

城市化与经济发展水平关系的三种模型 及其动力学分析

陈彦光

(北京大学城市与环境学院, 北京 100871)

摘要: 目前已知有 2 种函数可以用作描述城市化水平与经济发展水平关系的数学模型, 即对数函数、幂指数函数。基于 Logistic 函数发展了第三种模型。这 3 种函数分别刻画单对数关系、双对数关系和分对数关系。3 种数学模型各有不同的建模条件和适用范围, 反映的动力学特征也不一样。第一种模型背后的动态演化控制变量是人均产值, 第二种模型隐含的控制变量是城市化水平与人均产值的比值, 第三种模型暗示的控制变量是城市化水平。第一和第二两种模型反映的变化是先快后慢, 第三种模型反映的变化则是两头慢中间快。在实际应用中, 可以通过一个区域表现的模型结构揭示系统演化的动力学机制, 借助模型参数的变化规律判断系统的演化方向。

关键词: 城市化水平; 城乡比; 经济发展; 对数模型; 变速生长; Logistic 模型

中图分类号: K928 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0690(2011)01-01-06

经济变化是城市化的重要推动因素之一, 城市化则是经济发展的一个社会后果^[1]。城市化水平和经济发展水平的关系是地理学和经济学等多个学科的共同研究课题。对于西方国家而言, 20 世纪 50 年代前后研究较多^[2]; 到了 80 年代, 关注对象转向发展中国家的城市化与经济发展^[3~5]。目前中国处于快速城市化时期, 工业化迅速进行, 产业结构逐步调整, 研究城市化与经济发展的关系正当其时。实际上, 早在 20 世纪 80 年代, 中国学者就开始探讨城市化与经济发展水平的测度关系^[6]。近年来, 各种角度的研究结果不断见诸报道^[7~10]。

科学的主要功能是解释和预言^[11 12], 而数学建模则是实现科学两大基本功能的重要途径^[12 13]。解释的主要目的是揭示因果关系, 预言(包括预测)则是为了判断未知结果。对于城市化和经济发展而言, 孰因孰果? 抑或互为因果? 这是非常复杂的问题。只有定性、定量结合, 理论探索与实证分析双管齐下, 才能得出真正有意义的研究结论。在诸多研究方法中, 一种简单而便捷的处理方式是寻找合适的测度(如城市人口比重、人均产值), 揭示这两种测度的数值关系, 并用数学方程

将其表示出来。由此得到简明易懂的数学模型。模型是对现实世界的恰到好处的简化^[14]。数学建模追求的不是要素的齐备和结构的逼真, 而是关键的提取和功能的有效。

20 世纪 80 年代前后, 不少学者尝试建立城市化与经济发展的关系模型^[3 6 15 16]。定性看来, 城市化水平(用城市人口比重度量)的增长有一个固定的上限(100%), 而经济发展水平(用人均产值度量)则没有明确的上限。因此, 城市化水平相应于经济发展水平的增长率最终会越来越小。这样, 如果以人均经济产值为自变量, 以城市化水平为因变量, 建立函数关系, 则可得到一条后半段弧形上凸的曲线。能够给出这种曲线的函数有许多, 包括对数函数、幂指数函数、双曲线函数、二类指数函数、Logistic 函数, 如此等等。人们首先选中的 2 种函数是对数函数^[6 17]和幂指数函数^[16 18]。然而, 对于现实中的一些案例, 采用 Logistic 函数描述更为恰当。本文拟系统地总结描述城市化和经济发展水平关系的 3 种数学模型, 揭示其背后隐含的、前所未有的动力学机制, 并阐明不同模型的应用方法、适用范围以及解释和预测的效果。

收稿日期: 2010-06-05 修订日期: 2010-10-07

基金项目: 国家科技部科技基础工作专项重点资助项目(2007FY140800)和国家自然科学基金资助项目(40771061)资助。

作者简介: 陈彦光(1965-), 男, 河南罗山人, 博士, 副教授。从事城市和理论地理学研究。E-mail: chenyg@pku.edu.cn

1 两种基本测度

1.1 城市化水平测度

测度是数学建模和实证分析的基本连接^[19]。明确了测度更便于理解和建立数学模型。为此,首先需要说明几个关于城市化水平和经济发展水平的基本测度。反映一个区域城市化程度的常用测度是城市化水平^[20],即一个区域城镇人口占总人口的比重,即:

$$L = \frac{u}{P} = \frac{u}{u+r} \quad (1)$$

式(1)中, L 表示城市化水平, u 为城镇人口, r 为乡村人口, $P = u + r$ 为总人口。人们习惯的表示方法是在式(1)中乘以 100%, 用百分比 (%) 作为度量方式。

