Bài giảng
Môn học: Xử lý số tín hiệu

Giảng viên: TS. Nguyễn Ngọc Văn

Bộ môn: Mạch và Xử lý tín hiệu

Email: van.nguyenngoc@hust.edu.vn

DT: 090449594

NỘI DUNG

- Giới thiệu chung học phần
- Nội dung học phần
  - Cơ sở về tín hiệu và hệ thống rời rạc.
  - Biến đổi Fourier và Fourier rời rạc.
  - Các thuật toán thực hiện (DFT).
  - Thiết kế bộ lọc số FIR và IIR.
  - Ứng dụng xử lý số tín hiệu
- Bài tập và thi kết thúc học phần

Giới thiệu chung học phần

- Yêu cầu học phần.
- Tài liệu tham khảo:
    - [1] Allan V. Oppenheim, *Discrete Time Signal Processing*.
    - [2] John G. Proakis, *Digital Signal Processing (4th Edition)*.
    - [3] Nguyễn Quốc Trung, *Xử lý tín hiệu và lọc số*.
- Công cụ hỗ trợ: DSP, Phần mềm Matlab 。

- Khái niệm về tín hiệu
- Hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian (LTI): Đáp ứng xung và phép chập.
- Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, phân loại hệ thống FIR và IIR
- Các đặc trưng nhân quả, ổn định của hệ thống LTI, các dấu hiệu nhận biết sử dụng biến đổi z

1.1.Khái niệm về tín hiệu

- Tín hiệu là dạng biểu diễn vật lý của thông tin. Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bằng một hàm của một hay nhiều biến độc lập.
- Phân loại tín hiệu:
    - Tín hiệu liên tục
    - Tín hiệu rời rạc

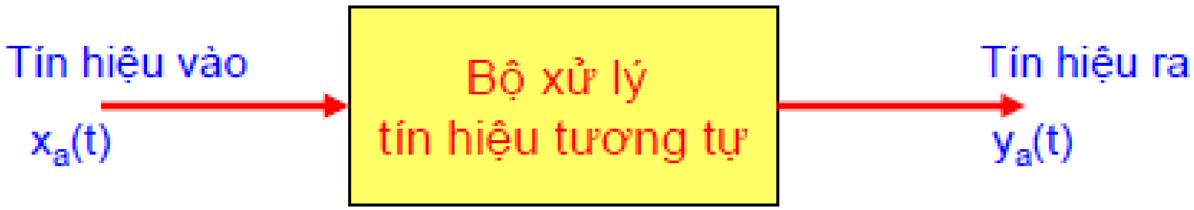
1.1.Khái niệm về tín hiệu

- Xử lý tín hiệu là quá trình dùng các mạch điện, điện tử, máy tính,… tác động lên tín hiệu tạo ra tín hiệu theo cách mong muốn.
- Xử lý tín hiệu số được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như:
  - Xử lý tín hiệu âm thanh, tiếng nói: nhận dạng tiếng nói, người nói; tổng hợp tiếng nói/biến văn bản thành tiếng nói; kỹ thuật âm thanh số ;…
  - Xử lý ảnh: thu nhận và khôi phục ảnh; làm nổi đường biên; lọc nhiễu; nhận dạng;
  - Xử lý tín hiệu trong y tế
  - Quân sự,…

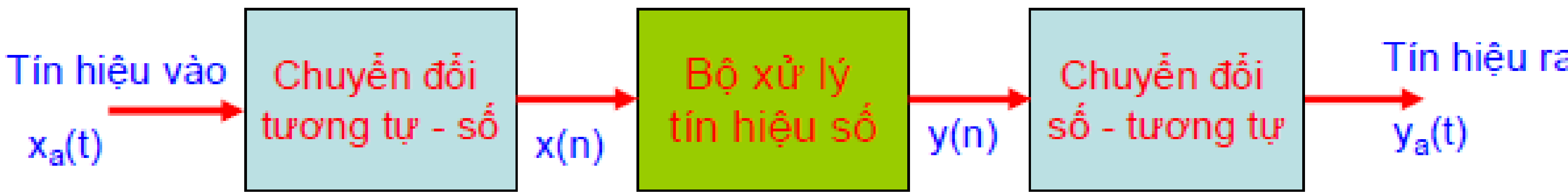
1.1.Khái niệm về tín hiệu

➢ **Có 2 cách xử lý:** Xử lý tương tự ASP (Analog Signal Processing) Xử lý số DSP (Digital Signal Processing)

