幂级数

幂级数的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 叫做幂级数的系数

定理1（阿贝尔（Abel）定理） 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ （$x \neq 0$）时收敛，那么适合不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛.反之，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散，那么适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 使这幂级数发散.

定理2 如果

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right| = \rho$$

其中a_n、a_{n+1}是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数，那么这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0, \\ +\infty, & \rho = 0, \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

收敛半径$R = +\infty$，收敛域是$(-\infty, +\infty)$

比值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$为正项级数，其中每一项皆为非0的实数或复数，如果

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_n + 1}{U_n} \right| = \rho$$

- 当$\rho < 1$时级数收敛
- 当$\rho > 1$时级数发散
- 当$\rho = 1$时级数可能收敛也可能发散

级数的和函数

性质1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

性质2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(t)dt = \int_0^x [\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n]dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \, (x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径

性质3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \ \ (|x| < R),$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径

求和函数步骤

1）求积分　　2）求和　　3）求倒数

等比数列和等差数列基础知识

等差数列

通项公式 $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

求和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} d, n \in N^*$

等比数列

通项公式 $a_n = a_1 \bullet q^{n-1}$

求和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1)$

在收敛域为$(-1,1)$的情况下，n趋于无穷，$q^n = 0$

函数展开成幂级数

定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一领域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该领域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是在该领域内 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, x \in U(x_0)$$

要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，可以按照下列步骤进行：

第一步 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$，如果在 $x = 0$ 处某阶导数不存在，就停止进行，例如在 $x = 0$ 处，$f(x) = x^{\frac{7}{3}}$ 三阶导数不存在，它就不能展开为 x 的幂级数.

第二步 求出函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值：

$$f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0), \ldots,$$

第三步 写出幂级数

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

并求出收敛半径 R .

第四步 利用余项 $R_n(x)$ 的表达式 $R_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$，考察当 x 在区间 $(-R, R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限是否为零，如果为零，那么函数 $f(x)$ 在区间 $(-R, R)$ 内的幂级数展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (-R < x < R).$$