Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет «Информатика и системы управления»

Кафедра «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Отчёт о лабораторной работе № 1

по курсу «Численные методы»

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Студент: К. Лозовска

Группа: ИУ9И-64Б

Преподаватель: А.Б.Домрачева

Москва, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель данной лабораторной работы: сравнить методы численного интегрирования:

1. метод средних прямоугольников;
2. метод трапеций;
3. метод Симпсона.

Постановка задачи:

Дано: Интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Вычислить: значение интеграла $I \approx I^*$.

Тестовый пример: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^2 x^2 \times e^{x-2}dx = 1.7510646581606801$.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Численное интегрирование — это метод, используемый для вычисления приблизительного значения определенного интеграла без использования первообразной функции. Оно включает в себе использование взвешенных значений подынтегральной функции для оценки площади под кривой. Существуют различные методы численного интегрирования, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

Задача численного интегрирования состоит в замене исходной подинтегральной функции $f(x)$, для которой трудно или невозможно записать первообразную в аналитике, некоторой аппроксимирующей функцией $\phi(x)$. Такой функцией обычно является полином.

То есть вычисление интеграла сводится к $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx + R$, где $R = \int_a^b r(x)dx$ – априорная погрешность метода на интервале интегрирования, а $r(x)$ – априорная погрешность метода на отдельном шаге интегрирования.

В ходе данной лабораторной работы рассматриваются следующие методы:

- метод прямоугольников (левых, правых, средних);
- метод трапеций;
- метод Симпсона.

Метод центральных прямоугольников.

Метод прямоугольников — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на полином нулевой степени - отрезком, параллельным оси абсцисс. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота — значением подынтегральной функции в этих узлах.

Для определения значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$ необходимо разбить этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Таким образом получим разбиение данного отрезка точками $x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h,\ i = 1, \dots, n-1, x_n = b$. Значение интеграла на каждом отрезке разбиения вычисляется по формуле: $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right)h$. Применяя формулу ко всем отрезкам разбиения отрезок $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на целом отрезке:

$$I^* = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{j-1}+x_j}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + ih - \frac{h}{2}\right)$$

Метод трапеций.

Метод трапеций — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на полином первой степени - отрезком, параллельным оси абсцисс. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближённом вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольных трапеций, высота которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а основания — значениями подынтегральной функции в этих узлах.

Аналогично предыдущему методу для определения значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$ необходимо разбить этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Таким образом получим разбиение данного отрезка точками $x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h,\ i = 1, \dots, n-1, x_n = b$. Значение интеграла на каждом отрезке разбиения вычисляется по формуле: $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{f(x_{j-1})+f(x_j)}{2} h$. Применяя формулу ко всем отрезкам разбиения отрезок $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на целом отрезке:

$$I^* = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Метод Симпсона.

Метод Симпсона — метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в приближении подынтегральной функции $[a, b]$ на интерполяционный полином второй степени, то есть квадратичной параболой $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, проходящей через точки $(x_{i-1}; f(x_{i-1})), \left(x_{i-0,5}; f\left(x_{i-0,5}\right)\right), (x_i; f(x_i))$. Это нужно для того, чтобы в качестве приближенного значения определенного интеграла $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$ взять $\int_{x_{j-1}}^{x_j} (a_j x^2 + b_j x + c_j)dx$, вычисляемый по формуле Ньютона-Лейбница.

Аналогично предыдущему методу для определения значение интеграла функции на отрезке $[a, b]$ необходимо разбить этот отрезок на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Таким образом получим разбиение данного отрезка точками $x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h,\ i = 1, \dots, n-1, x_n = b$.

Параболу Симпсона можно представить в виде: $a_j x^2 + b_j x + c_j = f\left(x_{i-0,5}\right) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}\left(x - x_{i-0,5}\right) + \frac{f(x_i) - 2f\left(x_{i-0,5}\right) + f(x_{i-1})}{\frac{h^2}{2}}\left(x - x_{i-0,5}\right)^2$.

Значение интеграла на каждом отрезке разбиения вычисляется по формуле: $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x_{j-0,5})dx + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_{j-0,5}\right)dx + \frac{f(x_j) - 2f\left(x_{i-0,5}\right) + f(x_{j-1})}{\frac{h^2}{2}}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left(x - x_{j-0,5}\right)^2 dx = \frac{h}{6}\left(f\left(x_{j-1}\right) + 4f\left(x_{j-0,5}\right) + f\left(x_j\right)\right)$.