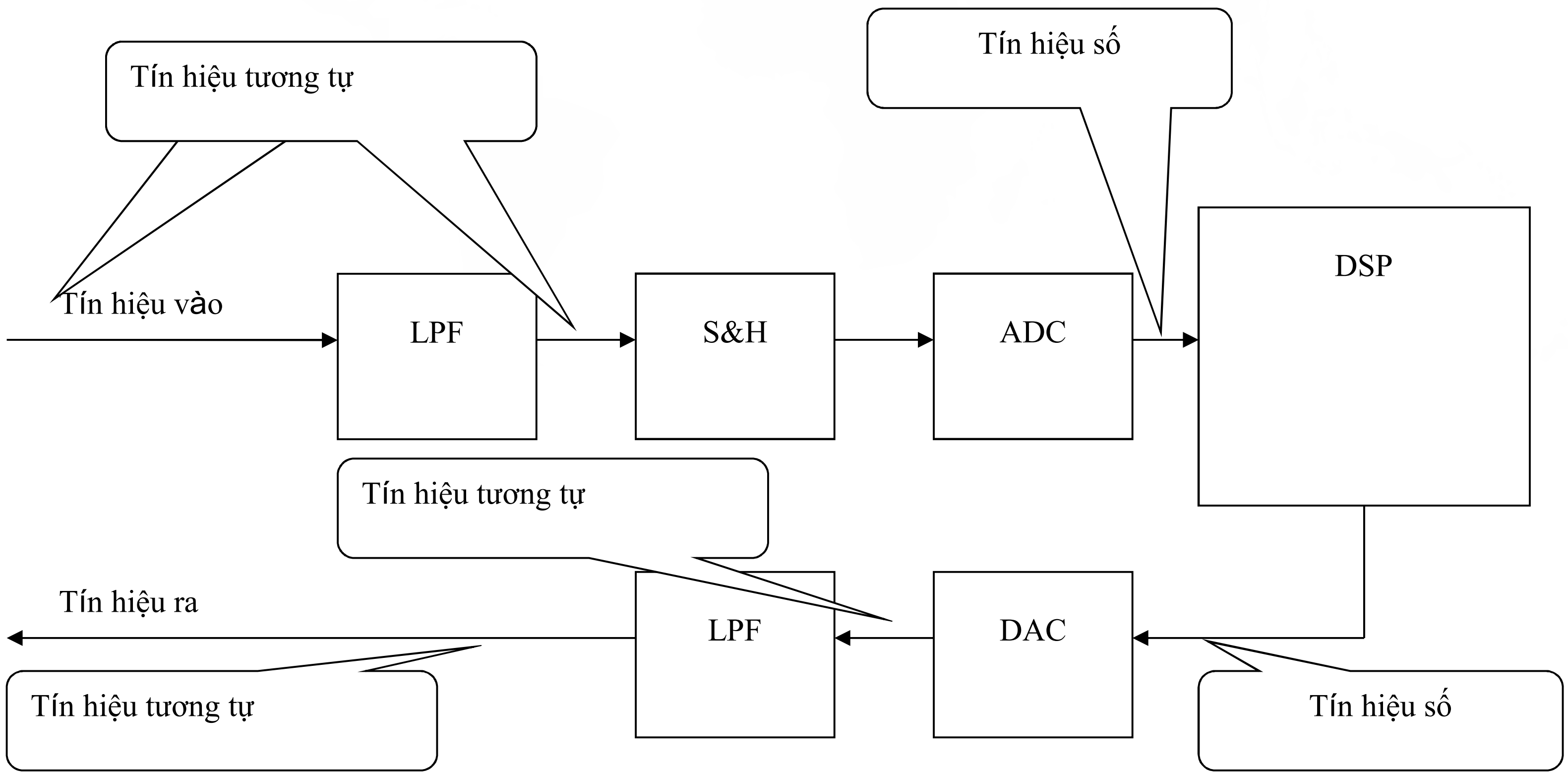
❖ *Mô tả hệ thống xử lý tương tự:*



❖ *Mô tả hệ thống xử lý số:*



1.1.Khái niệm về tín hiệu



H1.6 – Mô hình xử lý tín hiệu số trong thực tế

1.2.Tín hiệu rời rạc

- 1.2.1.Biểu diễn các tín hiệu rời rạc
- 1.2.2.Các tín hiệu rời rạc cơ bản
- 1.2.3.Một số định nghĩa

