一元函数微分学

导数和微分的概念

导数的概念

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$.

函数的变化率问题，如果极限不存在，就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导. 在 $x\in I$ 内，构成了一个新的函数，这个函数就叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

微分的概念

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy，即

$$dy=A\Delta x\,.$$

导数和微分的关系

微分是一种方法，就是取对象的微小变量或微元来处理数学问题，而导数是微元式的极限，所以数学上分别用符号 Δx 和 dx 区分两者，导数的定义式很好的说明了两者的关系

表达式 $\dfrac{df}{dx}$,就是对函数 $f(x)$ 在 x 处取微元 Δx 和 Δf ，来计算斜率，而当 Δx 趋近于 0 时，$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 的极限就定义为导数.

导数的几何意义

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

其中 α 是切线的倾角.

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

过切点 $M(x_0, y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y = f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果 $f'(x_0) \neq 0$，法线的斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)\,.$$

函数可导性与连续性的关系

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

其中 α 为当 $\Delta x \to 0$ 的无穷小. 上式两边同乘 Δx，得

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x\,.$$

由此可见，当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y \to 0$. 这就是说，函数 $y = f(x)$ 在点 x 处时连续的. 所以，如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导，那么函数在该点必连续.

另一方面一个函数在某点连续却不一定在该点可导.

导数的求导法则

四则运算

定理1 如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

（3）$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq 0)$

反函数的求导法则

定理2 如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x=f(y),y\in I_y\}$ 内也可导，且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{ 或 }\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\ .$$

复合函数的求导法则

定理3 如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)\text{ 或 }\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

基本求导法则与导数公式

1.常数和基本初等函数的导数公式

1	$(C)'=0$
2	$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$
3	$(\sin x)'=\cos x$
4	$(\cos x)'=-\sin x$
5	$(\tan x)'=\sec^2 x$

6	$(\cot x)' = -\csc^2 x$
7	$(\sec x)' = \sec x \tan x$
8	$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
9	$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$
10	$(e^x)' = e^x$
11	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1)$
12	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
13	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16	$(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 都可导，则

（1）$(u \pm v)' = u' \pm v'$

（2）$(Cu)' = Cu'$ （C 是常数）

（3）$(uv)' = u'v + uv'$

（4）$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

反函数的求导法则以及复合函数的求导法则

微分的运算

函数和、差、积、商的微分法则

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$d(Cu) = Cdu$

$d(uv) = vdu + udv$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

复合函数的微分法则

$y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 都可导，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(u)g'(x)dx\,.$$

由于 $g'(x)dx = du$，所以，复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy = f'(u)du \text{ 或 } dy = y'_u du\,.$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy = f'(u)du$ 保持不变. 这一性质称为微分形式不变性. 这性质表示，当变换自变量时，微分形式 $dy = f'(u)du$ 并不改变.

高阶导数

函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的函数，我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})\,.$$

一般地，$(n-1)$ 阶导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\,.$$

函数 $y = f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成 $f(x)$ 为 n 阶可导

二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\,.$$

隐函数和由参数方程所确定的函数的导数

隐函数的导数

什么是隐函数：当变量 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应，这样的函数称为隐函数.

把一个隐函数化为显函数，叫做隐函数的显化.

隐函数的求导方法：同时在方程两边对 x 求导，方程两边的导数相等，最后化简即可得 $\dfrac{dy}{dx}$

在某些场合，利用所谓对数求导法求导数比用通常的方法简便些. 这种方法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再求出 y 的导数.

由参数方程所确定的函数的导数

研究运动轨迹时，常遇到参数方程

一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定 y 与 x 之间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则，就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

上式也可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

以上就是由参数方程所确定的 x 的函数的导数公式

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 还是二阶可导的，那么又可得到函数的二阶导数公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

微分中值定理

费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)\le f(x_0)\qquad\qquad (\text{或} f(x)\ge f(x_0))$$

那么 $f'(x_0)=0$.

罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\ (a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理(微分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi\ (a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 上可导；

（3）对任一 $x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$,

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi}$$

成立

泰勒公式

泰勒中值定理1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个领域，对于该领域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\,,$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)\,.$$

泰勒中值定理2 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个领域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对任一 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\,,$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

上述公式又称为 $f(x)$ 在 x_0 处（或按 $(x-x_0)$ 的幂展开）的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式称为拉格朗日余项.

当 $n=0$ 时，泰勒公式变成拉格朗日中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \qquad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此，泰勒中值定理 2 是拉格朗日中值定理的推广.

在泰勒中值定理1的泰勒公式中，如果取 $x_0=0$，那么有带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

在泰勒中值定理2的泰勒公式中，如果取 $x_0=0$，那么 ξ 在 0 与 x 之间，因此可以令 $\xi=\theta x$ $(0<\theta<1)$，从而泰勒公式变成较简单的形式，即所谓带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n+1} \ (0<\theta<1).$$

函数的单调性与曲线的凹凸性

函数单调性的判定法

定理1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少；

曲线的凹凸性与拐点

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凹的（或凹弧）；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的（或凸弧）.

定理2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

判定区间 I 上的连续曲线 $y=f(x)$ 的拐点：

（1）求 $f''(x)$；

（2）令 $f''(x)=0$，解出这方程在区间 I 内的实根，并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点；

（3）对于（2）中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0，检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧临近的符号，那么当两侧的符号相反时，点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点，当两侧的符号相同时，点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

函数的极值与最大值最小值

函数的极值及其求法

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心领域 $\dot{U}(x_0)$ 内的任一 x，有

$$f(x) < f(x_0) \qquad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）.

定理1（必要条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$

定理2（第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心领域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

（1）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

（3）若 $x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

定理3（第二充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

最大值与最小值问题

求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值

（1）求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点及不可导点；

（2）计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a)$，$f(b)$；

（3）比较（2）中诸值的大小，其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

洛必达法则

定理1 设

（1）当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

（2）在点 a 的某去心领域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来去定未定式的值的方法称为洛必达法则.

定理2 设

（1）当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

（2）当 $|x|>N$ 时 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在，且 $F'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$