Применяя формулу ко всем отрезкам разбиения отрезок $[a, b]$, получим приближенное значение интеграла на целом отрезке:

$$I^* = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-0,5}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В данной программе реализовано несколько методов численного интегрирования, включая метод центральных треугольников, метод трапеций и метод Симпсона.

```
import math

eps = 0.01
```

Также определяется тестовая функция ***testFunc*** и функцию ***richardsonFormula*** для оценки ошибки численного интегрирования с использованием экстраполяции Ричардсона.

```
def testFunc(x):
    #return math.exp(x)
    return x ** 2 * math.exp(x-2)
```

```python
def richardsonFormula(I_h, I_h2, k):
    return (I_h - I_h2) / (2 ** k - 1)
```

```python
def rect(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = sum(f(a + (i - 0.5) * h) for i in range(1, n + 1))
    return h * s
```

```python
def trap(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = sum(f(a + i * h) for i in range(1, n))
    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + s)
```

```python
def Simpson(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s1 = sum(f(a + i * h) for i in range(1, n))
    s2 = sum(f(a + (i - 0.5) * h) for i in range (1, n + 1))
    s3 = sum(f(a + (i - 1) * h) for i in range(1, n + 2))
    s = s1 + 4 * s2 + s3
    return h / 6 * s
```

Основная функция res использует один из методов численного интегрирования, переданных ей в качестве параметра, и применяет экстраполяцию Ричардсона для повышения точности результата, пока не будет достигнут желаемый уровень точности eps. Основная функция выводит количество требуемых итераций, оценочное значение интеграла, оценочную ошибку с использованием экстраполяции Ричардсона и абсолютную ошибку от истинного значения интеграла.

```python
def res(metd, k, a, b, f):
    n = 1
    R = 100
    iter = 0
    I_h = 0
    while not (abs(R) < eps):
        n *= 2
        I_h2 = I_h
        I_h = metd(f, a, b, n)
        R = richardsonFormula(I_h, I_h2, k)
        iter += 1
    print(f' шаги = {iter}')
    print(f' ответ = {I_h}')
    print(f' ответ + уточнение Ричардсона = {I_h + R}')
    #print(f' |I-I*| = {abs(math.e - 1 - I_h - R)}')
    print(f' |I-I*| = {abs(2 - 5 * math.e ** (-3) - I_h - R)}')
```

Код также включает цикл, который запускает основную функцию для тестовой функции с уменьшающимися значениями ***eps***, чтобы сравнить точность различных методов интеграции.

```python

if __name__ == "__main__":
    print("Test Function: exp(x)")
    for i in range(1,10) :
        print("\n--------------------Epsilon = " + str(eps)+ "---------------------")
        print("Метод центральных прямоугольников: ")
        res(rect, 2, -1, 2, testFunc)
        print("Метод трапеций: ")
        res(trap, 2, -1, 2, testFunc)
        print("Метод Симпсона: ")
        res(Simpson, 4, -1, 2, testFunc)
        eps = eps / 10
```

ТЕСТИРОВАНИЕ

Для тестирования полученной программы был выбран интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{2} x^2 \times e^{x-2} dx = 1.7510646581606801$$

В качестве ε для каждого метода были выбраны следующие значения:

$$\varepsilon = 0.1;\ 0.01;\ 0.001$$

Ниже приведена таблица результата полученной программы на указанных выше методах:

Метод	Количество итераций	Значение интеграла без уточнения по Ричардсону	Значение интеграла с уточнением по Ричардсону
$\varepsilon = 0.1$			
Центральных треугольников	3	1.7044216096680151	1.7490300840797441
Трапеций	3	1.8447991923716605	1.7533981903920495
Симпсона	2	1.75339819039205	1.7512915212646218
$\varepsilon = 0.01$			
Центральных треугольников	5	1.7481187977740333	1.751056434524325
Трапеций	5	1.7569581442714985	1.7510740586887186
Симпсона	2	1.75339819039205	1.7510615212646218
$\varepsilon = 0.001$			
Центральных треугольников	6	1.7503278069178607	1.7510641432991365
Трапеций	7	1.7514331389703135	1.7510646949528292
Симпсона	3	1.751214137235897	1.7510645336921534

ВЫВОДЫ

В ходе лабораторного эксперимента были изучены три различных метода численного интегрирования: метод центральных прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Реализация этих методов была разработана с использованием языка программирования Python.

При сравнении результатов вычислений был сделан вывод о том, что параболический метод Симпсона дает наиболее точные результаты по сравнению с другими численными методами. Он требует меньшего количества итераций и дает более точные результаты.

При анализе двух других методов было установлено, что метод центральных прямоугольников более точен, чем метод трапеций. Метод трапеций имеет вдвое большую частоту ошибок, чем метод центральных прямоугольников. Поскольку формулы трапеции и центральных прямоугольников имелют разные знаки погрешности, истинное значение интеграла часто лежит между этими двумя оценками.