与城市化水平等价的一个替代测度是城乡人口比, 简称城乡比 (URR)^[20]。这是一个无量纲测度, 定义为城镇人口 u 与乡村人口 r 的比率:

$$O = u/r \quad (2)$$

式(2)中, O 表示城乡比。容易证明, 城乡比是与城市化水平等价的测度, 二者之间表现为双曲函数关系。在式(1)的分子和分母中同时除以乡村人口 r , 得到:

$$L = \frac{u/r}{1+u/r} = \frac{O}{1+O} = \frac{1}{1+1/O} \quad (3)$$

显然:

$$\frac{1}{L} = 1 + \frac{1}{O} \quad (4)$$

上式表示一条参数特殊的双曲线。此外, 还可以用城市化水平的变化率反映城市化速度, 绝对速度公式为:

$$S = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_t - L_{t-1} \quad (5)$$

相应地, 相对速度可以表作:

$$s = \frac{\Delta L}{L_{t-1} \Delta t} = \frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} \quad (6)$$

理论上, 对于连续的变量, 城市化速度可以采用微分的形式表达。

1.2 经济发展水平测度

一个区域的经济发展水平, 最简单的测度有 2 种, 一是人均地区生产总值, 即人均 GDP; 二是人均国民收入, 简称人均收入。GDP 与国民收入既有联系, 又有差别。在 GDP 中适当扣除折旧、间接税、转移支付以及政府补贴等, 经过折算, 才能得到

国民收入。基于世界各国的人均 GDP 和人均收入进行统计平均分析, 结果表明, 二者之间表现为一种异速关系:

人均收入 = 常数 × 人均 GDP^{标度指数} (7)
标度指数稍稍大于 1。由于式(7)标度指数非常接近于 1, 人均收入与人均 GDP 之间近似为比例关系。因此, 如果一个区域的城市化水平与人均收入之间满足某种数学方程, 则用人均 GDP 替换人均收入, 方程的函数形式不变。

2 三种数学模型

2.1 单对数关系——对数模型

城市化水平与经济发展水平关系的第一个数学模型是对数关系模型^[6, 17], 通常表作:

$$L = a \ln(x) - b \quad (8)$$

式(8)中, x 表示人均产值 (如人均 GDR, GNP) 或者人均收入, L 表示城市化水平, a, b 为大于 0 的参数。这个模型在国内外研究较多, 主要基于世界各国的截面数据描述城市人口比重与人均产值的关系。梁进社曾经基于经济学思想论证了这个模型的理论基础^[21]。本文仿照文献[6]的数据平滑处理法, 借助 2 套世界各国发展状况的数据检验式(8), 效果令人满意。其中第一套数据来自联合国开发署 (UNDP) 的《2000 年人类发展报告》^[22], 该报告给出了 1998 年世界 174 个国家的人均 GDP (美元) 和城镇人口比重。第二套数据来自世界银行的《2002 年世界发展指数 (WDI)》^[23], 反映的是 2000 年前后世界各国的情况, 提供了 152 个国家的数据资料, 其中有 137 个国家的数据可用。为节省篇幅本文不列出试验过程。

2.2 双对数关系——幂指数模型

城市化水平与经济发展水平关系的第二个数学模型是幂指数关系模型^[16, 18], 通常表作

$$L = cx^d \quad (9)$$

式(9)中, c, d 为大于 0 的参数, 其他符号同式(8)。对式(9)取对数, 得到双对数线性关系

$$\ln(L) = \ln(c) + d \ln(x) = c' + d \ln(x) \quad (10)$$

式(10)中, 参数 $c' = \ln(c)$, 为线性模型中的截距。幂指数模型在城市化-经济发展关系研究中也比较常用, 可以借助中国历年统计年鉴提供的 1952~2008 年的城镇人口比重和人均 GDP 时间序列验证上面的关系。当然, 还有更多的案例支持幂指数函数模型^[24]。

