https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

09.04.2021

Задача. *Дана выборка $X_1, ..., X_n$ независимых случайных величин, подчинённых распределению Пуассона с неизвестным параметром $\lambda > 0$. Найти методом максимального правдоподобия точечную оценку λ.*

Решение. Пусть дана конкретная реализация выборки $x_1, ..., x_n$. Суть метода максимального правдоподобия состоит в том, чтобы максимизировать по переменной λ следующую величину:

$$L(\lambda, x_1, ..., x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)...\mathbb{P}(X_n = x_n),$$

Здесь все вероятности зависят от λ. Другими словами, нужно найти такое значение параметра λ, при котором наблюдаемые данные $x_1, ..., x_n$ наиболее вероятны среди всех возможнных значений λ. Величина $L(\lambda, x_1, ..., x_n)$ называется функцией правдоподобия и имеет смысл вероятности наблюдать данную конкретную выборку $x_1, ..., x_n$. Распишем её подробно.

Все случайные величины $X_1, ..., X_n$ имеют распределение Пуассона. Их физический смысл состоит, например, в следующем: каждая такая случайная величина представляет собой число некоторых событий, произошедших за фиксированное время, при условии что эти события появляются независимо друг от друга с некоторой фиксированной средней частотой (оно используется в теории надёжности, в теории массового обслуживания и др.). Распределение Пуассона имеет вид

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Тогда функция правдоподобия записывается следующим образом:

$$L(\lambda, x_1, ..., x_n) = \frac{\lambda^{x_1 + ... + x_n}}{x_1!...x_n!}\, e^{-n\lambda}$$

Далее для краткости будем обозначать

$$L(\lambda) \equiv L(\lambda, x_1, ..., x_n),$$
$$x_1 + ... + x_n = n\overline{x}.$$

Нужно найти точку максимума функции $L(\lambda)$, а поскольку она не поменяется при воздействии любого монотонного преобразования, удобно рассмотреть логарифм функции правдоподобия:

$$\ln L(\lambda) = \ln\left(\frac{\lambda^{n\overline{x}}}{x_1!...x_n!}\, e^{-n\lambda}\right) = n\overline{x}\ln\lambda - n\lambda - \ln(x_1!...x_n!).$$

Такую функцию гораздо проще дифференцировать:

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda) = \frac{n\overline{x}}{\lambda} - n.$$

Для отыскания точки максимума приравниваем производную к нулю:

$$\frac{n\overline{x}}{\lambda} - n = 0.$$

$$\widehat{\lambda} = \overline{x}.$$

Убедимся, что $\widehat{\lambda}$ действительно является точкой максимума, а не минимума. Для этого достаточно вычислить вторую производную в точке $\widehat{\lambda}$:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln L(\lambda)\bigg|_{\lambda=\widehat{\lambda}} = -\frac{n\overline{x}}{\widehat{\lambda}^2} < 0.$$

Значит, $\widehat{\lambda}$ является точкой максимума функции $\ln L(\lambda)$ и оценкой максимального правдоподобия неизвестного параметра λ пуассоновского распределения. В итоге эта оценка как случайная величина вычисляется по формуле

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$