

TÍNH TOÁN HÌNH THỨC TRONG MATLAB

I. Giới thiệu

- ⊙ Tính toán hình thức.
- ⊙ Symbolic Math Toolbox.

Khai báo

⊙ Khai báo biến:

> syms a b c x

hoặc

> a = sym('a')

> b = sym('b')

> c = sym('c')

> x = sym('x')

⊙ Khai báo biến phức

> x = sym('x','real'); y = sym('y','real')

hoặc syms x y real

> z = x + i*y

Khai báo biểu thức:

⊙ Khai báo biểu thức: $f = 2x + b$

> syms x b

> f = 2*x + b

hoặc

> f = sym('2*x + b')

> sym('(sqrt(2) + 1)/3')

> g = syms('5') (khác $g = 5$)

> syms x y

> h = x^2 + y^2

⊙ **Lệnh findsym: tìm biến hình thức trong biểu thức.**

⊙ **Ví dụ**

- > syms a b n t x z
- > s = x^n; g = sin(a*t + b)
- > findsym(f)
- > ans = x n
- > findsym(g)
- > ans = a b t

⊙ **findsym(g,1): tìm biến hình thức mặc định**

- > findsym(g,1)
- > ans = t

Hiển thị biến hình thức dưới dạng số học

- ⊙ **t = 0.1**
 - > sym(t, 'f')
 - > ans = '1.9999999999999999a'*2^(-4)
 - > sym(t, 'r')
 - > ans = 1/10
 - > sym(t, 'e')
 - > ans = 1/10+eps/40
 - > sym(t, 'd')
 - > ans = .10000000000000000555111512312578
 - > digits(7)
 - > sym(t, 'd')
 - > ans = .1000000

II. Các phép tính vi tích phân

- ◉ Đạo hàm
- ◉ Tích phân
- ◉ Giới hạn
- ◉ Tổng chuỗi

Đạo hàm

- ◉ **diff(Y)**

Y: hàm số hoặc biểu hình thức cần lấy đạo hàm.

- ◉ **Ví dụ**

- > `syms x; f = sin(5*x)`
- > `diff(f)`
- > `ans = 5*cos(5*x)`
- > `g = exp(x)*cos(x)`
- > `diff(g)`
- > `ans = exp(x)*cos(x) - exp(x)*sin(x)`
- > `c = sym('5'); diff(c)`
- > `ans = 0`

- > diff(5)
- > ans = [] vì 5 không phải là biến hình thức

◎ Lấy đạo hàm cấp 2

- > diff(g,2)
- hoặc
- > diff(diff(g))
- > ans = -2exp(x)*sin(x)

◎ Đạo hàm đa biến

Gọi $f = f(x,y)$ thì

- Đạo hàm theo x: diff(f,x)
- Đạo hàm theo y: diff(f,y)

- Đạo hàm cấp 2 theo x: diff(f,x,2)
- Đạo hàm cấp 2 theo y: diff(f,y,2)
- Nếu x là biến mặc định của f thì diff(f,2) tương đương với diff(f,x,2).

○ Ví dụ

- syms s t
 - $f = \sin(s*t)$
 - diff(f,t) \Rightarrow ans = $\cos(s*t)*s$
 - diff(f,s) \Rightarrow ans = $\cos(s*t)*t$
 - diff(f,t,2) \Rightarrow ans = $-\sin(s*t)*s^2$
 - findsym(f,1) \Rightarrow ans = t
- Suy ra biến mặc định là t do đó $\text{diff}(f,2) = \text{diff}(f,t,2)$

○ Đạo hàm đối với ma trận

- `syms a x`
- `A = [cos(a*x) sin(a*x); -sin(a*x) cos(a*x)]`
- `A =`

$$\begin{bmatrix} \cos(ax) & \sin(ax) \\ -\sin(ax) & \cos(ax) \end{bmatrix}$$
- `diff(A)`
- `ans =`

$$\begin{bmatrix} -\sin(ax)a & \cos(ax)a \\ -\cos(ax)a & -\sin(ax)a \end{bmatrix}$$