1.2.1.Biểu diễn tín hiêu rời rạc

- Tín hiệu rời rạc được biểu diễn bởi dãy các giá trị thực hoặc phức.
- Phân loại:
  - Tín hiệu số: $x_d(nT_s)$
  - Tín hiệu lấy mẫu: $x_s(nT_s)$
- Để thuận tiện trong quá trình biểu diễn chuẩn hóa các tín hiệu rời rạc bởi T_s

$$x(nT_s) \xrightarrow[\text{bởi } T_s]{\text{chuẩn hoá}} x(n)$$

1.2.1.Biểu diễn tín hiêu rời rạc

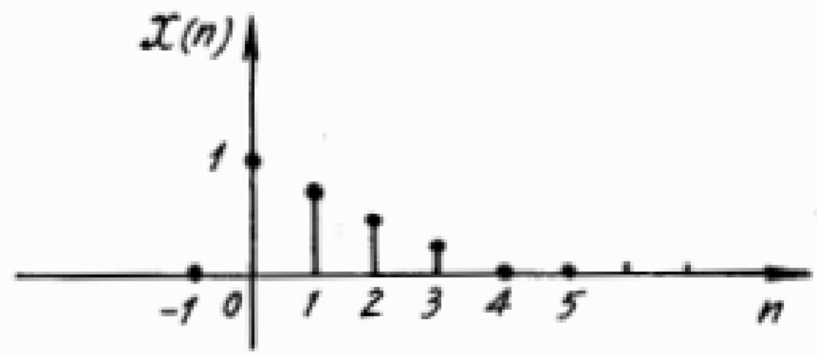
- Với quy ước chuẩn hóa như trên dạng biểu diễn tổng quát của tín hiệu rời rạc:

$$x(n) = \begin{cases} \text{biểu thức toán} & N_1 \le n \le N_2 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

