https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

08.04.2021

Задача. *Найти площадь области комплексной плоскости, ограниченной кривой*

$$\left|\frac{z+2i}{z-3i}\right| = a, \tag{1}$$

где a – фиксированное положительное число, $a \neq 1$.

Решение. Комплексное число z можно рассматривать как пару вещественных чисел: $z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Тогда кривая, задаваемая уравнением (1) на комплексной плоскости – это всё равно что кривая, задаваемая на плоскости двух вещественных координат (x, y) уравнением

$$\left|\frac{x+i(y+2)}{x+i(y-3)}\right| = a. \tag{2}$$

Для модуля комплексного числа справедливы равенства:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \qquad |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, уравнение (2) переходит в следующее:

$$\frac{x^2+(y+2)^2}{x^2+(y-3)^2} = a^2.$$

Домножаем на знаменатель, переносим всё в одну часть и раскрываем скобки:

$$x^2(1-a^2) + y^2(1-a^2) + 2y(2+3a^2) + 4 - 9a^2 = 0.$$

Так как по условию $a > 0,\ a \neq 1$, то можем разделить на $(1-a^2)$:

$$x^2 + y^2 + 2y\frac{2+3a^2}{1-a^2} + \frac{4-9a^2}{1-a^2} = 0.$$

$$x^2 + \left(y + \frac{2+3a^2}{1-a^2}\right)^2 - \left(\frac{2+3a^2}{1-a^2}\right) + \frac{4-9a^2}{1-a^2} = 0.$$

$$x^2 + \left(y + \frac{2+3a^2}{1-a^2}\right)^2 = \frac{25a^2}{(1-a^2)^2}.$$

Получили уравнение окружности радиуса R, где

$$R^2 = \frac{25a^2}{(1-a^2)^2}.$$

Искомая площадь круга S равна πR^2, то есть

$$S = \pi\,\frac{25a^2}{(1-a^2)^2}.$$