2 3 分对数关系——Logistic模型

基于中国各地区人均 GDP与城市化水平的数据分析,本文提出 Logistic模型,考察中国人均产值 x 与城乡比 O 的关系,得到一个指数函数:

$$O = C e^{kx} \tag{11}$$

式 (11)中, C 、 k 为参数。将式 (11)代入式 (3)立即得到 Logistic函数:

$$L = \frac{1}{1 + (1/C) e^{-kx}} = \frac{1}{1 + A e^{-kx}} \tag{12}$$

式 (12)中, $A = 1/C$ 为变换后的参数。式 (11)与式 (12)理论上等价。

实际上,由式 (4)可得 $O = L / (1 - L)$, 代入式 (11), 然后两边取对数, 得到:

$$\ln O = \ln\left(\frac{L}{1-L}\right) = B + kx \tag{13}$$

式 (13)中, $B = \ln(C)$, 为变换后的参数。这意味着, 式 (11)不是一般的指数模型, 实际上是一个特殊的分对数 (Logit) 模型^[25]。原因是, 城乡比本质上是一种几率比 (odds ratio), 反映城市人口出现

的概率与乡村人口出现的概率的比值。由此可见, 城市化水平与人均产值关系的 Logistic模型等价于一个分对数模型。

本文运用中国 2008年 31个地区 (省、自治区、直辖市) 的城乡比和人均 GDP 数据^[26] 拟合式 (11), 得到:

$$z = 0.319 e^{0.424x} \tag{14}$$

式 (14)中 z 为城乡比 O 的估计值, 拟合优度 $R^2 = 0.878$ (图 1)。上式可以等价地表作:

$$y = \frac{1}{1 + 1/z} = \frac{1}{1 + 3.13 e^{-0.424x}} \tag{15}$$

进一步地, 可以计算出 2000年以及 2005~2007年的模型参数, 并通过插值求得 2001~2004年的模型参数 (表 1)。结果表明, 模型比例系数 C 的估计值逐年下降, 而反映变化率的参数 k 的估计值逐年上升。作为对比, 采用同样数据试验单对数模型和双对数模型, 拟合优度相对较低 (见表 1)。总体看来, 中国各省份截面数据最适合采用 Logistic函数描述, 其次是对数函数, 再次是幂指数函数。

表 1 中国各地区城乡比与人均 GDP关系的模型参数及其拟合优度 (2000~2008年)

Table 1 Change trend of the parameter values of the three models on the relationship between URR and per capita GDP of China (2000–2008)

模型	参数	2000年	2001年	2002年	2003年	2004年	2005年	2006年	2007年	2008年
分对数	C	0.255	0.296	0.307	0.304	0.301	0.311	0.321	0.329	0.319
	k	1.078	0.837	0.738	0.681	0.630	0.618	0.542	0.467	0.424
	R^2	0.851	—	—	—	—	0.898	0.899	0.899	0.878
单对数	R^2	0.818	—	—	—	—	0.849	0.847	0.847	0.833
双对数	R^2	0.776	—	—	—	—	0.840	0.844	0.846	0.801

说明: 原始数据来源为国家统计局历年《中国统计年鉴》^[26]。由于该年鉴没有提供 2001~2004年地区城乡人口数据, 这 4个年份的模型参数通过插值求得。2000年之前的有关数据也阙如, 故不考虑。作为效果对比, 单对数模型和双对数模型仅仅给出拟合优度 (R^2) 值, 没有提供模型参数。读者容易通过试验估计参数值。

3 动力学机制比较

人文地理系统的数学模型具有非唯一性, 不同的系统演化条件导致不同的模型, 不同的模型反映不同的动力学机制。关键在于, 这些模型有什么用途。对于城市化与经济发展水平的关系而言, 建模的目的在于理论上的解释和实践中的预测 (表 2)。可是, 要想有效利用这些模型开展解释和预测工作, 有必要揭示模型的参数含义以及模型背后隐含的动力学机制。

首先考察单对数模型。对式 (2)求导数, 得到城市化水平相应于人均产值的变化率:

$$dL/dx = a/x \tag{16}$$

这表明, 人均产值每增加一个单位, 城市化水平增加 a/x 个单位。这里 a 为常数, x 为人均产值。由此看出 2个特征: 一是控制变化率 dL/dx 的变量是代表经济发展水平的人均产值; 二是随着经济发展水平的提高, 产值对城市化的速度影响越来越小。对于基于时间序列的纵向分析, 早期人均产值对城市化影响显著, 以后将逐步减弱; 对于基于空间序列的横向分析, 经济发展水平较低时, 人均产值对城市化水平影响显著, 较高时则会减弱。这是一种先慢后快式增长, 经济发展水平对城市化的影响由经济变量控制。对式 (8)进行逻辑反演, 得到一个

