

# Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία I

Δημήτριος Μποκής

13 Νοεμβρίου 2025

# 1 Μαθήμα

## Εισαγωγή

Την πενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό γινόμενο.

## Ορισμός

Έστω  $V$  διανυσματικός χώρος και απεικόνιση  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \mapsto \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ , τότε η απεικόνιση αυτή θα λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** αν και μόνο αν ισχύουν:

- $\langle a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, \vec{u} \rangle = a\langle \vec{v}_1, \vec{u} \rangle + b\langle \vec{v}_2, \vec{u} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$

## Ορισμός

Θα ορίσουμε το **μέτρο/μήκος** ενός διανύσματος  $\vec{v} \in V$  σε διανυσματικό χώρο  $V$  ως  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$  όπου  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$  εσωτερικό γινόμενο.

## Ορισμός

Το **σύνηθες εσωτερικό γινόμενο** του διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}^n$ , με την κανονική βάση, για δύο διανύσματα  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , με  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , και  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , είναι το  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

## Παρατήρηση

Η παράγωγος μιάς συνάρτησης εσωτερικού γινομένου υπολογίζεται να είναι:  
 $\frac{d}{dt} \langle u(t), v(t) \rangle = \langle u'(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'(t) \rangle$ .

## Ορισμός

Θα ορίσουμε **γωνία** θ δύο διανυσμάτων  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  ενώς διανυσματικού χώρου  $V$  ως,  $\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$ .

## Ορισμός

Στο διανυσματικό χώρο  $\mathbb{R}^3$  μπορούμε να ορίσουμε και το **εξωτερικό γινόμενο**. Έστω  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  και  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ , διανύσματα, τότε το εξωτερικό γινόμενο των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  ορίζεται να είναι το:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3) \vec{e}_1 + \dots + (u_1 v_2 - v_1 u_2) \vec{e}_3.$$

## 1.1 Άσκηση

Έστω  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (0, 1, -1)$ ,  $w = (2, 5, 1)$  με  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .

### Ερώτημα

Δείξτε πως το  $B = \{u, v, w\}$  αποτελεί βάση του  $\mathbb{R}^3$ .

### Λύση

Προκειμένου το  $B = \{u, v, w\}$  να αποτελεί βάση πρέπει τα  $u, v, w$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αφεί λοιπόν να θέσω πίνακα  $[u \ v \ w]$ . Έστω λοιπόν πίνακας  $\mathbf{B}' = [u \ v \ w]$ . Αν δείξω πως  $rank(\mathbf{B}') = dim(\mathbf{B}') = 3$  τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα  $u, v, w$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διαχρίνουσα,  $det(\mathbf{B}') = -4$ .

Αποτέλεσμα  $det(\mathbf{B}') \neq 0 \implies rank(\mathbf{B}') = 3$  άρα  $u, v, w$  γραμμικά ανεξάρτητα και άρα  $span(u, v, w) = \mathbb{R}^3$  οπότε τα  $u, v, w$  αποτελούν βάση του  $\mathbb{R}^3$  και άρα  $B = \{u, v, w\}$  βάση.

### Ερώτημα

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $x = (3, 7, 4)$  με τη βάση  $B = \{u, v, w\}$ , όπου  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (0, 1, -1)$ ,  $w = (2, 5, 1)$  με  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .

### Λύση

Θα γράψω το διάνυσμα  $x$  ως  $x = (x_1, x_2, x_3)$  όπου  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  και αφού το  $B$  αποτελεί βάση του  $\mathbb{R}^3$  υπάρχουν μοναδικά  $x_1, x_2, x_3$  τέτοια ώστε  $x = x_1u + x_2v + x_3w$  αφεί να λύσω το σύστημα χρησιμοποιώντας τον πίνακα από την προηγούμενη άσκηση  $\mathbf{B}'$ .

$$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ άρα } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

### Ερώτημα

Να προσδιοριστεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση  $B$ .

