https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

23.04.2021

Задача. *Исследовать на дифференцируемость функцию комплексной переменной z:*

$$f(z) \equiv f(x+iy) = x + iy^2.$$

Решение. Напомним утверждение из ТФКП: функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и в этой точке выполняются *условия Коши–Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial u} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

В нашей задаче $u(x,y) = x, v(x,y) = y^2$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Дифференцируемость функций u, v очевидна. Условия Коши–Римана (1) выполняются только для тех точек, для которых $y = 1/2$. Таким образом, функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках вида $z = x + i/2,\ \ x \in \mathbb{R}$, и только в них.