

Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία I

Δημήτριος Μποκός

12 Νοεμβρίου 2025

1 Μαθημα

Υπενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό, μικτό γινόμενο.

1.1 Άσκηση

Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, δείξτε πως το $B = \{u, v, w\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{R}^3 .

Λύση

Προκειμένου το $B = \{u, v, w\}$ να αποτελεί βάση πρέπει τα u, v, w να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί λοιπόν να θέσω πίνακα $[u \ v \ w]$. Έστω λοιπόν πίνακας $\mathbf{B}' = [u \ v \ w]$. Αν δείξω πως $\text{rank}(\mathbf{B}') = \dim(\mathbf{B}') = 3$ τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διακρίνουσα.

$$\det(\mathbf{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - (-5)) + 2(-2 - 3) = 6 - 10 = -4.$$

Αποτέλεσμα $\det(\mathbf{B}') \neq 0 \implies \text{rank}(\mathbf{B}') = 3$ άρα u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $\text{span}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ οπότε τα u, v, w αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 και άρα $B = \{u, v, w\}$ βάση.

Ερώτημα

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x = (3, 7, 4)$ με τη βάση $B = \{u, v, w\}$, όπου $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Λύση

Θα γράψω το διάνυσμα x ως $x = (x_1, x_2, x_3)$ όπου $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ και αφού το B αποτελεί βάση του \mathbb{R}^3 υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ αρκεί να λύσω το σύστημα χρησιμοποιώντας τον πίνακα από την προηγούμενη άσκηση \mathbf{B}' .

$$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ λύνοντας το σύστημα παίρνω } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

Επαλήθευση, πρέπει $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ που ισχύει!

Ερώτημα

Να προσδιοριστεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση B .

Λύση

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη B είναι ο πίνακας M_B όπου αν x διάνυσμα ως προς τη κανονική βάση του \mathbb{R}^3 τότε το $M_B x$ είναι το διάνυσμα x ως προς τη βάση B . Παρατηρώ πως αν x_B το διάνυσμα γραμμένο ως προς τη βάση B και x_I το διάνυσμα γραμμένο ως προς την κανονική βάση τότε $\mathbf{B}' x_B = x_I$ και ξέρω πως $M_B x_I = x_B$, άρα $\mathbf{B}' M_B x_I = x_I$ και άρα $M_B = \mathbf{B}'^{-1}$. Ακόμα πιο απλά μπορώ να πω πως αφού $\mathbf{B}' x_B = x_I \iff \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{B}' x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I \iff x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I$ και άρα ο πίνακας M_B που ψάχνω είναι ο \mathbf{B}'^{-1} .

Υπολογίζοντας βρίσκουμε εύκολα $M_B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ οι πράξεις παραλήπονται λόγω έλλειψης χώρου.