Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία I

Δημήτριος Μποκής

14 Νοεμβρίου 2025

1 Μαθήμα

Εισαγωγή

Υπενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό γινόμενο.

Ορισμός

Έστω V διανυσματικός χώρος και απεικόνιση $V \times V \to \mathbb{R}$, με $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \mapsto \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle$, τότε η απεικόνιση αυτή θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** αν και μόνο αν ισχύουν:

- $\langle a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u} \rangle = a\langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{u} \rangle + b\langle \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{u} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$
- $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$

Ορισμός

Θα ορίσουμε το **μέτρο/μήκος** ενός διανύσματος $\overrightarrow{v} \in V$ σε διανυσματικό χώρο V ως $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle}$ όπου $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \rangle$ εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός

Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$, με την κανονική βάση, για δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, με $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, και $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots y_n)$, είναι το $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Παρατήρηση

Η παράγωγος μιάς συνάρτησης εσωτερικού γινομένου υπολογίζεται να είναι:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$.

Ορισμός

Θα ορίσουμε **γωνία** θ δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$ ενώς διανυσματικού χώρου V ως, $\cos\theta = \dfrac{< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >}{\|u\|\|v\|}$.

Ορισμός

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να ορίσουμε και το **εξωτερικό γινόμενο**. Έστω $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, διανύσματα, τότε το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ ορίζεται να είναι το:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3)\overrightarrow{e_1} + \cdots + (u_1v_2 - v_1u_2)\overrightarrow{e_3}.$$

1.1 Άσκηση

Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Ερώτημα

Δείξτε πως το $B = \{u, v, w\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Προκειμένου το $B = \{u, v, w\}$ να αποτελεί βάση πρέπει τα u, v, w να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί λοιπόν να θέσω πίνακα $\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$. Έστω λοιπόν πίνακας $\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$. Αν δείξω πως $rank(\mathbf{B}') = dim(\mathbf{B}') = 3$ τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διακρίνουσα, $det(\mathbf{B}') = -4$.

Αποτέλεσμα $det(\mathbf{B}') \neq 0 \implies rank(\mathbf{B}') = 3$ άρα u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $span(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ οπότε τα u, v, w αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και άρα $B = \{u, v, w\}$ βάση.

Ερώτημα

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x = (3, 7, 4)$ με τη βάση $B = \{u, v, w\}$, όπου $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Λύση

Θα γράψω το διάνυσμα x ως $x = (x_1, x_2, x_3)$ όπου $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ και αφού το B αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ αρκεί να λύσω το σύστημα χρησιμοποιώντας τον πίνακα από την προηγούμενη άσκηση $\mathbf{B}'$.

$$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ άρα } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

Ερώτημα

Να προσδιοριστεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση B.

Λύση

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη B είναι ο πίνακας M_B όπου αν x διάνυσμα ως προς τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ τότε το $M_B x$ είναι το διάνυσμα x ως προς τη βάση B. Παρατηρώ πως αν x_B το διάνυσμα γραμμένο ως προς τη βάση B και x_I το διάνυσμα γραμμένο ώς προς την κανονική βάση τότε $\mathbf{B}' x_B = x_I$ και ξέρω πως $M_B x_I = x_B$, άρα $\mathbf{B}' M_B x_I = x_I$ και άρα $M_B = \mathbf{B}'^{-1}$. Ακόμα πιο απλά μπορώ να πω πως αφού $\mathbf{B}' x_B = x_I \iff \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{B}' x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I \iff x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I$ και άρα ο πίνακας M_B που ψάχνω είναι ο $\mathbf{B}'^{-1}$, οι πράξεις παραλήπονται λόγο έλλειψης χώρου.

1.2 Άσκηση

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός με $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$.

Ερώτημα

Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση.

