

# Robust Sliding Mode Control for Robot Manipulators

## • [40 points] Theoretical Analysis

Проведём анализ системы и выведем уравнения для управления роботом в робастном режиме.

Система имеет вид

$$M(q)\ddot{q} + (C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} + F_c(q)) = \tau, \text{ где}$$

$M, C$  и  $g$  имеют некоторую неизвестность

$D$  и  $F_c$  — неизвестные помехи

Запишем систему в следующем виде:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + g + \delta(\dot{q}) \cdot \tau, \text{ где } \delta(\dot{q}) \text{ — скачкообразные помехи}$$

Выберем следующее управление:

$$u = \hat{M}V + \hat{C}\dot{q} + \hat{g}, \text{ тогда}$$

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + g + \delta = \hat{M}V + \hat{C}\dot{q} + \hat{g}$$

$$M\ddot{q} = \tilde{C}\dot{q} + \tilde{g} - \delta + \hat{M}V, \text{ где } \tilde{C} = \hat{C} - C$$

— скачкообразные параметры

Присоединим уравнение к виду:  $\ddot{q} = \tilde{g} - \delta$

$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + B(q)u$ , тогда:

$$f(q, \dot{q}) = M^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{g} - \delta), B(q) = M^{-1}\hat{M}$$

Введём скользящую поверхность:

$$S = \left(\frac{1}{\sigma} + 1\right)^{n-1} \ddot{q} + \lambda \dot{q}$$

Примем  $V$  за  $V = V_n + V_s$ , где  $V_n = \ddot{q}d + \lambda \dot{q}$  — номинальное управление

$V_s$  — скользящее управление

Удовлетворим условие выхода системы за конечное время (sliding control)

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \|S\| \leq -\eta \|S\| \quad \left| \begin{array}{l} \dot{S} = \ddot{\tilde{q}} + \lambda \dot{\tilde{q}} = (\ddot{q}d - \ddot{q}) + \lambda \dot{\tilde{q}} = \ddot{q}d + \lambda \dot{\tilde{q}} - \ddot{q} = V_n - \ddot{q} = B(V_n + V_s) - \ddot{q} = \\ S^T \dot{S} \leq -\eta \|S\| \quad \quad \quad -BV_s = (I-B)V_n - \ddot{q} - BV_s = w - BV_s, \text{ где } w = (I-B)V_n - \ddot{q} \end{array} \right.$$

Получим:  $S^T w - S^T B V_s \leq -\eta \|S\|$

Согласно неравенству Коши:  $\|S\| \cdot \|w\| - S^T B V_s \leq -\eta \|S\|$

Пусть  $V_s = \frac{k}{\sigma_{\max}} M^{-1} \frac{S}{\|S\|} = \rho \frac{S}{\|S\|}$ , где  $\rho = \frac{k}{\sigma_{\max}} M^{-1}$

$\|S\| \cdot \|w\| - \frac{k}{\sigma_{\max}} S^T M^{-1} S \leq -\eta \|S\|$

$\|S\| \cdot \|w\| - k \|S\| \leq -\eta \|S\|$

Получим  $k > \|w\| + \eta$  — ограничимся на  $k$  —  $k$

Результативный контроллер имеет вид:

$$\begin{cases} V = \hat{M}V + \hat{C}\dot{q} + \hat{g} \\ V = \ddot{q}d + \lambda \dot{\tilde{q}} + V_s \\ V_s = \rho \frac{S}{\|S\|}, \rho = \frac{k M^{-1}}{\sigma_{\max}}, k > \|w\| + \eta \\ S = \ddot{q} + \lambda \dot{\tilde{q}} \end{cases}$$

Получили уравнения для нашего контроллера:

$$\begin{cases} u = \hat{M}V + \hat{C}\dot{q} + \hat{g} \\ V = V_n + V_s = \ddot{q}_d + \lambda\ddot{q} + V_s \\ V_s = \rho \frac{s}{\|s\|}, \text{ где } \rho = \frac{k\hat{M}^{-1}}{\sigma_{max}}, k > \|w\| + \eta \\ s = \dot{q} + \lambda\ddot{q} \end{cases}$$

- **[40 points] Implementation and Performance**

1) Modify the UR5 robot model to include:

Была изменена модель манипулятора UR5 путём добавления в неё демпфирования в шарниры, колумбовского трения и дополнительной массы к эндефектору, где ни помехи в виде демпфирования и трения, ни дополнительная масса неизвестны.

