多元函数积分学

二重积分的概念

1、曲顶柱体的体积

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_n, \eta_i) \Delta\sigma_i \ .$$

2、平面薄片的质量

密度 $\mu(x, y)$ 是变量

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \, .$$

二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \ .$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数，$f(x, y)d\sigma$ 叫做被积表达式，$d\sigma$ 叫做面积元素，x 与 y 叫做积分变量，D 叫做积分区域，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和。

设矩形闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_j 和 Δy_k ,二重积分可以记作

$$\iint_D f(x, y) dx dy \, ,$$

其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中的面积元素 .

由二重积分的定义可知，曲顶柱体的体积是函数 $f(x, y)$ 在底 D 上的二重积分

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma \, ,$$

平面薄片的质量是它的面密度 $\mu(x, y)$ 在薄片所占区域 D 上的二重积分

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma \, ,$$

二重积分的性质

性质1 设 α 与 β 为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint_D g(x,y) d\sigma .$$

性质2 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，那么在 D 上的二重积分等于在各部分闭区域上的二重积分的和. 这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性.

性质3 如果在 D 上，$f(x,y) = 1$，σ 为 D 的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma .$$

高为 1 的平顶柱体的体积在数值上就等于柱体的底面积.

性质4 如果在 D 上，$f(x,y) \le g(x,y)$，那么有

$$\iint_D f(x,y) d\sigma \le \iint_D g(x,y) d\sigma .$$

特殊地，由于

$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)| ,$$

又有

$$\left| \iint_D f(x,y) d\sigma \right| \le \iint_D |f(x,y)| d\sigma .$$

性质5 设 M 和 m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y) d\sigma \le M\sigma .$$

性质6（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma \ .$$

二重积分的计算方法

1.利用直角坐标计算二重积分

根据二重积分的几何意义，二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的值等于以 D 为底，以曲面 $z = f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积

把二重积分化为先对 y 、后对 x 的二次积分的公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \, ,$$

如果积分区域 D 既是 X 型的，可用不等式 $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b$ 表示，又是 Y 型的，可用不等式 $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$ 表示，那么由公式可得

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \ .$$

2.利用极坐标计算二重积分

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，二重积分有时也可以用极坐标来计算

考虑面积元素 $\Delta\sigma$ 在极坐标下的形式

用 r 为常数所表示的圆周族和 θ 为常数所表示的射线族分割区域 D ，那么小区域面积

$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2\Delta\sigma - r^2\Delta\sigma] = \frac{1}{2}[2r\Delta r + (\Delta r)^2]\Delta\theta$$

$$d\sigma = rdrd\theta$$

从直角坐标变换为极坐标时的二重积分的变换公式

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

若区域 $D = \{(r, \theta) \,|\, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$

二重积分化为累次积分

$$\iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

利用重积分求一些几何量

根据几何图形的条件合理选择直角坐标和极坐标的计算方式