https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

10.04.2021

Задача. *Найдите* $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$, *если* $u(x,t)$ *является решением начально-краевой задачи*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ \ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = 2184x^{11}(x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решение. По методу разделения переменных можно получить формулу решения:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \, e^{-(\pi n)^2 t} \cos \pi n x. \tag{1}$$

Здесь φ_n – коэффициенты Фурье для функции $\varphi(x) = 2184x^{11}(x-1)^2$, которые вычисляются по формулам

$$\varphi_n = 2\int\limits_0^1 \varphi(x) \cos \pi n x \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \varphi_1 = \int\limits_0^1 \varphi(x)\, dx.$$

Так как в сумме (1) в каждом слагаемом, кроме первого, присутствует экспонента с отрицательным показателем, то в пределе при $t \to \infty$ останется только первый коэффициент Фурье. Другими словами, распределение температуры в тонком стержне через достаточно большой промежуток времени станет равномерным и в каждой точке равным среднему значению от начального распределения.

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \varphi_1 = \int\limits_0^1 \varphi(x)\, dx = \int\limits_0^1 2184x^{11}(x-1)^2\, dx = 2184\, B(12,3).$$

Для удобства вычислений последний интеграл записали в виде бета-функции Эйлера. Её определение следующее:

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \quad x > 0, y > 0.$$

Для бета-функции справедлива формула

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, для которой справедливо свойство $\Gamma(n+1) = n!$, если n целое (то есть гамма-функция – это обобщение факториала). Таким образом, ответ:

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 2184\, B(12,3) = 2184\, \frac{\Gamma(12)\Gamma(3)}{\Gamma(15)} = 2184\, \frac{11!\, 3!}{14!} = 2184\, \frac{6}{12 \cdot 13 \cdot 14} = 2.$$