Λύση

Έστω M_T ο πίνακας της T, πρέπει $T(\overrightarrow{x}) = M_T\overrightarrow{x}$.

$$\text{Έστω λοιπόν } M_T\overrightarrow{x} = T(\overrightarrow{x}) \iff \begin{bmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & t_{0,2} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,0} & t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y + z \\ z + x \end{bmatrix}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις παίρνω $t_{0,0}x + t_{0,1}y + t_{0,2}z = x + y$, $t_{1,0}x + t_{1,1}y + t_{1,2}z = y + z$ και $t_{2,0}x + t_{2,1}y + t_{2,2}z = y + z$.

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ερώτημα

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

Ευκολά υπολογίζουμε πως $det(M_T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Άρα ο πίνακας αντριστρέψιμος.

Ερώτημα

Βρείτε $Ker(M_T)$ και $Im(M_T)$.

Λύση

Πυρήνας είναι όλα εκείνα τα διανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση $M_T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ από γραμμική άλγεβρα ξέρω πως αφού ο πίνακας αντριστρέψημος οι γραμμές αλλά και οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άρα πολύ απλά μπορώ να πω πως το μόνο διάνυσμα που ανοίκει στο $Ker(M_T)$ είναι το μηδενικό, $\overrightarrow{0}$. Αντίστοιχα αφού $rank(M_T) = dim(M_T)$ τότε $Im(M_T) = \mathbb{R}^{rank(M_T)}$.

2 Μαθήμα

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Όρια και παράγωγος συναρτήσεων μιας μεταβλητής με διανυσματικές τιμές. Ιδιότητες διανυσματικών συναρτήσεων. Καμπύλες και παραμετροποίηση. Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης. Παράδειγμα στον κύκλο. Αναπαραμετροποίηση καμπύλης και επιτρεπτοί μετασχηματισμοί.

2.1 Άσκηση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $f(t) = (t^2, \sin t, e^{2t})$.

Ερώτημα

Υπολογίστε το $\lim_{t\to 0} f(t)$.

Λύση

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \|x_0 - x\| < \delta \implies \|f(x) - f(0)\| < \epsilon$, από Λογισμό ΙΙΙ ξέρω πως μπορώ να διασπάσω το όριο και να υπολογίσω ξεχωριστά:

$lim_{t\to 0}x^2 = 0$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\epsilon} : \forall \|x\| < \delta \implies x^2 < \epsilon$.

$lim_{t\to 0}sinx = 0$, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon : \forall \|x\| < \delta \implies \sin x < \|x\| < \epsilon$.

$\lim_{t\to 0} e^{2t} = 1$, το $e^{2t} - 1$ θετικό κοντά στο 0, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \dfrac{1}{2}\log(\epsilon + 1) : \forall \|t\| < \delta$ έχουμε:

Αν $t \geq 0$:

$$0 \leq t < \frac{1}{2}\log(\epsilon + 1) \implies 2t < \log(\epsilon + 1) \implies e^{2t} < \epsilon + 1 \implies e^{2t} - 1 < \epsilon.$$

Αν $t < 0$:

$$-\delta < t < 0 \implies -\frac{1}{2}\log(\epsilon + 1) < t < 0 \implies -\log(\epsilon + 1) < 2t < 0 \implies \frac{1}{\epsilon + 1} < e^{2t} < 1 \implies -\frac{\epsilon}{\epsilon + 1} < e^{2t} - 1 < 0.$$

Επομένως,

$$-\epsilon < e^{2t} - 1 < \epsilon.$$

Ερώτημα

Βρείτε τις $f'(t)$ και $f''(t)$.

Λύση

Προκειμένου να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ αρκεί να βρούμε την παράγωγο κάθε συνηστώσας ξεχωριστά.

$$f_1'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x} - x_0 = \lim_{x\to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Οι υπόλοιπες αφήνονται για τον αναγνώστη καθώς είναι τετρημένες αποδίξεις Λογισμού Ι.

3 Καμπύλες και Παραμετροποίηση

Μπορώ να πω ότι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο $M = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / f(x_1, \ldots, x_n) = c\}$, όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$, αυτές είναι οι λεγόμενες ισοσταθμικές καμπύλες καθώς το c είναι σταθερό.

Γενικά θα χρησιμοποιούμε λείες συναρτήσεις π.χ. $f : I \to \mathbb{R}^n$, $t \to (f_1(t), \ldots, f_n(t))$.