- VD:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

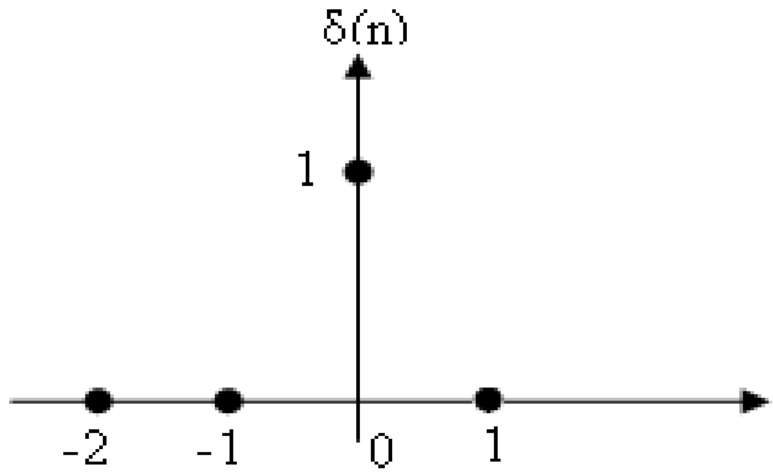
Ở đây : $N_1 = 0$ $N_2 = 4$



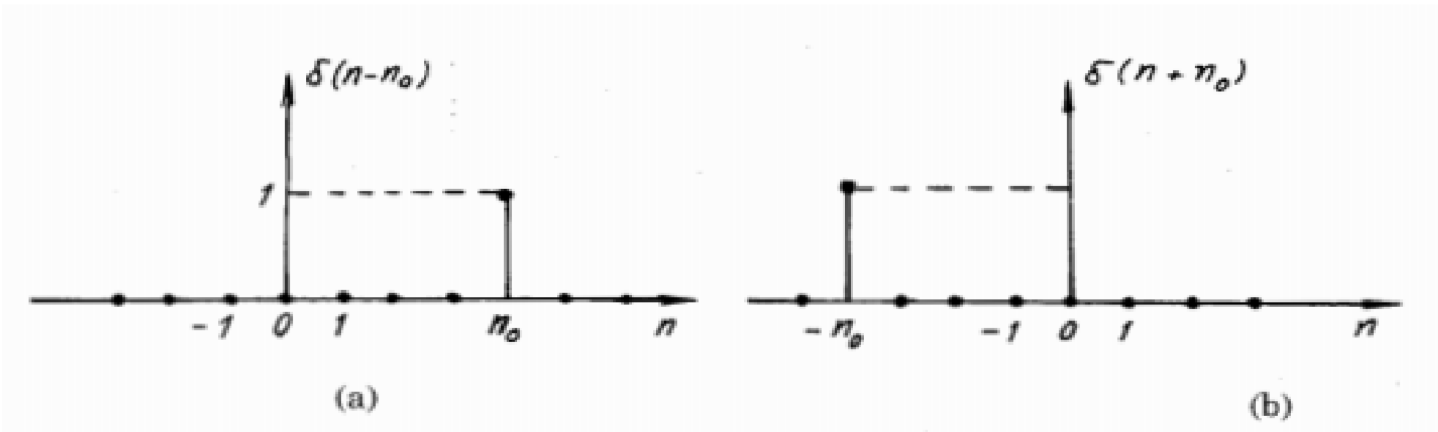
1.2.2.Các tín hiêu rời rạc cơ bản

➢ Tín hiệu xung đơn vị:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



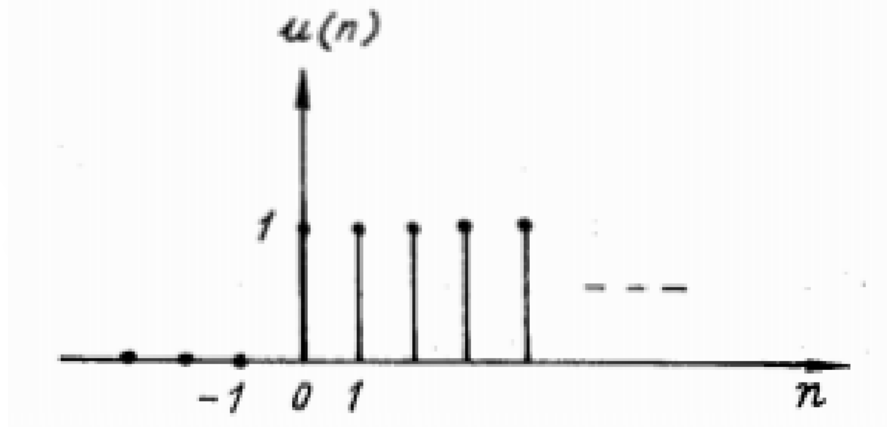
➢ Mở rộng với các xung



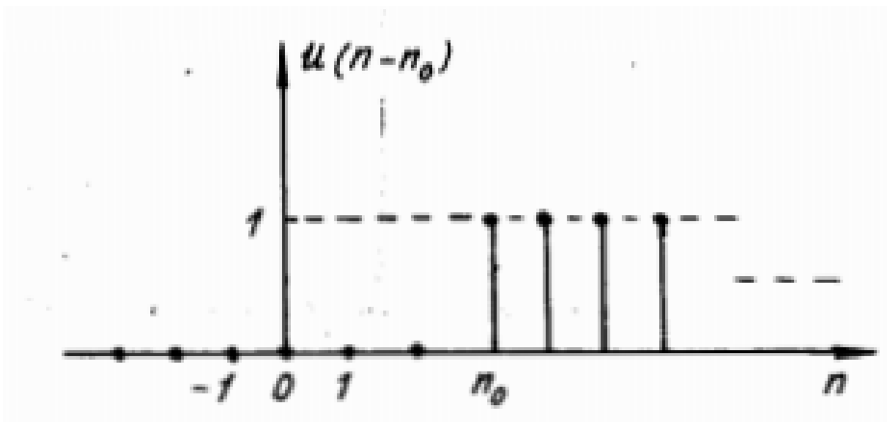
1.2.2.Các tín hiêu rời rạc cơ bản

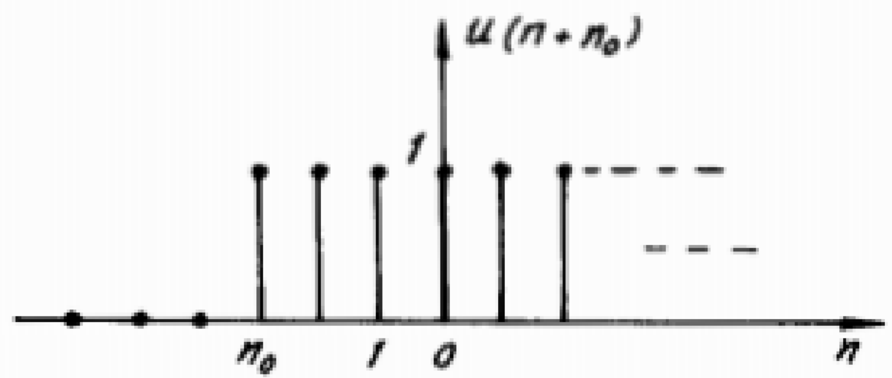
➢ Tín hiệu xung nhảy bậc đơn vị