Tích phân

- `int(f,x)` hoặc `int(f)` : Tìm nguyên hàm của hàm $f = f(x)$.
- `int(f,a,b)` : Tính tích phân của f từ $a \rightarrow b$.
- Ví dụ
 - > `syms x n a b t`
 - > `f = x ^ n`
 - > `int(f)` (hoặc `int(f,x)`)
 - > `ans = x^(n+1)/(n+1)`

```

> g = cos(a*t + b)
> int(g)
> ans = sin(a*t + b)/a
> h = sin(2*x)
> int(h,0,pi/2)
> ans = 1
> u = exp(-x^2)
> int(u,0,inf)
> ans = 1/2*pi^(1/2)

```

Giới hạn

- ⊙ $\text{limit}(f) :$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ⊙ $\text{limit}(f,x,a) :$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
hoặc $\text{limit}(f,a)$
- ⊙ $\text{limit}(f,x,a,'left') :$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- ⊙ $\text{limit}(f,x,a,'right') :$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

◎ Ví dụ

- > sym h n x
- > limit((cos(x + h) - cos(x))/h,h,0)
- > ans = - sin(x)
- > limit((1 + x/n)^n,n,inf)
- > ans = exp(x)
- > limit(x/abs(x),x,0,'left')
- > ans = -1
- > limit(x/abs(x),x,0,'right')
- > ans = 1
- > limit(x/abs(x),x,0)
- > ans = NaN

Tổng chuỗi

◎ Tính: $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$
 $1 + x + x^2 + \dots$

- > syms x k
- > s1 = symsum(1/k^2,1,inf)
- > s2 = symsum(x^k,k,0,inf)
- > s1 = 1/6*pi^2
- > s2 = -1/(x-1)

III. Các hàm đơn giản và thay thế biến trong biểu thức

- ⊙ `collect(f) – f = f(x)`
- ⊙ `collect(f,y) - f = f(x,y,...)`
 - Đơn giản hàm f bằng các nhóm các biến x có cùng số mũ.
 - Trường hợp f có nhiều biến `collect(f,y)` sẽ chỉ định gom nhóm theo biến y.
 - `collect(f)` gom nhóm theo biến mặc định được chỉ ra trong `findsym(f)`.

⊙ Ví dụ

- > `syms x t`
- > `f = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6`
- > `g = (x - 1)*(x - 2)*(x - 3)`
- > `h = -6 + (11 + (-6 + x)*x)*x`
- > `pretty(f), pretty(g), pretty(h)`
- > `collect(f) => ans = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6`
- > `collect(g) => ans = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6`
- > `collect(h) => ans = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6`
- > `f = (1 + x)*t + x*t`
- > `collect(f) => ans = 2*x*t + t`
- > `collect(f,t) => ans = 2*x*t + t`

⊙ **expand(f) : phân tích biểu thức f.**

⊙ **Ví dụ**

- > syms x y a b
- > f = a*(x + y)
- > expand(f) => ans = a*x + a*y
- > g = (x -1)*(x -2)*(x - 3)
- > expand(g) => ans = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6
- > h = exp(a + b)
- > expand(h) => ans = exp(a)*exp(b)
- > cos(3*x) => ans = 4*cos(x)^3 - 3*cos(x)

⊙ **factor(f) : phân tích đa thức f thành nhân tử chung**

⊙ **Ví dụ**

- > f = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6
- > g = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 5
- > h = x^6 + 1
- > factor(f)
- > ans = (x - 1)*(x -2)*(x - 3)
- > factor(g)
- > ans = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 5 ??
- > factor(h)
- > ans = (x^2 + 1)*(x^4 - x^2 + 1)

◎ **simplify(f)**: đơn giản biểu thức f.

◎ **Ví dụ**

- > $f = x*(x*(x - 6) + 11) - 6$
- > $\text{simplify}(f) \Rightarrow \text{ans} = x^3 - 6*x^2 + 11*x - 6$
- > $g = (1 - x^2)/(1 - x)$
- > $\text{simplify}(g) \Rightarrow \text{ans} = x + 1$
- > $\text{syms } x \ y \text{ positive}$
- > $\text{simplify}(\log(x*y)) \Rightarrow \log(x) + \log(y)$
- > $h = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$
- > $\text{simplify}(h) \Rightarrow \text{ans} = 1$

◎ **simple(f)**: rút gọn biểu thức f, kết hợp các phép toán của simplify, collect, factor.