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτώ τι είναι μια καμπύλη, είναι να τη δώ σαν τροχιά ενός κινούμενου σημείου P, έτσι αν $\overrightarrow{x}(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου P συναρτήσει του χρόνου t, η καμπύλη είναι το σύνολο $M = \{P(t) \in \mathbb{R}^n / \overrightarrow{0P}(t) = \overrightarrow{x}(t)\}$.

3.0.1 Ορισμός

Έστω διανυσματική απεικόνιση $\overrightarrow{x}(t) : I \to \mathbb{R}^n$ παραμετροποιημένη καμπύλη, τότε το σύνολο $M = \{P(t) \in \mathbb{R}^n / \overrightarrow{0P}(t) = \overrightarrow{x}(t)\}$ θα ονομάζεται **ίχνος** της καμπύλης.

3.0.2 Ορισμός

Μια παραμετροποιημένη καμπύλη με διανυσματική απεικόνιση θέσης $\overrightarrow{x}(t) : I \to \mathbb{R}^n$ θα λέγεται **ομαλή** αν η ¨ταχύτητα' της δεν μηδενίζεται, δηλαδή $\forall t \in I$ ισχύει πως $\overrightarrow{x}'(t) \neq 0$.

3.0.3 Παράδειγμα

Η συνάρτηση $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{f}(t) = (t^3, t^6)$ **δεν** είναι ομαλή παραμετροποίηση της καμπύλης.

3.0.4 Παράδειγμα

Βασικές παραμετροποιήσεις σύνηθων καμπυλών.

- κύκλου ακίνας r, $\overrightarrow{x}(t) = (r\cos t, r\sin t)$.
- έλικας, $\overrightarrow{x}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.
- παραβολής, $\overrightarrow{x}(t) = (t, t^2)$.
- ευθεία, $\overrightarrow{x}(t) = p + tv$, $p, v \in \mathbb{R}^n$.

3.1 Εφαπτόμενο Διάνυσμα

Είπαμε ότι μια καμπύλη μπορώ να τη σκεφτώ σαν τροχιά ενός κινούμενου σημείου, για παράδειγμα η ευθεία $y = x$ έχει παραμετροποίηση $x_1(t) = t, x_2(t) = t$ και $\overrightarrow{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \to (x_1(t), x_2(t))$. Για να προσδιορίσω την ταχύτητα και κατεύθυνση χρειάζομαι την παράγωγο της $\overrightarrow{x}(t)$ όπου $\overrightarrow{x}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t))$.

3.1.1 Ορισμός

Το διάνυσμα $\overrightarrow{x}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0))$ ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** ή **διάνυσμα ταχύτητας** της καμπύλης στο $P(t_0)$. Ο φορέας αυτού του διανύσματος είναι η **εφαπτομένη ευθεία** της καμπύλης στο $P(t_0)$

3.2 Αναπαραμετροποίηση Καμπύλης

Έστω $\sigma : I \to I$, με $\sigma(t^*) = t$ υποθέτοντας ότι $\sigma : \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \neq 0$ γνησίος μονότονη και επί τότε η $\overrightarrow{x} \circ \sigma(t^*) = \overrightarrow{x}$ είναι καμπύλη με το ίδιο ίχνος με την καμπύλη που παραμετροποιείται από την $\overrightarrow{x}(t)$, αλλά η παραμέτρηση τώρα εξαρτάται από την t^*.

Αν εξετάσω τι συμβαίνει με τα εφαπτόμενα διανύσματα ως προς το t και ώς προς το t^*,

$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x} \circ \sigma}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t^*} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\sigma'(t^*)$.

Αν η καμπύλη λοιπόν που ορίζεται από την $\overrightarrow{x}$ είναι ομάλή τότε $\forall t \in I, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t} \neq 0$ και αφού $\sigma(t^*)$ είναι λεία και μονότονη τότε επίσης $\sigma'(t^*) \neq 0$ άρα αν η $\overrightarrow{x}$ ομαλή τότε και η $\overrightarrow{x} \circ \sigma(t^*)$ ομαλή.