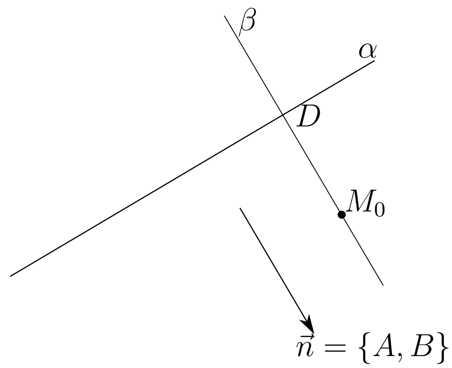
03.04.2021

Задача. *Доказать, что в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости расстояние d от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до прямой $\alpha : Ax + By + C = 0$, $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$, вычисляется по формуле*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Решение. Проведём через точку M_0 прямую β, перпендикулярную прямой α. Обозначим точку их пересечения через D.



Тогда направляющий вектор прямой β совпадает с вектором нормали прямой α и равен $\vec{n} = \{A, B\}$ (он не обязательно направлен в ту же полуплоскость, в которой лежит точка M_0, т. к. рисунок лишь схематичный). Значит, вектор $\overrightarrow{DM_0}$ сонаправлен с вектором нормали, то есть справедливо равенство

$$\overrightarrow{DM_0} = t\vec{n}$$

для некоторого числа t. Пусть $D = (x_D, y_D)$, тогда $M_0 = D + t\vec{n}$, а в покоординатной записи

$$x_0 = x_D + At, \;\; y_0 = y_D + Bt,$$
$$x_D = x_0 - At, \;\; y_D = y_0 - Bt. \tag{1}$$

Так как точка D принадлежит прямой α, для её координат справедливо равенство $Ax_D + By_D + C$. Подставляя сюда выражения (1), получим

$$A(x_0 - At) + B(y_0 - Bt) + C = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + C = t(A^2 + B^2),$$
$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Искомое расстояние d, очевидно равно длине вектора $\overrightarrow{DM_0}$. В итоге получаем

$$d = |\overrightarrow{DM_0}| = |t| \cdot |\vec{n}| = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$