### Λύση

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη  $B$  είναι ο πίνακας  $M_B$  όπου αν  $x$  διάνυσμα ως προς τη κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$  τότε το  $M_Bx$  είναι το διάνυσμα  $x$  ως προς τη βάση  $B$ . Παρατηρώ πως αν  $x_B$  το διάνυσμα γραμμένο ως προς τη βάση  $B$  και  $x_I$  το διάνυσμα γραμμένο ώς προς την κανονική βάση τότε  $\mathbf{B}'x_B = x_I$  και ξέρω πως  $M_Bx_I = x_B$ , άρα  $\mathbf{B}'M_Bx_I = x_I$  και άρα  $M_B = \mathbf{B}'^{-1}$ . Ακόμα πιο απλά μπορώ να πω πως αφού  $\mathbf{B}'x_B = x_I \iff \mathbf{B}'^{-1}\mathbf{B}'x_B = \mathbf{B}'^{-1}x_I \iff x_B = \mathbf{B}'^{-1}x_I$  και άρα ο πίνακας  $M_B$  που φάγνω είναι ο  $\mathbf{B}'^{-1}$ , οι πράξεις παραλήπονται λόγο έλλειψης χώρου.

## 1.2 Άσκηση

Έστω  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένας γραμμικός μετασχηματισμός με  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ .

### Ερώτημα

Να βρεθεί ο πίνακας της  $T$  ως προς την κανονική βάση.

### Λύση

Έστω  $M_T$  ο πίνακας της  $T$ , πρέπει  $T(\vec{x}) = M_T \vec{x}$ .

$$\text{Έστω λοιπόν } M_T \vec{x} = T(\vec{x}) \iff \begin{bmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & t_{0,2} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,0} & t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{bmatrix}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις παίρνω  $t_{0,0}x + t_{0,1}y + t_{0,2}z = x + y$ ,  $t_{1,0}x + t_{1,1}y + t_{1,2}z = y + z$  και  $t_{2,0}x + t_{2,1}y + t_{2,2}z = z + x$ .

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Ερώτημα

Τιπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος.

### Λύση

$$\text{Ευκολά υπολογίζουμε πως } \det(M_T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2. \text{ Άρα ο πίνακας αντριστρέψιμος.}$$

### Ερώτημα

Βρείτε  $\text{Ker}(M_T)$  και  $\text{Im}(M_T)$ .

### Λύση

Πυρήνας είναι όλα εκείνα τα διανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση  $M_T \vec{x} = \vec{0}$  από γραμμική άλγεβρα ξέρω πως αφού ο πίνακας αντριστρέψιμος οι γραμμές αλλά και οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άρα πολύ απλά μπορώ να πω πως το μόνο διάνυσμα που ανοίκει στο  $\text{Ker}(M_T)$  είναι το μηδενικό,  $\vec{0}$ . Αντίστοιχα αφού  $\text{rank}(M_T) = \dim(M_T)$  τότε  $\text{Im}(M_T) = \mathbb{R}^{\text{rank}(M_T)}$ .

## 2 Μαθήμα

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Όρια και παράγωγος συναρτήσεων μιας μεταβλητής με διανυσματικές τιμές. Ιδιότητες διανυσματικών συναρτήσεων. Καμπύλες και παραμετροποίηση. Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης. Παράδειγμα στον κύκλο. Αναπαραμετροποίηση καμπύλης και επιτρεπτοί μετασχηματισμοί.

### 2.1 Άσκηση

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  με  $f(t) = (t^2, \sin t, e^{2t})$ .

#### Ερώτημα

Τιπολογίστε το  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ .

#### Λύση

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : \|x_0 - x\| < \delta \implies \|f(x) - f(0)\| < \epsilon$ , από Λογισμό III ξέρω πως μπορώ να διασπάσω το όριο και να υπολογίσω ξεχωριστά:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x^2 = 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \sqrt{\epsilon} : \forall \|x\| < \delta \implies x^2 < \epsilon.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin x = 0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon : \forall \|x\| < \delta \implies \sin x < \|x\| < \epsilon.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{2t} = 1, \text{ το } e^{2t} - 1 \text{ θετικό κοντά στο } 0, \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \frac{1}{2} \log(\epsilon + 1) : \forall \|t\| < \delta \text{ έχουμε:}$$

Αν  $t \geq 0$ :

$$0 \leq t < \frac{1}{2} \log(\epsilon + 1) \implies 2t < \log(\epsilon + 1) \implies e^{2t} < \epsilon + 1 \implies e^{2t} - 1 < \epsilon.$$

Αν  $t < 0$ :

$$-\delta < t < 0 \implies -\frac{1}{2} \log(\epsilon + 1) < t < 0 \implies -\log(\epsilon + 1) < 2t < 0 \implies \frac{1}{\epsilon + 1} < e^{2t} < 1 \implies -\frac{\epsilon}{\epsilon + 1} < e^{2t} - 1 < 0.$$

Επομένως,

$$-\epsilon < e^{2t} - 1 < \epsilon.$$

#### Ερώτημα

Βρείτε τις  $f'(t)$  και  $f''(t)$ .

