

Задача. Вероятность того, что книга лежит в шкафу, равна p . Если книга в шкафу, то она может с равной вероятностью лежать в одном из 4 ящиков. Был наугад открыт один из ящиков, и книги в нём не оказалось. Какова теперь вероятность, что книга лежит в шкафу?

Решение. Обозначим события: A – книга не лежит в выбранном ящике; B – книга лежит в шкафу. Нужно вычислить $\mathbb{P}(B|A)$. Используем формулу Байеса:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}. \quad (1)$$

По условию $\mathbb{P}(B) = p$. Если книга в шкафу, то она лежит с равной вероятностью в одном из четырёх ящиков, то есть $\mathbb{P}(A|B) = 3/4$. Вычислим $\mathbb{P}(A)$ по формуле полной вероятности (зная, что B и \bar{B} – это полная группа событий):

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\bar{B}) \mathbb{P}(A|\bar{B}) = \frac{3}{4}p + 1 - p = 1 - \frac{p}{4}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$ и $\mathbb{P}(A|\bar{B}) = 1$. Подставляем все вычисленные значения в формулу (1):

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\frac{3}{4}p}{1 - \frac{p}{4}} = \frac{3p}{4 - p}.$$