Гаврилов Олег Алексеевич
Модель Ланчестера (боевых действий)

Цель задачи. В модели Ланчестера требуется по имеющимся начальным данным и характеристикам боевого вооружения определить победившую сторону и оценить потери каждой из них. Целью программной реализации является моделирование процесса боевых действий в зависимости от числовых параметров задачи, таких как эффективность каждой из сторон, начальные условия, параметры временной сетки.

Постановка задачи. Имеются две сражающиеся стороны с некоторыми числами $N_1(t)$ и $N_2(t)$ условных боевых единиц, зависящими от времени t. Допущения модели состоят в том, что числа N_1, N_2 всегда много больше 1, а огонь сосредоточивается на уцелевших боевых единицах. Тогда получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\Lambda_2 N_2(t), \tag{1}$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\Lambda_1 N_1(t), \tag{2}$$

где Λ_1, Λ_2 – числовые параметры задачи, которые понимаются как произведение скорострельности боевой единицы на вероятность поражения одним выстрелом для каждой из сторон соответственно. Система уравнений дополняется начальными условиями

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}.$$

Получили задачу Коши для линейной системы ОДУ первого порядка. Можно показать, что аналитическое решение имеет вид:

$$\begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(N_{10}\sqrt{\Lambda_1} - N_{20}\sqrt{\Lambda_2}\right) e^{\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}t} \begin{bmatrix} +1/\sqrt{\Lambda_1} \\ -1/\sqrt{\Lambda_2} \end{bmatrix} +$$
$$+\frac{1}{2}\left(N_{10}\sqrt{\Lambda_1} + N_{20}\sqrt{\Lambda_2}\right) e^{-\sqrt{\Lambda_1\Lambda_2}t} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\Lambda_1} \\ 1/\sqrt{\Lambda_2} \end{bmatrix}$$

Интеграл системы (1)–(2):

$$\Lambda_2 N_2^2 - \Lambda_1 N_1^2 = \mathrm{const} = C.$$

Численное решение. Перепишем систему (1)–(2) в общем виде:

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y = y(t) = \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(y) = \begin{bmatrix} -\Lambda_2 N_2 \\ -\Lambda_1 N_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Пусть $\tau > 0$ – шаг по времени, N – количество шагов, $y_n = y(t_n) = y(n\tau)$. Система (3) решается тремя численными методами разного порядка точности.
1. Метод Эйлера (первый порядок).

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

2. Метод Рунге–Кутты второго порядка («предиктор-корректор»).

$$y_{\text{predict}} = y_n + \tau f(y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau \, \frac{f(y_n) + f(y_{\text{predict}})}{2}.$$

3. Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка.

$$k_1 = f(y_n),$$

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2} k_2\right),$$

$$k_4 = f(y_n + \tau k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Программная реализация. Требуется смоделировать процесс боевых действий в зависимости от параметров Λ_1, Λ_2, характеризующих эффективность вооружения каждой из сторон, а также от начальных условий N_{10}, N_{20}, характеризующих количества боевых единиц в начальный момент времени. Решение получается как аналитически, так и одним из трёх описанных численных методов на различных промежутках времени. Дополнительно можно оценить время полного уничтожения одной из сторон, выявить победителя, оценить потери каждой стороны, а также оценить точность численной модели путём сравнения с аналитическим решением.

Для данной задачи разработан пользовательский интерфейс с помощью языка Python и библиотеки PyQt. Ниже представлены некоторые результаты расчётов. Численные методы показали хорошую сходимость к аналитическому решению.