◎ **Ví dụ**

- > $f = (1/a^3 + 6/a^2 + 12/a + 8)^{1/3}$
- > $\text{simplify}(f) \Rightarrow \text{ans} = ((2*a + 1)^3/a^3)^{1/3}$
- > $\text{simple}(f) \Rightarrow \text{ans} = (2*a + 1)/a$
- > $\text{syms } x \ y \text{ positive}$
- > $h = \log(x*y)$
- > $\text{simplify}(h) \Rightarrow \text{ans} = \log(x) + \log(y)$
- > $\text{simple}(h) \Rightarrow \text{ans} = \log(x*y)$

◉ **subs(expr,old,new)**: thay thế old bằng new trong biểu thức expr.

◉ **Ví dụ**

- > syms x y
- > f = sin(x)
- > subs(f,x,pi/3) => ans = 0.8660
- > subs(f,x,sym(pi)/3) => ans = 1/2*3^{1/2}
- > S = x^y
- > subs(S,{x y},{3 2})
- > subs(S,{x y},{3 x+1})
- > subs(S,y,1:5) => ans = [x, x², x³, x⁴, x⁵]

◉ **[N D] = numden(f)**: trích tử số và mẫu số của f gán cho N và D.

◉ **Ví dụ**

- > syms s
- > H = -(1/6)/(s + 3) -(1/2)/(s + 1) + (2/3)/s
- > simplify(H)
- > pretty(ans)
- > [N D] = numden(H)
- > N = s + 2
- > D = (s+3)*(s+1)*s

⊙ **poly2sym(a,x)**: tạo một đa thức theo biến x với các hệ số được lấy lần lượt từ mảng a .

⊙ **Ví dụ**

- > syms x; a = [1 4 -7 -10]
- > p = poly2sym(a,x)
- > p = $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

⊙ **x = sym2poly(p)**: trích các hệ số của đa thức p chứa vào mảng s .

⊙ **Ví dụ**

- > syms x; p = $4s^2 - 2s^2 + 5s - 16$
- > x = sym2poly(p)
- > x = 4 -2 5 -16

III. Tính toán trong đại số tuyến tính

⊙ **Khai báo ma trận**

- > syms a b c d t
- > A = [a b; c d]
- > B = [cos(t) sin(t); -sin(t) cos(t)]
- > C = [t 1 0; 1 t 1; 0 1 t]
- > d = round(rand(3,3))
- > D = sym(D)

◎ Các phép toán: với 2 ma trận A và B

- $A + B$
- $A - B$
- $A * B$
- $A \setminus B$ ($= A * \text{inv}(B)$)
- A / B ($= \text{inv}(A) * B$)
- A^n
- $A.'$

◎ Các hàm xử lý ma trận:

- $\text{inv}(A)$
- $\text{det}(A)$
- $\text{rank}(A)$
- $\text{diag}(A)$
- $\text{tril}(A)$
- $\text{triu}(A)$

◉ Ví dụ

- > `c = floor(10*rand(4))`
- > `D = sym(c)`
- > `A = inv(D)`
- > `inv(A)*A`
- > `det(A)`
- > `b = ones(1,4)`
- > `x = b/A`
- > `x*A`
- > `A^3`

- ◉ Có thể dùng các hàm rút gọn và lấy đạo hàm, tích phân trên ma trận.

◉ Ví dụ

- > `syms a b s`
- > `K = [a+b, a-b; b-a, a+b]`
- > `G = [cos(s) sin(s); -sin(s) cos(s)]`
- > `L = K^2`
- > `collect(L)`
- > `factor(L)`
- > `diff(L,a)`
- > `int(K,a)`
- > `J = K/G`
- > `simplify(J*G)`
- > `simplify(G*(G.'))`

IV. Giải phương trình đại số

◉ **solve(f)** : giải phương trình $f(x) = 0$.

