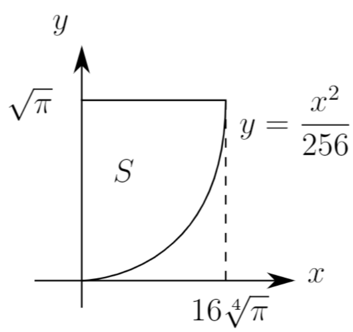
https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

16.04.2021

Задача. *Вычислить*

$$I = \int\limits_0^{16\sqrt[4]{\pi}} x\,dx \int\limits_{x^2/256}^{\sqrt{\pi}} \sin y^2\ dy. \tag{1}$$

Решение. Внутренний интеграл вычислить не получается, поскольку он представляет собой неберущийся интеграл Френеля: первообразная от $f(y) = \sin y^2$ не выражается через элементарные функции. Попробуем изменить порядок интегрирования, зная, что ответ останется тем же. Для этого следует изобразить область на плоскости переменных x, y согласно значениям, стоящим в пределах интегралов. Переменная x может принимать значения от 0 до $\sqrt[4]{\pi}$, а y меняется в зависимости от значения x, а именно от $x^2/256$ до $\sqrt{\pi}$. Область интегрирования S представляет собой фигуру, ограниченную двумя прямыми линиями и дугой параболы, как на рисунке:



Чтобы поменять порядок интегрирования, нужно объявить y независимой переменной. Из рисунка ясно, что y меняется в пределах от 0 до $\sqrt{\pi}$. Дуга параболы описывается уравнением $y = x^2/256$, а если выразить x, то получится $x = 16\sqrt{y}$ (отрицательную ветвь не берём, так как обе переменные принимают неотрицательные значения). Таким образом, переменная x меняется в зависимости от переменной y в пределах от 0 до $16\sqrt{y}$. Переписываем интеграл (1) следующим образом и вычисляем:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin y^2\,dy \int\limits_0^{16\sqrt{y}} x\,dx = 128 \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} y \sin y^2\,dy = 64 \int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin y^2\,d(y^2) = -64 \cos y^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 128.$$