Из-за добавления подобных эффектов, приблизив модель к реальному манипулятору, параметры  $M, C, g$  стали иметь некоторую неопределённость.

2) Implement both controllers:

a) Basic inverse dynamics controller

Применим стандартное инверсное управление с ПД-регулятором, который имеет коэффициенты  $K_p = 100$ ,  $K_d = 20$ . Посмотрим на графиках, как будет отрабатывать манипулятор неопределённость в параметрах. Также можно обратиться к видео SID.mp4 (Simple Inverse Dynamic).

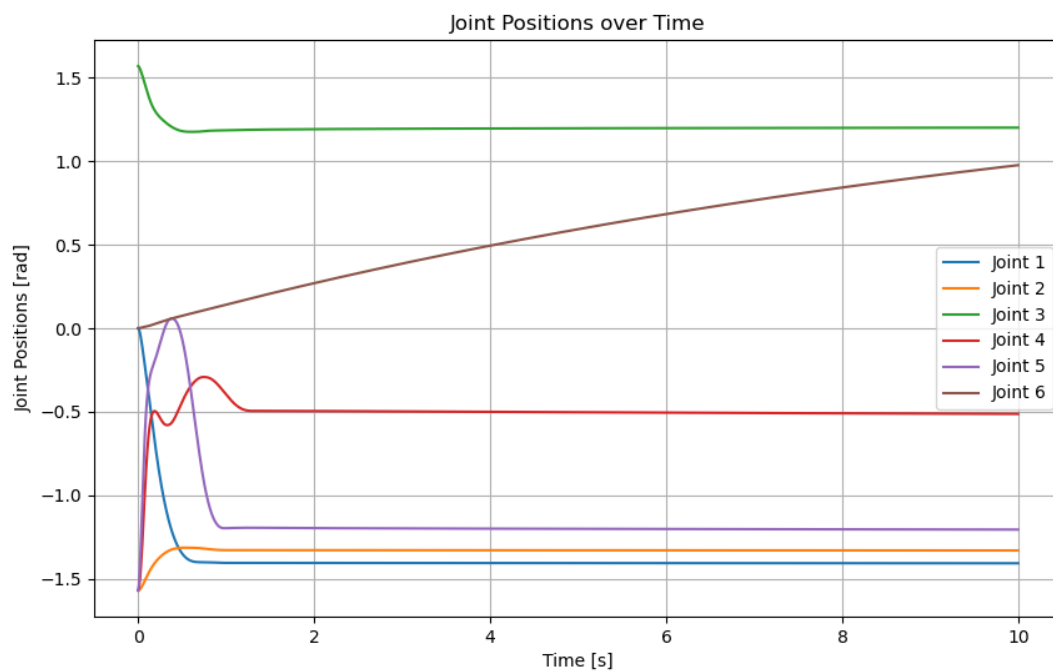


Рисунок 1 – График положений шарниров

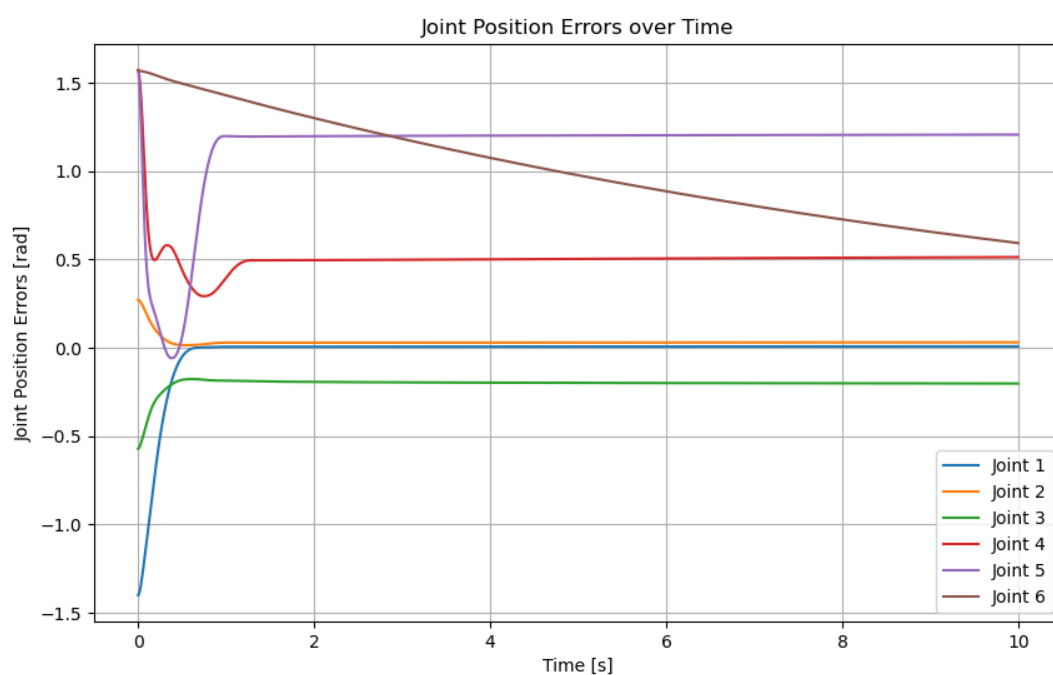


Рисунок 2 – График ошибок положений шарниров

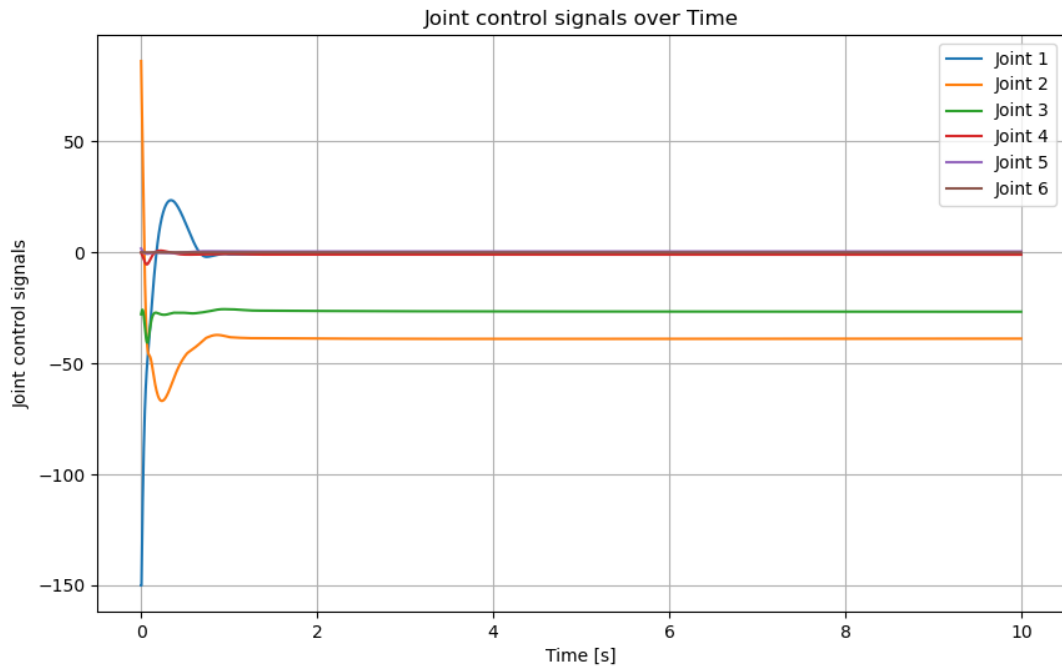


Рисунок 3 – График сигналов управления шарнирами

Как видно из графиков (особенно хорошо видно по графику ошибок), манипулятор не приходит в заданную позицию из-за наличия неопределённостей в параметрах.

