一元函数积分学

原函数的概念

定义1 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x \in I$，都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ （或 $f(x)dx$）在区间 I 上的一个原函数.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x) .$$

简单地说就是：连续函数一定有原函数

不定积分和定积分的概念

1.不定积分

定义2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ （或 $f(x)dx$ ）在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)dx$$

其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

由定义和说明可知，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分，即

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

2.定积分

定积分的问题举例

曲边梯形的面积、变速直线运动的路程

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}\,.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i （$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$），作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$，并作出和

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i\,.$$

记 $\lambda = max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$，如果当 $\lambda \to 0$ 时，这和的极限总存在，且与比区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分（简称积分），记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,,$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a, b]$ 叫做积分区间.

定理1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

不定积分的基本公式

基本积分表

1	$\int k dx = kx + C$ （k 是常数）
2	$\int x^m u dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\,(\mu \neq -1)$

3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$
4	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
5	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
9	$\int \frac{dx}{\sin^2 2} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
10	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
11	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
12	$\int e^x dx = e^x + C$
13	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

不定积分和定积分的性质

不定积分的性质

性质1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \,.$$

性质2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \,.$$

定积分的性质

补充规定

1. 当 $b=a$ 时，$\int_a^a f(x)dx=0$；
2. 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

性质1 设 α 与 β 均为常数，则

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

性质2 设 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

性质3 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，那么

$$\int_a^b 1dx=\int_a^b dx=b-a.$$

性质4 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，那么

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0 \qquad (a<b).$$

推论1 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leq g(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx \quad (a<b).$$

推论2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b).$

性质5 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a) \quad (a<b).$$

性质6（定积分中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a \le \xi \le b)\,.$$

这个公式叫做积分中值公式.

牛顿-莱布尼茨公式

微积分基本定理 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

换元积分法

第一类换元法

定理1 设 $f(u)$ 具有原函数，$u = \varphi(x)$ 可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}.$$

第二类换元法

定理2 设 $x = \psi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)},$$

其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x = \psi(t)$ 的反函数.

定积分的换元公式

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

（1） $\varphi(\alpha) = a$， $\varphi(\beta) = b$；

（2）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$ 上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，

则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

以上即为定积分的换元公式

分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数，则两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项，得

$$uv'=(uv)'-u'v\,.$$

对这个等式两边求不定积分，得

$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx\,.$$

以上公式就称为分部积分公式.如果求 $\int uv'dx$ 有困难，而求 $\int u'vdx$ 比较容易时，分部积分公式就可以发挥作用了.

也可简便的写成如下形式

$$\int udv=uv-\int vdu\,.$$

定积分的分部积分法

$$\int_a^b uv'dx=[uv]_a^b-\int_a^b vu'dx \text{ 或 } \int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu\,.$$

变上限积分定义的函数及其导数

定理1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \le x \le b).$$

定理2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定积分在几何学上的应用

由曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \ge 0)$ 及直线 $x = a$，$x = b$ $(a < b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

其中被积表达式 $f(x)dx$ 就是直角坐标下的面积元素，它表示高为 $f(x)$、底为 dx 的一个矩形面积.

极坐标

由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及 射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ 围成一图形（简称为曲边梯形），计算面积

扇形的面积公式 $A = \frac{1}{2}R^2\theta$

曲边扇形的面积可以如下表示

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体.这直线叫做旋转轴.

旋转体可以看做是由连续曲线 $y = f(x)$、直线 $x = a$、$x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a, b]$. 相应于 $[a, b]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径、dx为高的偏圆柱体的体积，即体积元素

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx\,.$$

以 $\pi[f(x)]^2 dx$ 为被积表达式，在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx\,.$$

平行截面面积为已知的立体的体积

如下图，取定轴为 x 轴，并设该立体在过点 $x=a$、$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积. 假设 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积. 假定 $A(x)$ 为已知的 x 的连续函数.这时取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[a, b]$; 立体中相应于 $[a, b]$上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的一薄片的体积，近似于底面积为 $A(x)$ 、高为 dx 的扁柱体的体积，即体积元素

$$dV = A(x)dx.$$

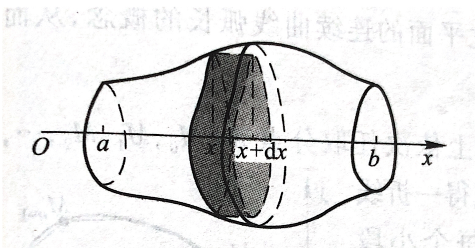

图 6-13

以 $A(x)dx$ 为被积表达式，在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分，便得所求立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)dx\,.$$