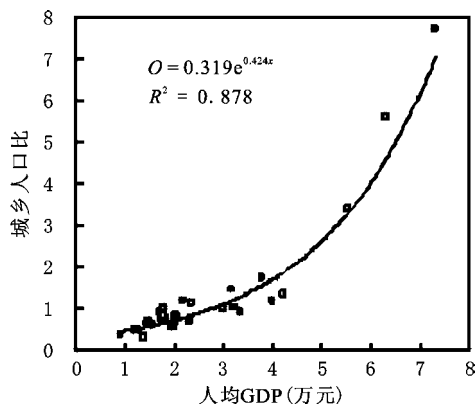


图 1 中国各地区城乡人口比与人均 GDP 的单对数关系 (2008 年)

Fig 1 The relation between the urban-rural ratio (URR) and per capita GDP of China (2008)

表 2 城市化 - 经济发展水平关系模型的主要用途

Table 2 The main aims of modeling the relations between urbanization and economic development levels

建模目的	具体内容
解释	(1) 揭示城市化与经济发展之间的因果关系 (谁决定谁)
	(2) 判断城市化与产业发展之间的是否协调 (城市化是否落后于工业化)
	(3) 了解城市化和经济发展的动力学机制 (控制变量是什么)
预测	(1) 已知一个区域的人均收入, 估计该地区的城市化水平
	(2) 已知一个地区的城市化水平, 估计该地区的人均收入

动力学模型:

$$\begin{cases} dL(t)/dt = \alpha L_0 \\ dx(t)/dt = \beta x(t) \end{cases} \quad (17)$$

式 (17) 中, α, β 为常数, L_0 为关于城市化水平的常量。根据这个方程, 只有城市化水平线性变化 (按照算术级数增长) 而人均产值指数增长 (按照几何级数上升) 时, 对数模型才能成立。

接下来考察幂指数模型, 该模型反映的实际上是一种异速生长关系。对式 (9) 求导数, 得到城市人口比重相应于经济发展水平的变化率:

$$dL/dx = \gamma L/x \quad (18)$$

由此得到异速系数:

$$\gamma = (dL/L)/(dx/x) \quad (19)$$

就数理而言, 地理学和生物学中的异速生长系数也就是经济学中的弹性系数。由此可以看出如下特

征: ①城市化水平的变化率与城市化水平成正比, 与人均产值成反比。城市化水平和经济发展水平共同控制变化率。②城市化水平的相对增长率与人均产值的相对增长率比值为常数——这是异速生长的基本涵义, 这个常数就是异速系数 γ 。③由于城市化水平有确定的上限, 而人均产值没有固定的上限, 城市化水平终究要比人均产值变化速度慢, 从而城市化水平相应于人均产值的变化率也是先快后慢型。对式 (9) 进行动力学还原, 得到一个微分方程组:

$$\begin{cases} dL(t)/dt = \varphi L(t) \\ dx(t)/dt = \psi x(t) \end{cases} \quad (20)$$

式 (20) 中, φ, ψ 为常数。可见, 只有城市化水平和人均产值均表现为指数增长, 幂次模型才能成立。

最后考察 Logistic 模型。对式 (12) 求导数, 得到二阶 Bernoulli 式微分方程:

$$dL/dx = kL(1-L) \quad (21)$$

由于参数 $k > 1$, 变化率是一条开口向下的抛物线。由此揭示如下特征: ①城市化水平控制经济发展水平对城市化水平的影响。②增长率两头慢、中间快。对于时间序列, 早期和末期变化率小, 中间变化率大。当 $L = 1 - L$, 即 $L = 1/2$ 时, 变化率达到最大值。也就是说, 城市化水平达到饱和值的一半时, 经济发展水平对其影响最为敏感。对于空间序列, 城市化和经济发展水平最低的区域和最高的区域变化率都不敏感, 只有那些中流的区域, 城市化水平对人均产值反映最为强烈。

对式 (12) 进行动力学反演, 得到一个非线性微分方程组:

$$\begin{cases} dL(t)/dt = \eta L(t) [1 - L(t)] \\ dx(t)/dt = \mu x_0 \end{cases} \quad (22)$$