#### б) Designed sliding mode controller

Применим к манипулятору управление в скользящем режиме. Посмотрим на графиках, как будет отрабатывать манипулятор неопределённость в параметрах. Также можно обратиться к видео `robust_with_chattering.mp4`.

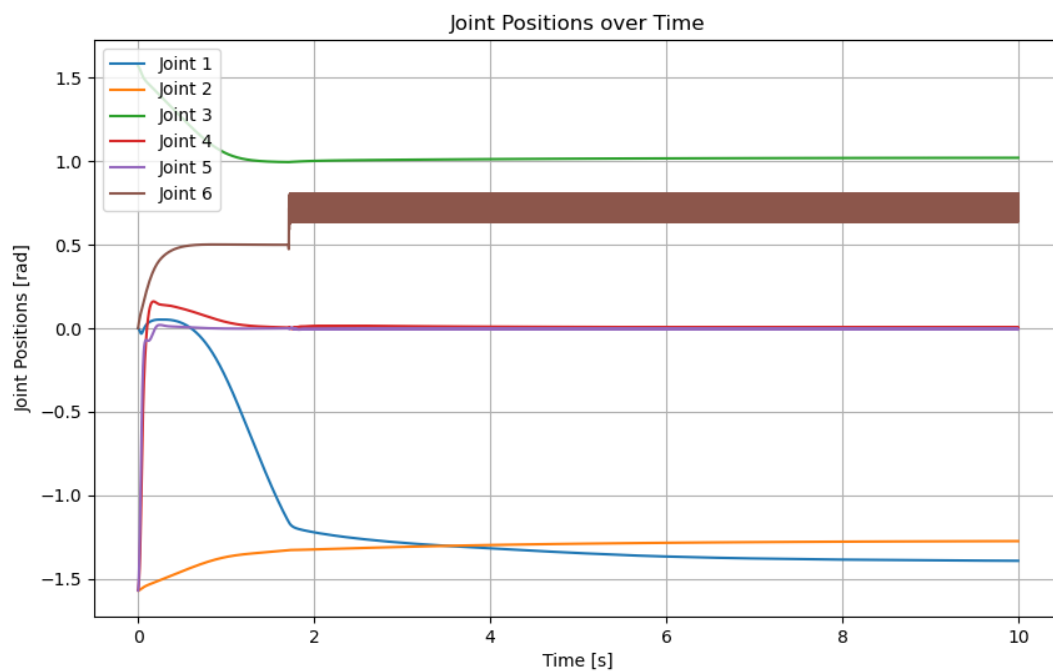


Рисунок 4 - График положений шарниров

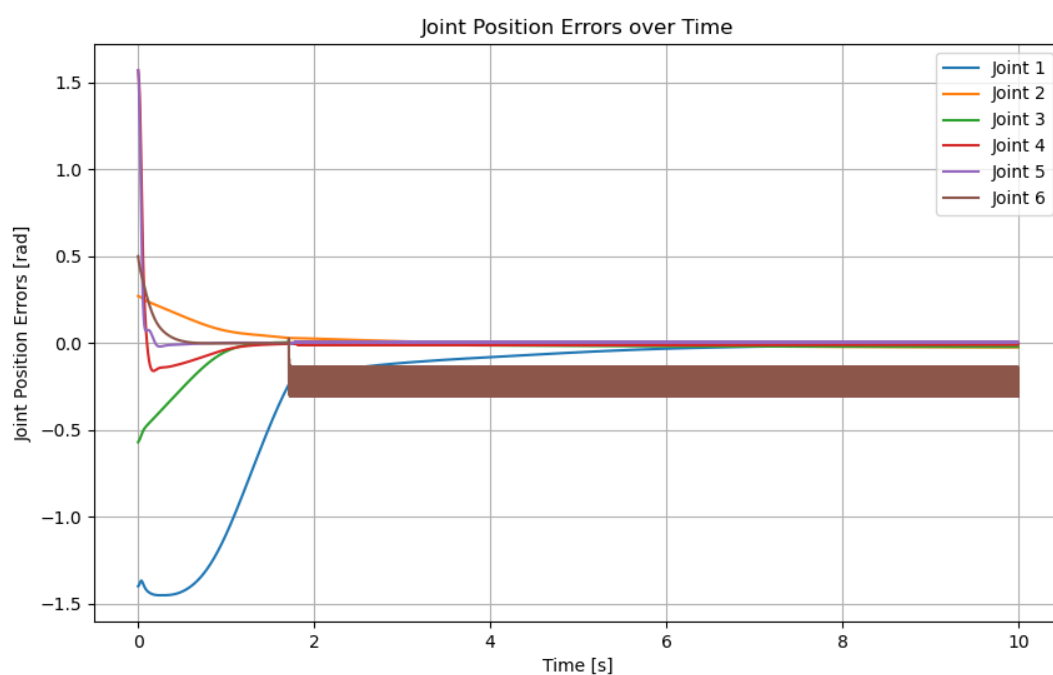


Рисунок 5 - График ошибок положений шарниров

