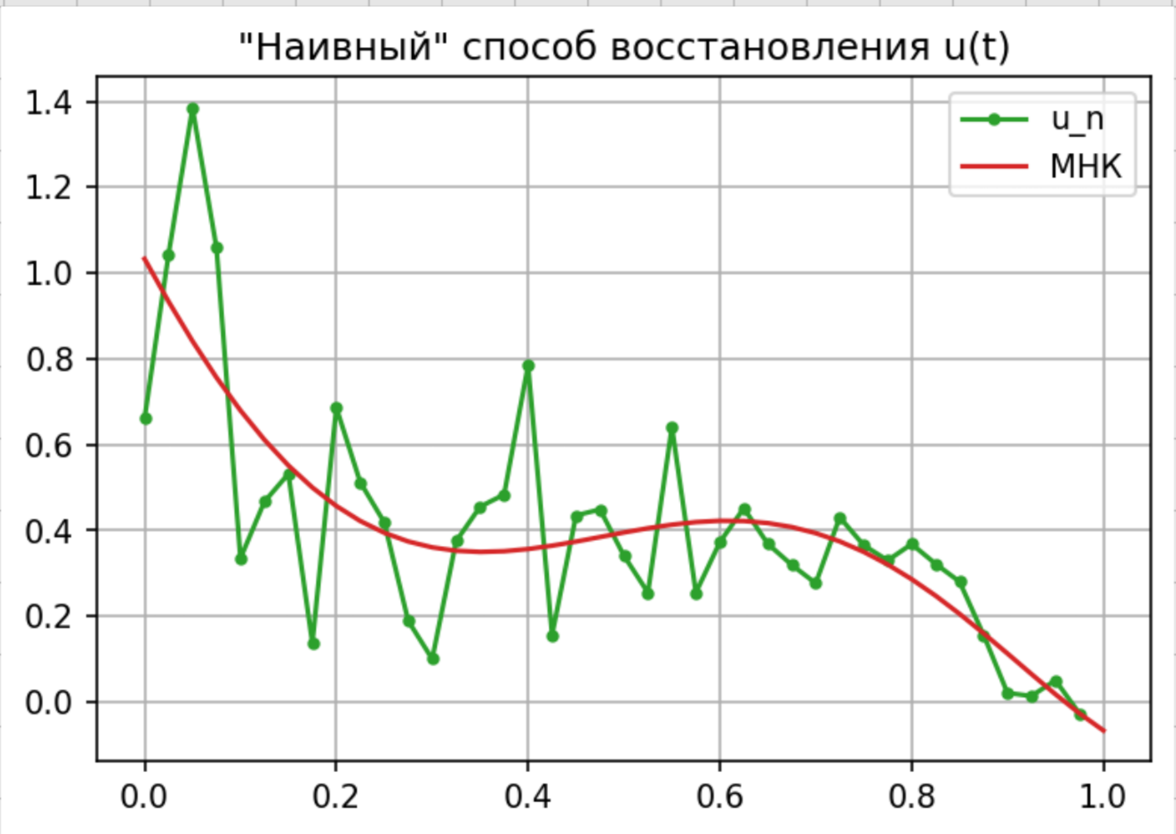
Имеются табличные значения $y(t)$:



При замене $z(t) = y(t)\cdot(1-t)$ график получается очень простым:



<u>I способ</u>. Восстанавливаем $u(t)$ с помощью численного дифференцирования, затем аппроксимируем многочленом 5-й степени по методу наименьших квадратов. Результат:



С полученной гладкой функцией $u(t)$ решаем прямую задачу вычисления $z(t)$ (задачу Коши) и возвращаемся к $y(t)$. Результат будет далее.