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



➢ Mở rộng với các xung

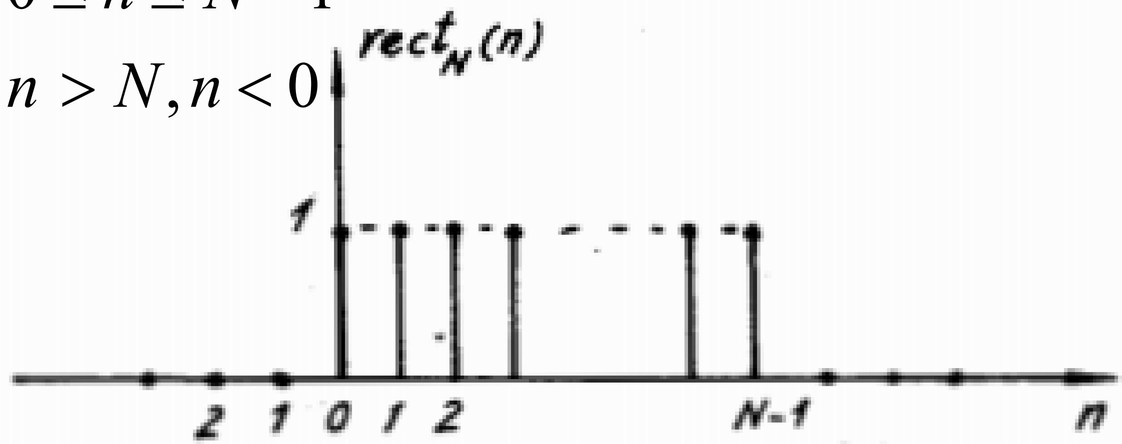




1.2.2.Các tín hiêu rời rạc cơ bản

➢ Tín hiệu xung dãy chữ nhật:

$$x(n) = RECT_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n > N, n < 0 \end{cases}$$



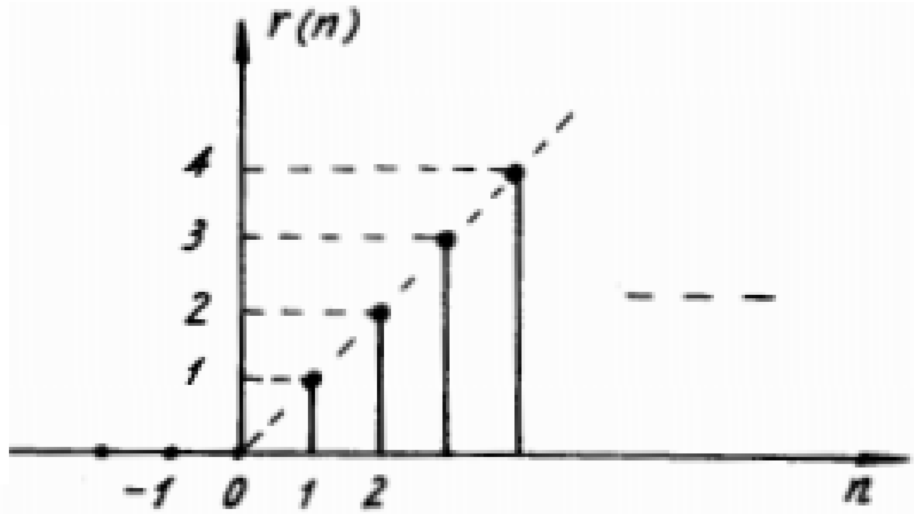
➢ Mở rộng với các xung

$$rect_N(n-n_0) = \begin{cases} 1 & n_0 \le n \le N-1+n_0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.2.2.Các tín hiệu rời rạc cơ bản

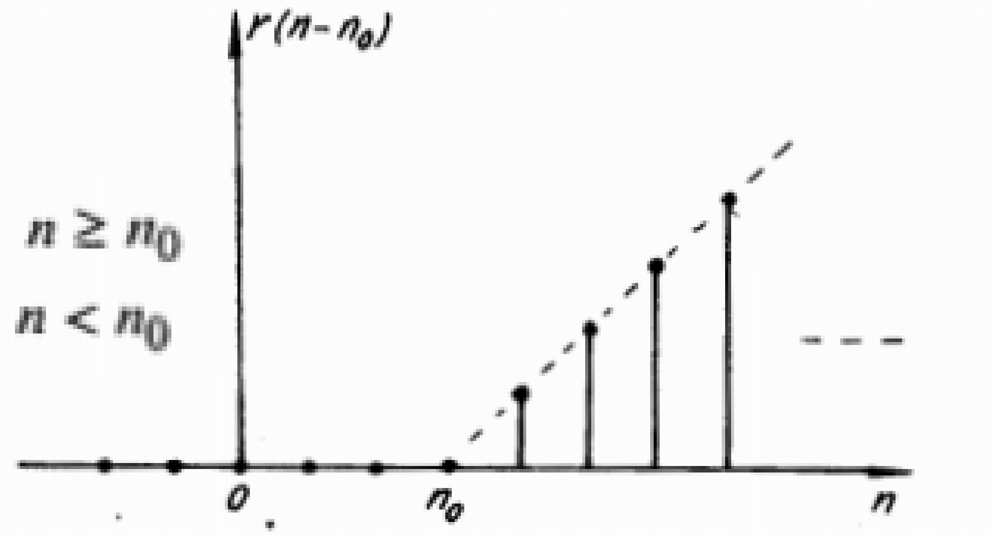
➤ Dãy dốc đơn vị:

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



➤ Mở rộng với các xung

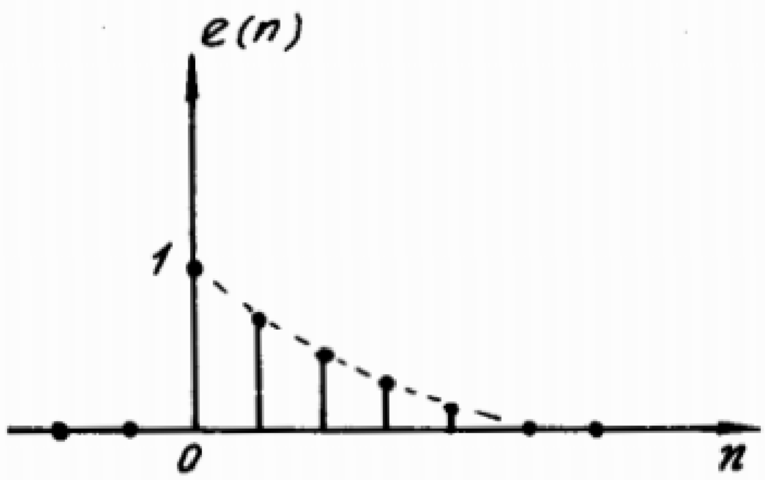
$$r(n-n_0) = \begin{cases} n-n_0 & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases}$$