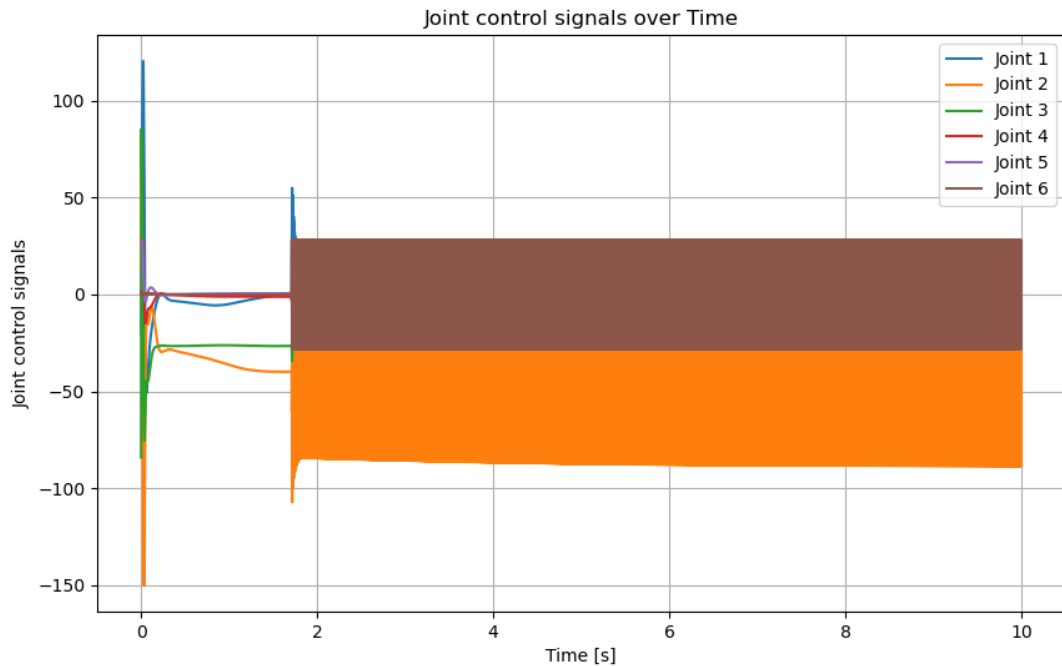


Рисунок 6 - График сигналов управления шарнирами

Как видно из графиков, манипулятор приходит в заданную позицию, но наблюдается сильный эффект Чаттеринга, заключающийся в быстром переключении знака сигналов управления. Такой эффект на реальных установках может сжечь двигатели за считанные секунды, поэтому его эффект нужно устранить.

