Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία Ι

Δημήτριος Μποκής

13 Νοεμβρίου 2025

1 Μαθήμα

Υπενθυμίσεις από Γραμμική Άλγεβρα. Βάσεις, γραμμικές απεικονίσεις, εσωτερικό, εξωτερικό, μικτό γινόμενο.

1.1 Άσκηση

Έστω $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Ερώτημα

Δείξτε πως το $B = \{u, v, w\}$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Προκειμένου το $B = \{u, v, w\}$ να αποτελεί βάση πρέπει τα u, v, w να είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, αρκεί λοιπόν να θέσω πίνακα $\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$. Έστω λοιπόν πίνακας $\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$. Αν δείξω πως $rank(\mathbf{B}') = dim(\mathbf{B}') = 3$ τότε όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες και άρα τα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υπολογίζω τη διακρίνουσα, $det(\mathbf{B}') = -4$.

Αποτέλεσμα $det(\mathbf{B}') \neq 0 \implies rank(\mathbf{B}') = 3$ άρα u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα και άρα $span(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ οπότε τα u, v, w αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$ και άρα $B = \{u, v, w\}$ βάση.

Ερώτημα

Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $x = (3, 7, 4)$ με τη βάση $B = \{u, v, w\}$, όπου $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$, $w = (2, 5, 1)$ με $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Λύση

Θα γράψω το διάνυσμα x ως $x = (x_1, x_2, x_3)$ όπου $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ και αφού το B αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ υπάρχουν μοναδικά x_1, x_2, x_3 τέτοια ώστε $x = x_1 u + x_2 v + x_3 w$ αρκεί να λύσω το σύστημα χρησιμοποιώντας τον πίνακα από την προηγούμενη άσκηση $\mathbf{B}'$.

$$\mathbf{B}' \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ άρα } x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

Ερώτημα

Να προσδιοριστεί ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση B.

Λύση

Ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη B είναι ο πίνακας M_B όπου αν x διάνυσμα ως προς τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ τότε το $M_B x$ είναι το διάνυσμα x ως προς τη βάση B. Παρατηρώ πως αν x_B το διάνυσμα γραμμένο ως προς τη βάση B και x_I το διάνυσμα γραμμένο ώς προς την κανονική βάση τότε $\mathbf{B}' x_B = x_I$ και ξέρω πως $M_B x_I = x_B$, άρα $\mathbf{B}' M_B x_I = x_I$ και άρα $M_B = \mathbf{B}'^{-1}$. Ακόμα πιο απλά μπορώ να πω πως αφού $\mathbf{B}' x_B = x_I \iff \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{B}' x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I \iff x_B = \mathbf{B}'^{-1} x_I$ και άρα ο πίνακας M_B που ψάχνω είναι ο $\mathbf{B}'^{-1}$, οι πράξεις παραλήπονται λόγο έλλειψης χώρου.

1.2 Άσκηση

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός με $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$.

Ερώτημα

Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση.

Λύση

Έστω M_T ο πίνακας της T, πρέπει $T(\overrightarrow{x}) = M_T\overrightarrow{x}$.

$$\text{Έστω λοιπόν } M_T\overrightarrow{x} = T(\overrightarrow{x}) \iff \begin{bmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & t_{0,2} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,0} & t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ z+x \end{bmatrix}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις παίρνω $t_{0,0}x + t_{0,1}y + t_{0,2}z = x + y$, $t_{1,0}x + t_{1,1}y + t_{1,2}z = y + z$ και $t_{2,0}x + t_{2,1}y + t_{2,2}z = y + z$.

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ερώτημα

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

Ευκολά υπολογίζουμε πως $det(M_T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Άρα ο πίνακας αντριστρέψιμος.

Ερώτημα

Βρείτε $Ker(M_T)$ και $Im(M_T)$.

Λύση

Πυρίνας είναι όλα εκείνα τα διανύσματα που ικανοποιούν τη σχέση $M_T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ από γραμμική άλγεβρα ξέρω πως αφού ο πίνακας αντριστρέψημος οι γραμμές αλλά και οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άρα πολύ απλά μπορώ να πω πως το μόνο διάνυσμα που ανοίκει στο $Ker(M_T)$ είναι το μηδενικό, $\overrightarrow{0}$. Αντίστοιχα αφού $rank(M_T) = dim(M_T)$ τότε $Im(M_T) = \mathbb{R}^{rank(M_T)}$.

2 Μαθήμα

Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης. Όρια και παράγωγος συναρτήσεων μιας μεταβλητής με διανυσματικές τιμές. Ιδιότητες διανυσματικών συναρτήσεων. Καμπύλες και παραμετροποίηση. Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης. Παράδειγμα στον κύκλο. Αναπαραμετροποίηση καμπύλης και επιτρεπτοί μετασχηματισμοί.