https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

19.04.2021

Задача. *Найти общее решение дифференциального уравнения*

$$x^2y''(x) + xy'(x) + 4y(x) = 10x.$$

Решение. Это уравнение является частным случаем дифференциального уравнения Эйлера. Его можно свести к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены

$$x = x(t) = e^t.$$

Теперь считаем t независимой переменной; для простоты можно ввести функцию

$$v(t) = y(e^t) = y(x).$$

Тогда её производные выписываются следующим образом:

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt}y(e^t) = e^t y'(e^t) = xy'(x),$$
$$\ddot{v}(t) = \frac{d}{dt}v'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^t y'(e^t)\right) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t) = x^2y''(x) + xy'(x) = x^2y''(x) + \dot{v}(t),$$
$$\Rightarrow x^2y''(x) = \ddot{v}(t) - \dot{v}(t).$$

Подставляем эти выражения в исходное уравнение:

$$\ddot{v}(t) + 4v(t) = 10e^t. \tag{1}$$

Получилось линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Сначала получим решение однородного уравнения

$$\ddot{v}(t) + 4v(t) = 0.$$

Его общее решение:

$$v_0(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \tag{2}$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения (1) представляется как сумма его частного решения и общего решения однородного уравнения (2). Частное решение уравнения (1) естественно искать в виде ae^t, где a – константа, подлежащая определению. Подставив в уравнение, получим, что $a = 2$. Таким образом,

$$v(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t.$$

Возвращаемся к замене. Отметим, что при замене $x = e^t$ формально x может принимать только положительные значения, но если положить $t = \ln|x|$, то следующая формула останется справедливой для всех ненулевых x:

$$y(x) = C_1 \cos\left(2\ln|x|\right) + C_2 \sin\left(2\ln|x|\right) + 2x.$$