函数、极限与连续

函数

函数的概念

定义 设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在数 K_1，使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任一 $x \in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上时单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

函数的奇偶性

设函数的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为偶函数，如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为奇函数.

函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D .如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x+l) \in D$, 且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期，通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

反函数与复合函数

设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 按此定义，对每个 $y \in f(D)$，有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有

$$f^{-1}(y) = x\,.$$

复合函数是复合映射的一种特例，概念如下表述：

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

基本初等函数的性质

幂函数：$y = x^{\mu}$（$\mu \in R$ 是常数）

指数函数：$y = a^x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$）

对数函数：$y = \log_a x$（$a > 0$ 且 $a \neq 1$，特别当 $a = e$ 时，记为 $y = \ln x$）

三角函数：如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等

反三角函数：如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等

极限的概念与性质

数列的极限

定义 设 $\{x_n\}$为一数列，如果存在常数 a，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \to a\ (n \to \infty).$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的，习惯上也说 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 不存在 .

收敛数列的性质

定理1（极限的唯一性）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么他的极限唯一.

定理2（收敛数列的有界性）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界 .（有界不一定收敛）

定理3（收敛数列的保号性）如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），那么存在正整数 N，当 $n > N$ 时，都有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$（或 $x_n \leq 0$），且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，那么 $a \geq 0$（或 $a \leq 0$）.

定理4（收敛数列与其子数列间的关系） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

函数的极限

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心领域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε （不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (\text{当 } x \to x_0).$$

定义2 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε （不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \quad (\text{当 } x \to \infty).$$

函数极限的性质

定理1（函数极限的唯一性）如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理2（函数极限的局部有界性）如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \le M$.

定理3（函数极限的局部保号性）如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$ （或 $f(x) < 0$ ）.

定理3' 如果在 x_0 的某去心领域内 $f(x) \ge 0$ （或 $f(x) \le 0$），而且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，那么 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

定理4（函数极限与数列极限的关系）如果极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n \neq x_0\ (n \in N_+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to x_0} f(x)$.

无穷大与无穷小

无穷小

定义1 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ （或 $x \to \infty$）时的无穷小.

定理1 在自变量的同一变化过程 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 是无穷小.

无穷大

定义2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心领域内有定义（或 $|x|$ 大于某一证书时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$ ），对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M,$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$ ）时的无穷大.

定理2

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

无穷小的比较

定义

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么就说 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，那么就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然，等价无穷小时同阶无穷小的特殊情形，即 $c=1$ 的情形.

定理1 β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha)\,.$$

定理2 设 $\alpha\sim\widetilde{\alpha}$，$\beta\sim\widetilde{\beta}$，且 $\lim\dfrac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}.$$

极限的运算法则

定理1 两个无穷小的和是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小

推论2 有限个无穷小的乘积是无穷小

定理3 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

（3）若又有 $B\neq 0$, 则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，那么

$$\lim\,[cf(x)]=c\lim f(x).$$

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，那么

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

定理4 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

那么

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm y_n=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$；

（3）当 $y_n\neq 0$ （$n=1,2,\ldots$）且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理5 如果 $\varphi(x)\geq\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=A$，$\lim\psi(x)=B$，那么 $A\geq B$.

定理6（复合函数的极限运算法则） 设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与 函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心领域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\dot{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

极限存在的两个准则

准则1 如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

（1）从某项起，即 $\exists n_0\in N_+$，当 $n>n_0$ 时，有

$$y_n \le x_n \le z_n;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则1’ 如果

(1) 当 $x \in \dot{U}(x_0, r)$（或 $|x| > M$）时，

$$g(x) \le f(x) \le h(x);$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ （$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A$），$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$（$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = A$），

那么 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$）存在，且等于 A.

以上准则称为夹逼准则.

准则2 单调有界数列必有极限

如果数列不仅有界，并且是单调的，那么这数列的极限必定存在，也就是这数列一定收敛.

准则2’ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_n^-)$ 必定存在

柯西极限存在准则

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m > N$，$n > N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

函数的连续性与间断点

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

如果 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^-)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续，如果 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^+)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右极限.

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续.

函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

通常把间断点分称两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点，不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不想等者称为跳跃间断点.无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

连续函数的运算与初等函数的连续性

定理1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和（差）$f \pm g$、积 $f \cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$（当 $g(x_0) \neq 0$ 时）都在点 x_0 连续.

定理2 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续.

定理3 设函数 $y = f[g(x)]$ 由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$\dot{U}x_0 \subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0).$$

定理4 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 复合而成，$U(x_0) \subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，且 $g(x_0) = u_0$，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续，则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 也连续.

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的

闭区间上连续函数的性质

定理1（有界性与最大值最小值定理）

在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

定理2（零点定理）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a) \cdot f(b) < 0$），则在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi) = 0.$$

定理3（介值定理）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C \ \ (a<\xi<b) .$$

推论 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m, M]$，其中 m 与 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值.

一致连续性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

定理4（一致连续性定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续.