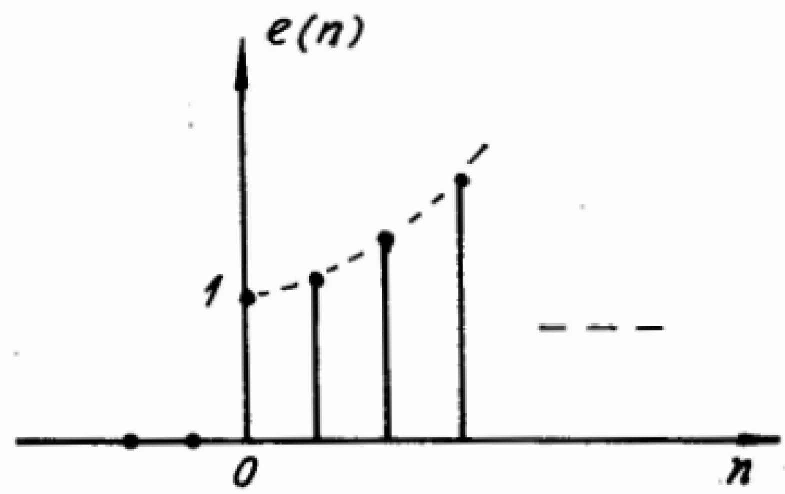
1.2.2.Các tín hiệu rời rạc cơ bản

➢ Dãy hàm mũ thực

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



(a)
$a < 1$

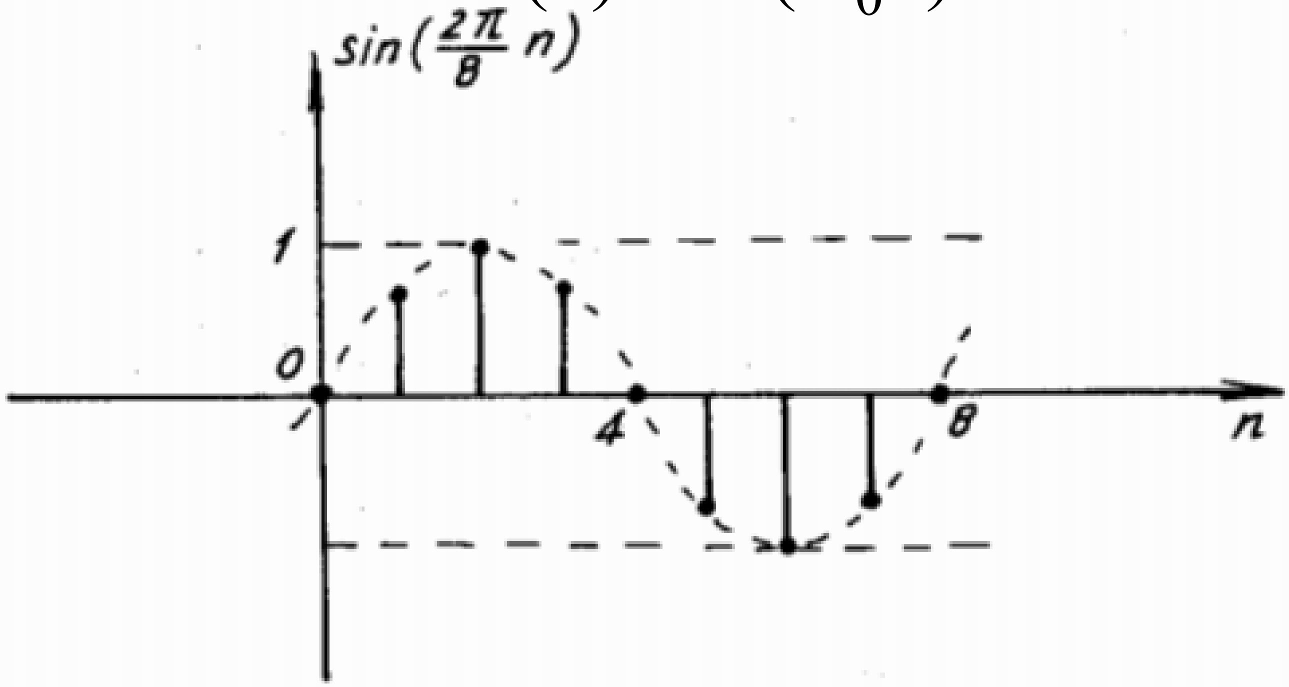


(b)
$a > 1$

1.2.1.Các tín hiêu rời rạc cơ bản

➢ Dãy sin trong miền rời rạc được định nghĩa:

$$s(n)=\sin(\omega_0 n)$$



với $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$

1.2.1.Các tín hiêu rời rạc cơ bản

- Dãy mũ phức:

$$x(n)=\exp\{\sigma+j\omega)n\}$$

Theo công thức Euler có thể bến đổi được:

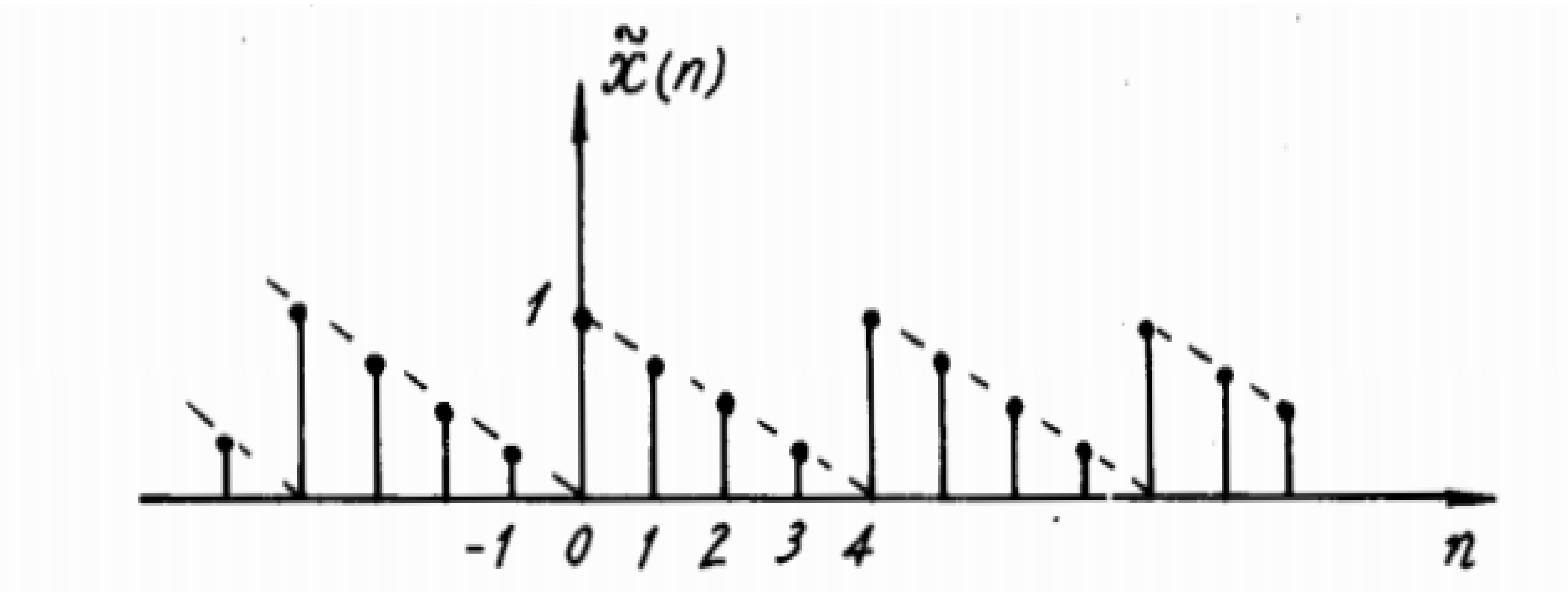
$$x(n)=\exp(\sigma n)[\cos(\omega n)+j\ \sin(\omega n)]$$

