https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

05.04.2021

Задача. *Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его.*

$$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0. \tag{1}$$

Решение. Напомним, что уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$$dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy.$$

Это имеет место, если выполнены равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y). \tag{3}$$

Другими словами, для решения уравнения (2) достаточно найти функцию $F(x,y)$, зная её частные производные $F'_x=M(x,y)$ и $F'_y=N(x,y)$.

Для достаточно гладких функций справедливо равенство вторых частных производных, то есть

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}.$$

Отсюда и из равенств (3) следует, что

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{4}$$

Это необходимое условие на то, чтобы уравнение (2) являлось уравнением в полных дифференциалах. Вернёмся к уравнению (1) и проверим для него условие (4).

$$M(x,y)=\frac{x}{\sin y}+2,\qquad N(x,y)=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-x\,\frac{\cos y}{\sin^2 y},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x\,\frac{\cos y}{\cos 2y-1}=-x\,\frac{\cos y}{\sin^2 y}.$$

Таким образом, условие (4) выполнено. Для нахождения функции $F(x,y)$ можно проинтегрировать первое из уравнений (3) по x, при этом считаем y постоянным:

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\int\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\varphi(y).$$

Для нахождения неизвестной функции $\varphi(y)$ подставим это выражение во второе из уравнений (3):

$$\left(\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\varphi(y)\right)'_y=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1},$$

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y)=-\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y},$$

$$\varphi'(y)=-\frac{\cos y}{2\sin^2 y},$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{2\sin y}+\mathrm{const}.$$

Следовательно, можно взять

$$F(x,y)=\frac{x^2+1}{2\sin y}+2x,$$

а общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\frac{x^2+1}{2\sin y}+2x=C.$$