常微分方程

微分方程基本概念

凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解

确定了通解中的任意常数以后，就得到微分方程的特解

例题，验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解

$(x-2y)y' = 2x - y, x^2 - xy + y^2 = C;$

解 在方程 $x^2 - xy + y^2 = C$ 两端对 x 求导，得

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0,$$

即$(x-2y)y' = 2x - y$. 故所给二元方程所确定的函数是微分方程的解

例题， 写出由条件确定的曲线所满足的微分方程

曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q ，且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 设曲线方程为 $y = y(x)$ ，因它在点 $P(x, y)$ 处的切线斜率为 y' ，故该点处法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$.

由条件知 PQ 之中点位于 y 轴上，故点 Q 的坐标是 $(-x,0)$,于是有

$$\frac{y-0}{x-(-x)} = -\frac{1}{y'}$$

即微分方程为 $yy' + 2x = 0$

可分离变量的微分方程

一阶微分方程可写成如下的对称形式：

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

可以两端同时乘 $\frac{dx}{y^2}$，使上述方程变为

$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx,$$

这样，变量 x 与 y 已分离在等式的两端，然后两端积分得

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C,$$

或

$$y = -\frac{1}{x^2 + C},$$

其中 C 是任意常数

能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy，另一端只含 x 的函数和 dx，那么原方程就称为可分离变量的微分方程

例题 求微分方程的通解

$ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$

解 原方程分离变量，得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x - x^2}$，两端积分得

$$ln|y| = \int \frac{dx}{(4-x)x} = \frac{1}{4}\int (\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x})dx = \frac{1}{4}(ln|x| - ln|4-x|) + lnC_1 = \frac{1}{4}ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + lnC_1 .$$

即 $ln|y^4(4-x)| = ln|4C_1x|$，或写成 $y^4(4-x) = \pm 4C_1x$，故原方程的通解为

$$y^4(4-x) = Cx .$$

初值条件下的特解求法

1. 分离变量，两端积分，得到通解.
2. 将初值条件代入通解，即可求得C，化简即为特解.

对于文字应用题

先通过题干文字得到微分方程，然后积分得到通解，最后代入初值，即可得到规律表达式

齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式，那么就称这方程为齐次方程.

即令 $\frac{y}{x} = u$，$y = xu$，$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.代入原始式子。再分离变量，两端积分，最后将 $\frac{y}{x}$ 代入上式中的 u，便可得所给方程的通解。

一阶线性微分方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

叫做一阶线性微分方程，因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程，如果 $Q(x) \equiv 0$，那么方程也称为齐次的；如果 $Q(x) \not\equiv 0$，那么方程称为非齐次的。

我们先把 $Q(x)$ 换成零而写出方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0\,.$$

上述方程叫做对应于非齐次线性方程的齐次线性方程.分离变量，两端积分，得通解

$$ln|y| = -\int P(x)dx + C_1,$$

或

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}\ (C = \pm e^{C_1}),$$

使用常数变易法来求非齐次线性方程的通解.这方法是把上述齐次线性方程的通解中的 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$，即作变换

$$y = ue^{-\int P(x)dx},$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(x)dx} + uP(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

将上面两式代入 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$，化简得

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x), u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两端积分，得

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

再把上式代入 $y = ue^{-\int P(x)dx}$，便得非齐次线性方程的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{P(x)dx}dx + C\right).$$

改写成两式之和

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和

可降阶的高阶微分方程

1、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

两边接连积分 n 次，便得含有 n 个任意常数的通解

2、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p$，方程就变成了 $p' = f(x, p)$. 这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程，设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$.但是 $p = \dfrac{dy}{dx}$，因此又得到一个一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$，对它进行积分，便得通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

3、$y''=f(y,y')$ 型的微分方程

令 $y'=p$，并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数,方程变为 $p\dfrac{dp}{dx}=f(y,p)$,
这是一个关于变量 y,p 的一阶微分方程，设它的通解为 $y'=p=\varphi(y,C_1)$，分离变量并积分，变得通解为

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2\,.$$

线性微分方程解的性质及解的结构定理

对于二阶齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0\,.$$

定理1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程的两个解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是方程的解，其中 C_1,C_2是任意常数.

定理2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\qquad (C_1,C_2\text{ 是任意常数})$$

就是方程的通解

定理3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

的一个特解. $Y(x)$ 是与其对应的齐次方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的通解，则

$$y=Y(x)+y^*(x)$$

是二阶非齐次线性微分方程的通解.

定理4 设非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的右端 $f(x)$ 是两个函数之和，即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)\,,$$

而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

常系数齐次线性微分方程

在二阶齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

中，如果 y',y 的系数 $P(x),Q(x)$ 均为常数，即上式成为

$$y''+py'+qy=0$$

p,q 为常数，那么称上式为二阶常系数齐次线性微分方程. 如果 p,q 不全为常数，则称其为二阶变系数齐次线性微分方程 .

根据上节定理2，要求微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，可以先求出它的两个解 y_1,y_2，如果它们之比不为常数，即 y_1 与 y_2 线性无关，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 就是方程的通解。

令 $y=e^{rx}$, 将其求导，得到

$$y'=re^{rx},y''=r^2e^{rx}$$

代入得

$$(r^2+pr+q)e^{rx}=0$$

由于 $e^{rx}\neq 0$ ，所以

$$r^2+pr+q=0$$

我们把上式称为微分方程的特征方程

微分方程的通解有三种不同的情形

1.特征方程有两个不相等的实根： $r_1\neq r_2$

可知， $y_1=e^{r_1x},y_2=e^{r_2x}$ 是微分方程的两个解，并且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{e^{r_2x}}{e^{r_1x}}=e^{(r_2-r_1)x}$ 不是常数，因此微分方程的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\,,$$

2.特征方程有两个相等的实根：$r_1=r_2$

这时，只得到微分方程的一个解

$$y_1 = e^{r_1 x}.$$

为得到通解，还需求出另一个解 y_2，并且要求 $\frac{y_2}{y_1}$ 不是常数. 设 $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$，即 $y_2 = e^{r_1 x}u(x)$. 下面来求 $u(x)$，将 y_2 求导，代入微分方程得

$$e^{r_1 x}[(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0,$$

约去 $e^{r_1 x}$，并合并同类项，得

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0.$$

由于 r_1 是特征方程的二重根，因此 $r_1^2 + pr_1 + q = 0$, 且 $2r_1 + p = 0$，于是得

$$u'' = 0$$

因为这里只要得到一个不为常数的解，所以不妨选取 $u = x$，由此得到微分方程的另一个解

$$y_2 = xe^{r_1 x}.$$

从而微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

即

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$$

3.特征方程有一对共轭复根： $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i \ (\beta \neq 0)$

先利用欧拉方程 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 改写成

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x i} = e^{ax}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i)} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x i} = e^{ax}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

最终得微分方程的通解为

$$y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微方程的通解的步骤如下

第一步 写出微分方程的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

第二步 求出特征方程的两个根 r_1, r_2 .

第三步 根据特征方程的两个根的不同情形，按照下列表格写出微分方程的通解

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	$y=e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$