多元函数微分学

多元函数的概念和几何意义

平面点集

引入一个直角坐标系后，平面上的点 P 与有序二元实数组 (x, y) 之间就建立了一一对应.即 $R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}$ 就表示坐标平面.

聚点：如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 P 的去心领域内总有 E 中的点，那么称 P 是 E 的聚点。

由聚点的定义可知，点集 E 的聚点 P 本身，可以属于 E，也可以不属于 E.

定义. 设 D 是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f : D \to R$ 为定义在 D 上的二元函数，通常记为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

或

$$z = f(P), P \in D,$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，x 和 y 称为自变量，z 称为因变量.

二元函数的极限

二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0, y_0)$是 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \text{ 或 } f(x, y) \to A((x, y) \to (x_0, y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A \text{ 或 } f(P) \to A(P \to P_0).$$

为了区别与一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限。

所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都无限接近于 A .

多元函数的连续性

定义 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0,y_0)$ 为D 的聚点，且 $P_0 \in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) ,$$

那么称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

定义 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D ，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，那么称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

结论：一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域. 由多元初等函数的连续性, 如果要求它在点 P_0 处的极限, 而该点又在此函数的定义区域内，那么此极限值就是函数在该点的函数值, 即

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0) .$$

基本性质

有界性与最大值最小值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

介值定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值

一致连续性定理 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续.

偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ ，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定（即看做常量），这时它就是 x 的一元函数，这函数对 x 的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一领域内有定义，当 y 固定在 y_0 ，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) ,$$

如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，那么称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, Z_x\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0) .$$

偏导数还可以推广到二元以上的函数. 例如三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} ,$$

其中 (x, y, z) 是函数 $u = f(x, y, z)$ 的定义域的内点. 它们的求法也仍旧是一元函数的微分法问题。

高阶偏导数，即按照对变量求导次序一次求偏导

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等

全微分

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某领域内有定义，如果函数在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) ,$$

其中 A 和 B 不依赖于 Δx 和 Δy 而仅与 x 和 y 有关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，那么称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分，而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记作 dz，即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y .$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分.

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分的条件

定理1（必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\,.$$

定理2（充分条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，那么函数在该点可微分.

习惯上，我们将自变量的增量 Δx 与 Δy 分别记作 dx 与 dy，并分别称为自变量 x 与 y 的微分. 这样，函数 $z=f(x,y)$ 的全微分就可写为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,.$$

通常把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

多元复合函数偏导数的求法

1.一元函数与多元函数复合的情形

定理1 如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}\,.$$

2.多元函数与多元函数复合的情形

定理2 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(x,y)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

3.其他情形

定理3 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$ 在点 y 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

全微分形式不变性 函数 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，则有全微分 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv.$ 无论 u 和 v 是自变量还是中间变量，函数 $z=f(u,v)$ 的全微分形式是一样的，这个性质叫做全微分形式不变性.

隐函数的求导法则

隐函数存在定理1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一领域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一领域内恒能为宜确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

隐函数存在定理2 设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}.$$

隐函数存在定理3 设 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比（Jacobi）式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{]\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_v & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

多元函数极值和条件极值的概念

1. 多元函数的极值及最大值和最小值

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点. 若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0)\subset D$，使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x,y)，都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$ ，点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值点；若对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y)，都有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$，点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值点；极大值与极小值统称为极值. 使得函数取得极值的点称为极值点.

定理1（必要条件） 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则有

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0.$$

定理2（充分条件） 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0) = 0$，$f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A,\ f_{xy} = (x_0, y_0) = B,\ f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC - B^2 > 0$ 时具有极值，且当 $A < 0$ 时具有极大值，当 $A > 0$ 时有极小值；

（2）$AC - B^2 < 0$ 时没有极值；

（3）$AC - B^2 = 0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

2. 条件极值

对自变量有附加条件的极值称为条件极值.

设 $\dfrac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = -\lambda$，必要条件变为

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

引进辅助函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

前两式就是

$$L_x(x_0, y_0) = 0,\ \ L_y(x_0, y_0) = 0.$$

函数 $L(x, y)$ 称为拉格朗日函数，参数 λ 称为拉格朗日乘子.

拉格朗日乘数法

要找函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点，可以先作拉格朗日函数

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

其中 λ 为参数. 求其对 x 与 y 的一阶偏导数，并使之为零，联立方程 $\varphi(x, y) = 0$ ，最终通过方程组解出 x、y 及 λ ，这样得到的 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.