https://www.facebook.com/profile.php?id=10000654912
https://github.com/lovgager/latex

---

12.04.2021

**Задача.** *Аппроксимировать вторую производную* $y''(0)$ *функции* $y(x)$ *в точке* $x = 0$ *разностным отношением, используя значения* $y(x)$ *в узлах трёхточечного шаблона* $x_1 = -h/4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3h/4$. *Вычислить значение разностного отошения (приближённое значение* $y''(0)$*) для* $y(x) = x^3$ *при* $h = 0.04$.

**Решение.** Искомое разностное отношение имеет вид:

$$y''(0) \approx ay(x_1) + by(x_2) + cy(x_3) \equiv ay(-h/4) + by(0) + cy(3h/4), \tag{1}$$

где $a, b, c$ – неизвестные числа, зависящие от $h$. В правой части этой формулы разложим все $y$ в ряд Тейлора в окрестности точки 0, предполагая, что производные всех необходимых порядков в точке 0 существуют:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv y(0) + y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2}\,x^2 + O(x^3),$$

$$y(-h/4) = y(0) + y'(0)\,\frac{h}{4} + y''(0)\,\frac{h^2}{32} + O(h^3),$$

$$y(3h/4) = y(0) + y'(0)\,\frac{3h}{4} + y''(0)\,\frac{9h^2}{32} + O(h^3).$$

Подставляем в формулу (1):

$$y''(0) \approx a\left(y(0) + y'(0)\,\frac{h}{4} + y''(0)\,\frac{h^2}{32}\right) + by(0) + c\left(y(0) + y'(0)\,\frac{3h}{4} + y''(0)\,\frac{9h^2}{32}\right) + O(h^3).$$

Мы можем обеспечить третий порядок аппроксимации по $h$, если приравняем к нулю коэффициенты при $y(0)$ и $y'(0)$, а коэффициент при $y''(0)$ – к единице:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ \dfrac{ah}{4} + \dfrac{3ch}{4} = 0, \\ \dfrac{ah^2}{32} + \dfrac{9ch^2}{32} = 1. \end{cases}$$

Решение системы:

$$a = -\frac{16}{h^2}, \quad b = \frac{32}{3h^2}, \quad c = \frac{16}{3h^2}.$$

Таким образом, искомая формула имеет вид:

$$y''(0) \approx \frac{-48y(-h/4) + 32y(0) + 16y(3h/4)}{3h^2}.$$

Более точно, как мы показали:

$$y''(0) = \frac{-48y(-h/4) + 32y(0) + 16y(3h/4)}{3h^2} + O(h^3).$$

Пусть теперь $y(x) = x^3,\ \ h = 0.04$. Тогда из этой формулы получаем

$$y''(0) \approx \frac{-48(-0.01)^3 + 32 \cdot 0 + 16(0.03)^3}{3(0.01)^3} = 0.016.$$

Точный результат равен $y''(0) = 0$, поэтому значение 0.016 можно считать неплохим приближением.