Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία I

Δημήτριος Μποκής

12 Νοεμβρίου 2025

1 Μαθήμα

Υπενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό, μικτό γινόμενο.

1.1 Άσκηση

Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, δείξτε πως το $B = \{u, v, w\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Προκειμένου το $B = \{u, v, w\}$ να αποτελεί βάση πρέπει τα u, v, w να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί λοιπόν να θέσω πίνακα $\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$.

Έστω λοιπόν πίνακας $\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Αν δείξω πως $rank(\mathbf{B}') = dim(\mathbf{B}') = 3$ τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διακρίνουσα.

$$det(\mathbf{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - (-5)) + 2(-2 - 3) = 6 - 10 = -4.$$

Αποτέλεσμα $det(\mathbf{B}') \neq 0 \implies rank(\mathbf{B}') = 3$ άρα u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $span(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ οπότε τα u, v, w αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και άρα $B = \{u, v, w\}$ βάση.

1.2 Άσκηση

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x = (3, 7, 4)$ με τη βάση της προηγούμενης άσκησης $B = \{u, v, w\}$, όπου $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Λύση

Θα γράψω το διάνυσμα x ως $x = (x_1, x_2, x_3)$ όπου $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ και αφού το B αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ αρκεί να λύσω το σύστημα χρησιμοποιώντας τον πίνακα από την προηγούμενη άσκηση $\mathbf{B}'$.

$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, λύνοντας το σύστημα παίρνω $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Επαλήθευση, πρέπει $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ που ισχύει!