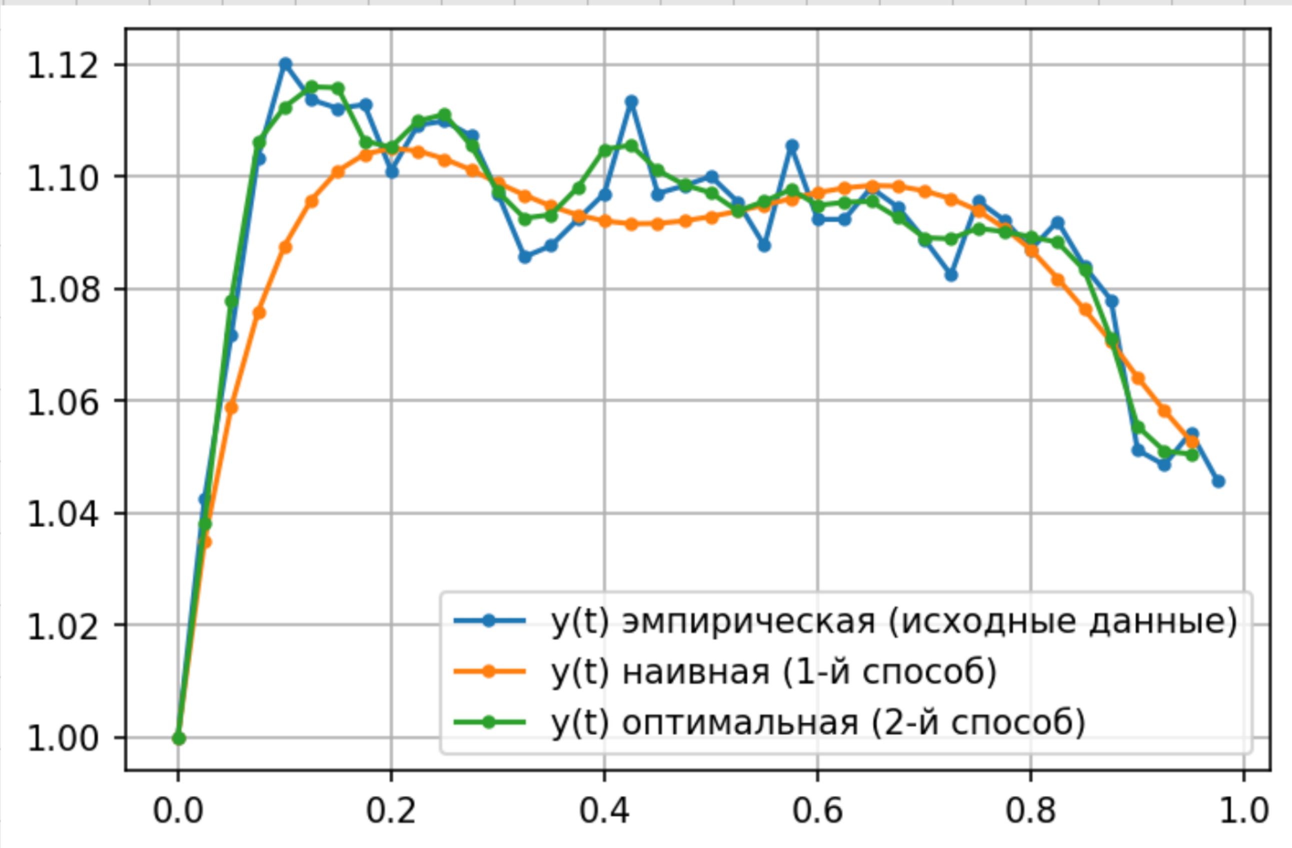
<u>II способ</u>. Используем метод покоординатного спуска для минимизации функционала

$$J(u) = \max_n |y_n - y(t_n, u)|,$$

где y_n – табличные данные, $y(t_n, \bar{u})$ – решение задачи Коши при заданном наборе $\bar{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{40})$.

