

Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία I

Δημήτριος Μποκής

12 Νοεμβρίου 2025

1 Μαθήμα

Υπενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό, μικτό γινόμενο.

1.1 Άσκηση

Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, δείξτε πως το $B = \{u, v, w\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{R}^3 .

Λύση

Προκειμένου το $B = \{u, v, w\}$ να αποτελεί βάση πρέπει τα u, v, w να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί λοιπόν να θέσω πίνακα $[u \ v \ w]$.

$$\text{Έστω λοιπόν πίνακας } \mathbf{B}' = [u \ v \ w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν δείξω πως $\text{rank}(\mathbf{B}') = \dim(\mathbf{B}') = 3$ τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διακρίνουσα.

$$\det(\mathbf{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - (-5)) + 2(-2 - 3) = 6 - 10 = -4$$

Αποτέλεσμα $\text{rank}(\mathbf{B}') \neq 0$ άρα u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\text{span}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ οπότε τα u, v, w αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 και άρα $B = \{u, v, w\}$ βάση.