式 (22) 中, η, μ 为常数, x_0 为关于人均产值的常量。第一个式子暗示城市化水平在时间方向上是一条 Logistic 曲线, 第二个式子表明人均产值线性增长。这意味着, 城市化水平在时间方向的 Logistic 增长过程是相应经济水平的 Logistic 变化的前提。

模型选择除了经验上的统计标准之外, 还有理论上的对称标准——如果一个数学模型具有某种变换下的不变性, 就是具有一种对称性。越是具有对称性的模型越是具有广泛的适用性, 越是可取。对数模型的反函数具有平移不变性, 幂指数模型具有标度不变性, Logistic 模型具有平移不变性。它

们都是具有对称性的模型。至此, 可将模型对比分析的结论要点表示如表 3

表 3 三种城市化 – 经济发展水平关系模型的特征对比						
Table 3 Comparison between the three mathematical models in terms of dynamics and symmetry						
模型	关系	变化特征	变化规律	变化率控制变量	动力学特征	对称性
对数模型	单对数	由快到慢, 先快后慢	有特征尺度	人均产值 (经济变量)	城市化水平线性变化, 人均产值指数增长	平移对称
幂指数模型	双对数	由快到慢, 先快后慢	无特征尺度	人均产值和城市化水平 (两种变量)	城市化水平和人均产值都指数增长	标度对称
Logistic 模型	分对数	中间快两头慢	有特征尺度	城市化水平 (城市变量)	城市化水平 Logistic 增长, 人均产值线性增长	平移对称

4 结 语

城市化与经济发展水平关系的 3 种模型建模目的都是一样的, 但刻画的对象具有不同的背景条件, 模型结构反映不同的动力学特征。指数模型和幂指数模型是前人的成果, Logistic 模型则是本文的创新。不同模型的动力学机制分析和对比也是文章的主要创新点所在。

3 种模型的要点小结如下: ①对数模型适合于经济变量主导的区域, 揭示的是一种单对数线性关系。如果一个区域的情况表现为这种模型, 则城市化水平相应于经济发展水平的变化率由快到慢变化: 对于时间序列, 先快后慢; 对于空间序列, 低水平快, 高水平慢。变化曲线有特征尺度。随着社会经济的发展, 人均产值对城市化的影响越来越弱。②幂指数模型适合于经济变量和城市变量平衡作用的区域, 揭示的是一种双对数线性关系。如果一个区域的情况表现为这种模型, 则城市化水平相应于经济发展水平的变化率也是由快到慢变化: 对于时间序列, 先快后慢; 对于空间序列, 低水平快, 高水平慢。变化率下降的速度要比对数模型慢一些, 变化曲线无特征尺度。随着社会经济的发展, 人均产值对城市化的影响也是越来越弱。③Logistic 模型适合于城市变量主导的区域, 揭示的是一种分对数线性关系。如果一个区域的情况表现为这种模型, 则城市化水平相应于经济发展水平的变化率为两头慢中间快: 对于时间序列, 先慢后快最后又慢; 对于空间序列, 低水平和高水平慢, 中流水平快速。变化曲线有特征尺度。起步阶段, 人均产值对城市化的影响较弱, 然后逐步加强; 当城市化水平达到饱和值的一半左右时, 人均产值对城市化的影响又

将逐步变弱, 以至越来越弱。

参考文献:

[1] Pacione M. The internal structure of cities in the third world [J]. Geography, 2001, 86(3): 189–209.

[2] Reiss (Jr) A J. Economic growth and the rate of urbanization: A comment on the paper by Davis and Golden [J]. Economic Development and Cultural Change, 1954, 3(1): 27–29.

[3] Renaud B. Natural Urbanization Policy in Developing Countries [M]. New York: Oxford University Press, 1981.

[4] Lam as P S W, Williams M. Urbanization and economic development [J]. Eastern Economic Journal, 1984, 10(3): 325–332.

[5] ElNour, Balla A H. The relationship between urbanization and socio-economic development in the Sudan [J]. GeoJournal, 1989, 18(4): 369–377.

[6] 周一星. 城市化水平与国民生产总值关系的规律性探讨 [J]. 人口与经济, 1982 (1): 28–33.

[7] 吴殿廷, 田杰, 李雁梅, 等. 我国各地区现代化与工业化、城市化、知识化及经济协调发展的初步研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(11): 51–58.