- **[20 points] Boundary Layer Implementation**

Для устранения эффекта Чаттеринга можно использовать следующую модификацию:

$$V_s = \begin{cases} \rho \frac{s}{\|s\|} & \text{при } \|s\| > \varepsilon \\ \rho \frac{s}{\varepsilon} & \text{при } \|s\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  — некоторый допуск, внутри которого должен оставаться сигнал управления.

Применим к манипулятору управление в скользящем режиме с устранением эффекта Чаттеринга. Посмотрим на графиках, как будет отрабатывать манипулятор неопределённость в параметрах и сглаживать

эффект Чаттеринга. Также можно обратиться к видео `robust_without_chattering.mp4`.

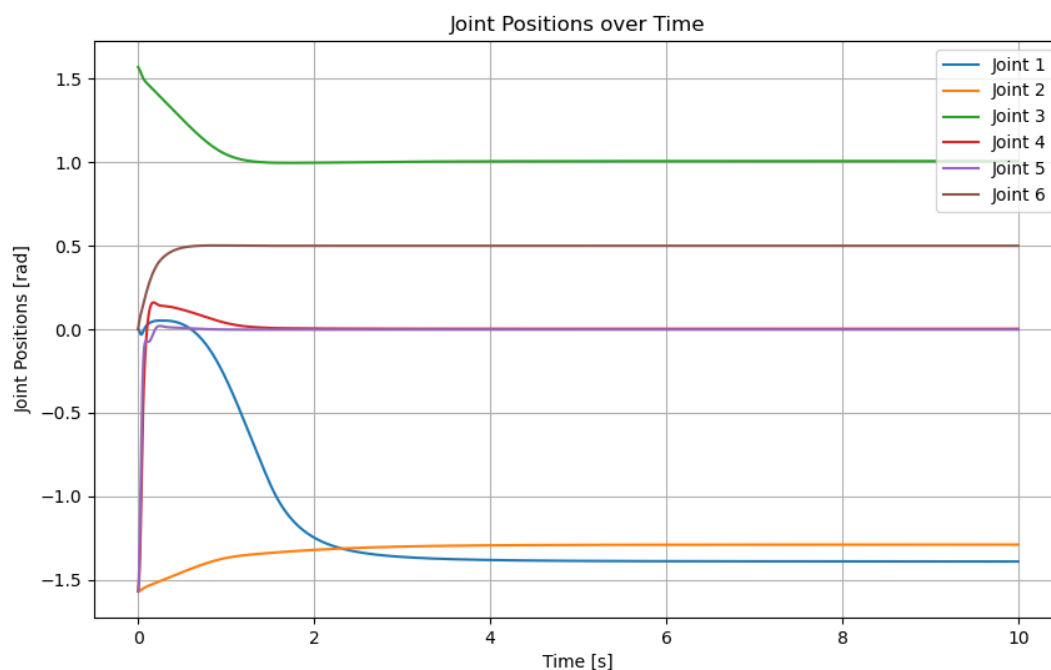


Рисунок 7 - График положений шарниров

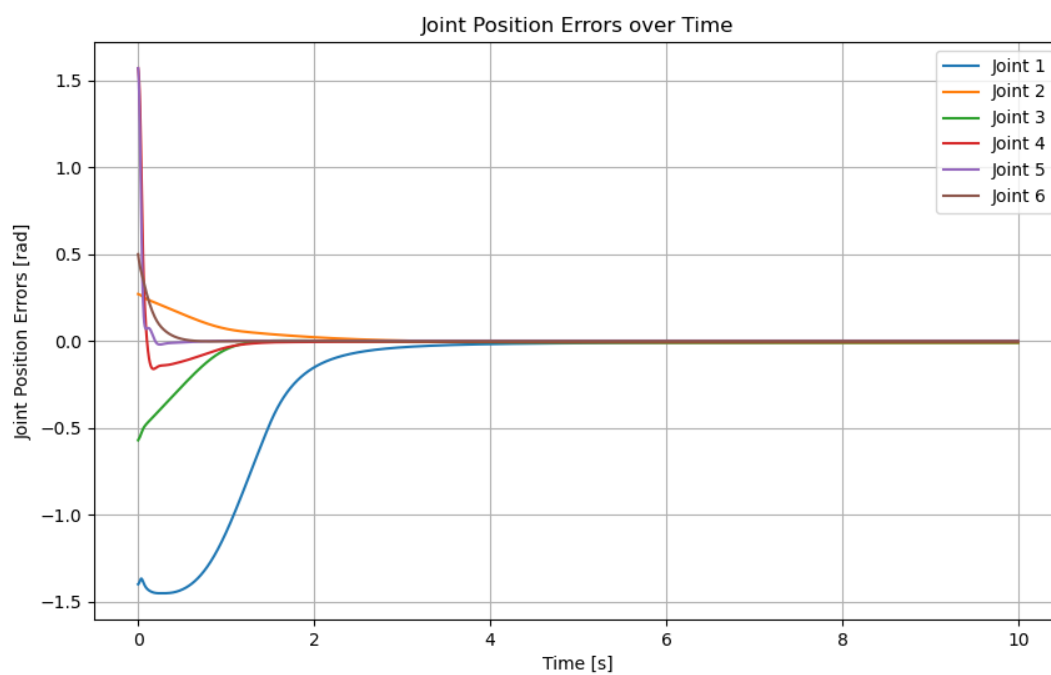


Рисунок 8 - График ошибок положений шарниров

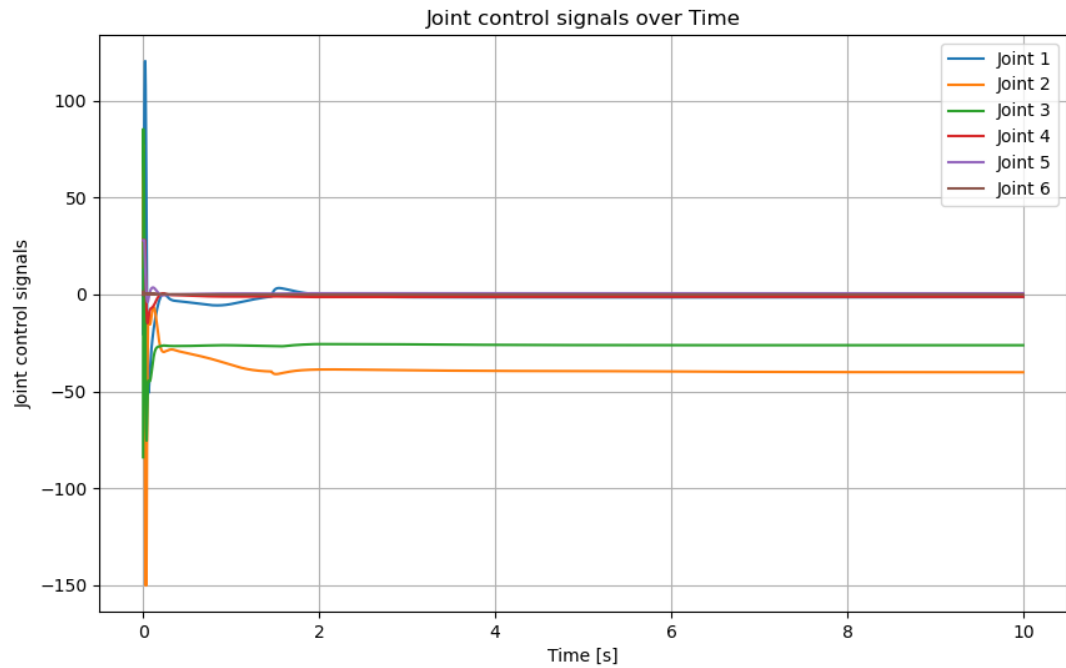


Рисунок 9 - График сигналов управления шарнирами

Как видно из графиков, манипулятор приходит в заданную позицию и сглаживает эффект Чаттеринга. Управление с данной модификацией можно применять без страха на реальных установках.