05.04.2021

Задача. *Плотность распределения случайной величины* ξ *имеет вид:*

$$f(x) = \frac{C}{x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\textit{распределение Коши}).$$

а) Определить константу C.
б) Найти функцию распределения случайной величины ξ.
в) Вычислить $\mathbb{P}(-1 < \xi < 1)$.

Решение. Константу C можно вычислить с использованием свойства о том, что интеграл плотности по всей числовой прямой равен 1:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{x^2+4}\,dx = \frac{C}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{C\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{2}{\pi}.$$

Функция распределения вычисляется как интеграл с переменным верхним пределом от функции плотности:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{t}{2}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}.$$

Наконец, вероятность попадания случайной величины ξ в заданный интервал равна разности функций распределения в левом и правом концах интервала, поскольку по определению выполнено равенство $F(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$.

$$\mathbb{P}(-1 < \xi < 1) = \mathbb{P}(x < 1) - \mathbb{P}(x < -1) = F(1) - F(-1) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{2} \approx 0,295.$$

Отметим, что распределение Коши – классический пример вероятностного распределения, не имеющего математического ожидания. Покажем это:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x^2)}{x^2+4} = \frac{1}{\pi}\ln(x^2+4)\Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}}(\ln(A^2+4) - \ln(B^2+4)).$$

Последний предел, очевидно, не существует.