[8] 李诚固, 郑文升, 李培祥. 中国城市化的区域经济支撑模型分析 [J]. 地理科学, 2004, 24(1): 1–6.

[9] 杨青山, 李红英, 梅林. 改革开放以来东北区城市化与产业结构变动关系研究 [J]. 地理科学, 2004, 24(3): 314–319.

[10] 陈明星, 陆大道, 查良松. 中国城市化与经济发展水平关系的国际比较 [J]. 地理研究, 2009, 28(2): 464–474.

[11] Kac M. Some mathematical models in science [J]. Science, 1969, 166: 695–699.

[12] 陈彦光, 刘继生. 地理学的主要任务与研究方法 [J]. 地理科学, 2004, 24(3): 257–263.

[13] Fotheringham A S, O’Kelly M E. Spatial Interaction Models: Formulations and Applications [J]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[14] Longley P A. Computer simulation and modeling of urban structure and development [C] // Pacione M. Applied Geography: Principles and Practice. London: Routledge, 1999: 605–619.

- [15] Ledent J. Rural-urban migration, urbanization, and economic development [J]. *Economic Development and Cultural Change*, 1982, **30**: 507- 538.
- [16] Rao D N, Kameshu Jain V P. Dynamics of urbanization: the empirical validation of the replacement hypothesis [J]. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 1989, **16**(3): 289- 295.
- [17] Dillinger W. A National Urban Data File for 114 Countries [R]. Urban and Regional Economics Division, World Bank Urban and Regional Report (Number 79 - 5). Washington DC: World Bank, 1979.
- [18] Rao D N, Kameshu Jain V P. Model of Urbanization based on Replacement Dynamics—An International Comparison of Empirical Estimates [R]. Natural Workshop on Futurology, Technological Forecasting towards the 21st Century. New Delhi: Indian Institute of Technology, 1988.
- [19] Taylor P J. Quantitative Methods in Geography [M]. Prospect Heights: Waveland Press, 1983.
- [20] United Nations. World Urbanization Prospects: The 2003 Revision [R]. New York: United Nations, 2004.
- [21] 梁进社. 城市化与国民经济发展之关系的理论分析 [J]. *自然资源学报*, 1999, **4**(4): 351~ 354.
- [22] UNDP. 2000年人类发展报告 [R]. 北京: 中国财政经济出版社, 2001.
- [23] The World Bank. 2002 World Development Indicators [R/OL]. Washington, D. C.: World Bank, 2002. <http://publications.worldbank.org/>.
- [24] 陈彦光. 地理学多视角研究方法——Braess网络车流分配过程的理论分析与数值计算 [J]. *地理研究*, 2008, **27**(6): 1367~ 1380.
- [25] 陈彦光, 刘继生. 效用最大化、Logit变换和城市地理学的数量分析模型 [J]. *地理科学*, 2002, **22**(5): 581~ 586.
- [26] 国家统计局. 中国统计年鉴 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2001~ 2009.

Modelling the Relationships between Urbanization and Economic Development Levels with Three Functions

CHEN Yan-guang

(Department of Geography, College of Urban and Environmental Sciences, Peking University, Beijing 100871)

Abstract Three functions can be employed to model the relations between the level of urbanization and that of economic development. The first is a logarithmic function, the second is the power function, and the third is the logistic function. The logistic model of the relationships between urbanization and economic development levels is equivalent in mathematics to the exponential model of the relationships between urban-rural ratio (URR) and per capita products such as GDP and GNP. The exponential model is a logit model since URR is defined as the ratio of the urban to the rural population. The logarithmic model suggests that economic variables are control variables of urbanization associated with economic development; the logistic model indicates urban variables are control variables of evolution of regional systems; and the power-law model implies that the ratio of urban variables to economic variables control the system development.

The basic dynamical equations of the three models are derived, and the results showed physical properties of the three kinds of systems. The similarities and differences between the different kinds of dynamics are revealed by drawing a comparison between the three models. Among these models, the logistic function presented in this work is applied to the 31 administrative areas of China including provinces, autonomous regions and municipalities directly under the Central Government. The examples based on the data from 2000 to 2008 illustrated how to estimate the parameters of the models for the aims of scientific explanation and prediction. In practice, the models can be used to judge whether or not urbanization keeps in step with economic development in a region.

Key words level of urbanization; urban-rural ratio; level of economic development; logarithmic model; allometric growth; logistic model