函数

一、基本概念

1.函数 - $y = f(x) \quad (x \in D)$.

2.反函数 - $y = f(x) \quad (x \in D)$ 单调（严格）
中学：$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y) \Rightarrow y = \varphi(x)$.
大学：$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$

3.**基本**初等函数
x^a
a^x（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）
$\log_a x$ （$a > 0$ 且 $a \neq 1$）
$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$
$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$, arccot x

4.初等函数 - 由常数及初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子构成的函数称为处等函数

二、函数的初等特性

1.有界性 - 设 $y = f(x)$（$x \in D$），若存在 $M > 0$，对任意的 $x \in D$，总有 $|f(x)| \leq M$，称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

注解

（1）若存在常数 M_1，对任意的 $x \in D$，有 $f(x) \geq M_1$，称 $f(x)$ 在 D 上有下界，若存在常数 M_2，对任意的 $x \in D$，有 $f(x) \leq M_2$，称 $f(x)$ 在 D 上有上界

（2）若 $|f(x)| \leq 2$，则 $f(x) \geq -2$ 且 $f(x) \leq 2$，即若 $f(x)$ 即有下界又有上界，则 $f(x)$ 有界，故 $f(x)$ 有界的充分必要条件是 $f(x)$ 即有下界又有上界

2.单调性 - 设 $y = f(x)$（$x \in D$），若对任意的 x_1，$x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，称 $y = f(x)$ 在 D 上单调增加，若对任意的 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，称 $y = f(x)$ 在 D 上单调减少

3.奇偶性 - 设 $y=f(x)$（$x\in D$），其中 D 关于原点对称，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数

4.周期性 - 设 $y=f(x)$（$x\in D$），若存在 $T>0$，对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $y=f(x)$ 的周期

三、特殊函数

1.符号函数 - 称 $sgnx=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 为符号函数，显然 $|x|=xsgnx$

2.狄利克雷函数 - 称 $D(x)=\begin{cases}1,x\in Q,\\ 0,x\in R\backslash Q\end{cases}$ 为狄利克雷函数

3.取证函数 - 称 $y=[x]$为取整函数，其函数值为 x 左侧最大的整数值，若 x 为整数，则函数值即为 x，如：$[-\sqrt{2}]=-2,[\sqrt{5}]=2,[3]=3$