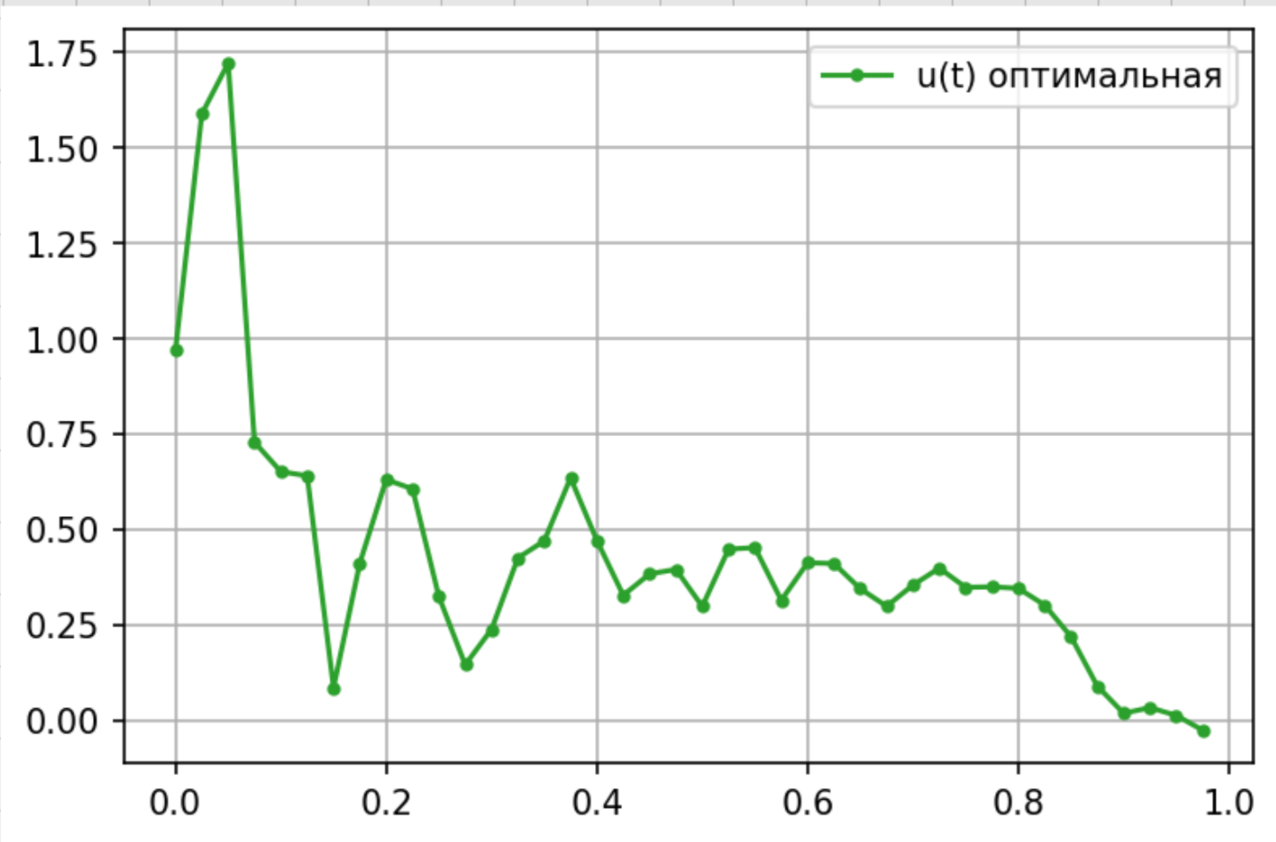
Результаты (сравнение двух методов)

Ниже на одном рисунке представлены исходные (табличные) значения $y(t)$, а также восстановленные двумя способами.



Зелёный график не такой гладкий, как оранжевый, но гораздо лучше приближает исходные данные, поэтому будем считать второй способ более надёжным. Соответствующие значения $u(t)$ представлены ниже.

Итоговый ответ к задаче идентификации: $f(t) = \dfrac{u(t)}{\psi}$, $\psi = 0{,}2$.


u(t) оптимальная
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0