#### Λύση

Προκειμένου να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  αρχεί να βρούμε την παράγωγο κάθε συνηστώσας ξεχωριστά.

$$f'_1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x} - x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Οι υπόλοιπες αφήνονται για τον αναγνώστη καθώς είναι τετρημένες αποδίξεις Λογισμού I.

### 3 Καμπύλες και Παραμετροποίηση

Μπορώ να πω ότι μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^n$  είναι ένα σύνολο  $M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ , όπου  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  λεία συνάρτηση και  $c \in \mathbb{R}$ , αυτές είναι οι λεγόμενες ισοσταθμικές καμπύλες καθώς το  $c$  είναι σταθερό.

Γενικά θα χρησιμοποιούμε λείες συναρτήσεις π.χ.  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t))$ .

Ένας άλλος τρόπος να σκεφτώ τι είναι μια καμπύλη, είναι να τη δώσω σαν τροχιά ενός κινούμενου σημείου  $P$ , έτσι αν  $\vec{x}(t)$  είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου  $P$  συναρτήσει του χρόνου  $t$ , η καμπύλη είναι το σύνολο  $M = \{P(t) \in \mathbb{R}^n / \vec{0}\dot{P}(t) = \vec{x}(t)\}$ .

#### 3.0.1 Ορισμός

Έστω διανυσματική απεικόνιση  $\vec{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  παραμετροποιημένη καμπύλη, τότε το σύνολο  $M = \{\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n / \vec{0}\dot{P}(t) = \vec{x}(t)\}$  θα ονομάζεται **ίχνος** της καμπύλης.

#### 3.0.2 Ορισμός

Μια παραμετροποιημένη καμπύλη με διανυσματική απεικόνιση θέσης  $\vec{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  θα λέγεται **ομαλή** αν η "ταχύτητα" της δεν μηδενίζεται, δηλαδή  $\forall t \in I$  ισχύει πως  $\vec{x}'(t) \neq 0$ .

#### 3.0.3 Παράδειγμα

Η συνάρτηση  $\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{f}(t) = (t^3, t^6)$  **δεν** είναι ομαλή παραμετροποίηση της καμπύλης.

#### 3.0.4 Παράδειγμα

Βασικές παραμετροποιήσεις σύνηθων καμπυλών.

- κύκλου ακίνας  $r$ ,  $\vec{x}(t) = (r \cos t, r \sin t)$ .
- έλικας,  $\vec{x}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ .
- παραβολής,  $\vec{x}(t) = (t, t^2)$ .
- ευθεία,  $\vec{x}(t) = p + tv$ ,  $p, v \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.1 Εφαπτόμενο Διάνυσμα

Είπαμε ότι μια καμπύλη μπορώ να τη σκεφτώ σαν τροχιά ενός κινούμενου σημείου, για παράδειγμα η ευθεία  $y = x$  έχει παραμετροποίηση  $x_1(t) = t, x_2(t) = t$  και  $\vec{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \rightarrow (x_1(t), x_2(t))$ . Για να προσδιορίσω την ταχύτητα και κατεύθυνση χρειάζομαι την παράγωγο της  $\vec{x}(t)$  όπου  $\vec{x}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t))$ .

#### 3.1.1 Ορισμός

Το διάνυσμα  $\vec{x}'(t_0) = (x'_1(t_0), x'_2(t_0))$  ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** ή **διάνυσμα ταχύτητας** της καμπύλης στο  $P(t_0)$ . Ο φορέας αυτού του διανύσματος είναι η **εφαπτομένη ευθεία** της καμπύλης στο  $P(t_0)$ .

### 3.2 Αναπαραμετροποίηση Καμπύλης