◉ Ví dụ

```
> syms a b c x
> f = a*x^2 + b*x + c;
> solve(f)
> ans =
[1/2*a*(-b + (b^2 - 4*a*c)^1/2)]
[1/2*a*(-b - (b^2 - 4*a*c)^1/2)]
```

◉ **solve(f)** : giải phương trình theo biến mặc định được chỉ ra trong hàm `findsym(f)`, ở đây `findsym(f) -> ans = x`. `solve(f,a)`: giải theo biến được chỉ định là a (tương tự cho b, c).

◉ Ví dụ

```
> solve(f,b)
> ans = -(a*x^2 + c)/x
```

◉ **solve(' f(x) = g(x) ')**: giải phương trình $f(x) = g(x)$. Lưu ý: phải đặt trong dấu nháy.

◉ Ví dụ

```
> s = solve('cos(2*x) + sin(x) = 1')
> s =
[      0]
[      pi]
[ 1/6*pi]
[ 5/6*pi]
```

◉ `solve('f(x)', 'g(x)', 'h(x)', ...)`: giải hệ nhiều phương trình.

◉ Ví dụ

Giải hệ:
$$\begin{cases} x^2 y^2 = 0 \\ x - y/2 = \alpha \end{cases}$$

```
> syms x y alpha
> [x y] = solve('x^2*y^2=0','x - y/2 = alpha')
x =
[      0]
[      0]
[ alpha]
[ alpha]
y =
[ -2*alpha]
[ -2*alpha]
[      0]
[      0]
```

• Nghiệm: $v = [x, y]$

◎ Giải hệ:
$$\begin{cases} u^2 + v^2 = a^2 \\ u + v = 1 \\ a^2 - 2a = 3 \end{cases}$$

- > S = solve('u^2+v^2=a^2','u+v=1','a^2-2*a=3')
- > S =
- a: [2x1 sym]
- u: [2x1 sym]
- v: [2x1 sym]
- > S.a
- ans =
- [3]
- [-1]

Giải phương trình đạo hàm riêng

◎ Hàm: dsolve

◎ Ví dụ

◎ Giải: $\frac{dy}{dt} = 1 + y^2, y(0) = 1$

> dsolve('Dy=1+y^2','y(0)=1')

> y = tan(t + 1/4*pi)

◎ Giải: $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos(2x) - y, y(0)=1, \frac{d}{dx}y(0)=0$

> y = dsolve('D2y=cos(2*x) - y','y(0)=1','Dy(0)=0','x')

> simplify(y); ans = 4/3*cos(x) - 2/3*cos(x)^2 + 1/3

- ◎ Giải: $\begin{cases} \frac{d^3 u}{dx^3} = u \\ u(0) = 1; u'(0) = -1; u''(0) = \pi \end{cases}$
 - > `dsolve('D3u=u','u(0)=1','Du(0)=-1','D2u(0)=pi'),'x')`
- ◎ Giải: $\begin{cases} \frac{df}{dt} = 3f(t) + 4g(t) , f(0) = 0 \\ \frac{dg}{dt} = -4f(t) + 3g(t) , g(0) = 1 \end{cases}$
 - > `[f g] = dsolve('Df = 3*f + 4*g','Dg = -4*f + 3*g',...
'f(0) = 0','g(0) = 1')`
 - > `f = exp(3*t)*sin(4*t); g = exp(3*t)*cos(4*t)`

V. Vẽ đồ thị hàm số

- ◎ Trong 2D:
 - Hàm `ezplot(f)`
 - Ví dụ
 - > `syms t x y`
 - > `f = sin(2*x)`
 - > `g = t + 3*sin(t)`
 - > `h = 2*x/(x^2 - 1)`
 - > `ezplot(f); ezplot(g); ezplot(h)`
 - > `ezplot(x*exp(-x), [-1 4])`

- ⊙ Trong 3D
- ⊙ Hàm `ezplot3(x,y,z)`
- ⊙ Ví dụ
 - > `syms x y z t`
 - > `x = 3*t/(1 + t^3)`
 - > `y = 3*t^2/(1 + t^3)`
 - > `z = sin(t)`
 - > `ezplot3(x,y,z)`
- ⊙ `ezcontour / ezcontourf`
- ⊙ `ezmesh / ezmeshc`
- ⊙ `ezsurf / ezsurfc`