04.04.2021

Задача. *Найти область сходимости вещественного степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n+2}. \tag{1}$$

Решение. По теореме Коши–Адамара любой степенной ряд вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

где a_m – вещественные числа, сходится при любых x, принадлежащих интервалу $(-R, R)$, и расходится при всех x, что $|x| > R$. Радиус сходимости R можно найти из формулы

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|}. \tag{2}$$

Здесь $\overline{\lim}$ обозначает верхний предел, то есть максимальный предел любой вложенной подпоследовательности.

Так как в исходный степенной ряд входят только чётные степени переменной x, то $a_m = 0$ для всех нечётных m, а для чётных можно записать

$$a_{2n} = \frac{3^n}{n+2}.$$

Тогда в общем виде последовательность $\{a_m\}$ определяется следующим образом:

$$a_m = \begin{cases} 0, & m = 2n-1, \\ \dfrac{3^{m/2}}{\frac{m}{2}+2}, & m = 2n. \end{cases}$$

Отсюда видно, что её можно разбить на две подпоследовательности: первая состоит только из нулей, а предел второй неотрицателен (т. к. все её элементы положительны), поэтому верхним пределом в формуле (2) является следующее число:

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{3^{m/2}}{\frac{m}{2}+2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{m}{2}+2\right)^{1/m}} = \sqrt{3}.$$

Здесь мы воспользовались тем фактом (который следует отдельно доказать!), что

$$\lim_{m\to\infty} (bm+c)^{1/m} = 1$$

для любых положительных чисел b, c. Таким образом, из формулы (2) получаем, что

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как в теореме Коши–Адамара ничего не утверждается о сходимости степенного ряда на границах интервала $(-R, R)$, этот вопрос разберём отдельно. Подставим в (1) значение $x = 1/\sqrt{3}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\,(1/\sqrt{3})^{2n}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n\,(1/3)^n}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \infty.$$

Получили гармонический числовой ряд, то есть ряд вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

который, как известно, расходится. Случай $x = -1/\sqrt{3}$ рассматривается точно так же. Итоговый ответ: областью сходимости ряда (1) является интервал без граничных точек

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$