1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Dãy tuần hoàn: Là dãy có chu kỳ lặp lại và ký hiệu:

x(n)=x(n+N)=x(n+kN) với mọi n và N, k nguyên

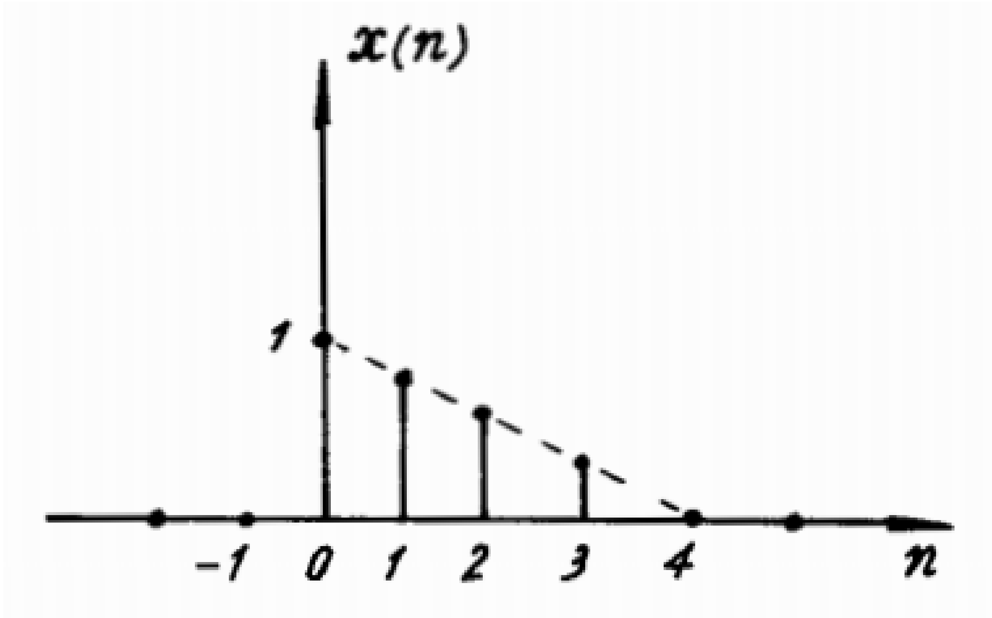
VD:



1.2.3.Một số định nghĩa

- Dãy có chiều dài hữu hạn: là dãy được xác định với số hữu hạn mẫu (N) và ký hiệu là L{x(n)}=N

VD: Cho dãy với biểu diễn như đồ thi:



1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Năng lượng và công suất của dãy:

◆Năng lượng:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Ở đây | | là modul.

VD:

$$E_u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

$$E_{rect_N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)|^2 = N$$

1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Năng lượng và công suất của dãy:

◆Công suất của dãy:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Dãy năng lượng :

Nếu năng lượng của dãy $x(n)$ là hữu hạn (tức là $0 < E_x < \infty$), thì $x(n)$ gọi là dãy năng lượng.

Dãy công suất :

Nếu P_x là hữu hạn (tức là $0 < P_x < \infty$), thì $x(n)$ gọi là dãy công suất.

$$P_u = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |u(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{rect_M} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |rect_M(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{M}{2N+1} = 0$$

1.2.3.Một số định nghĩa

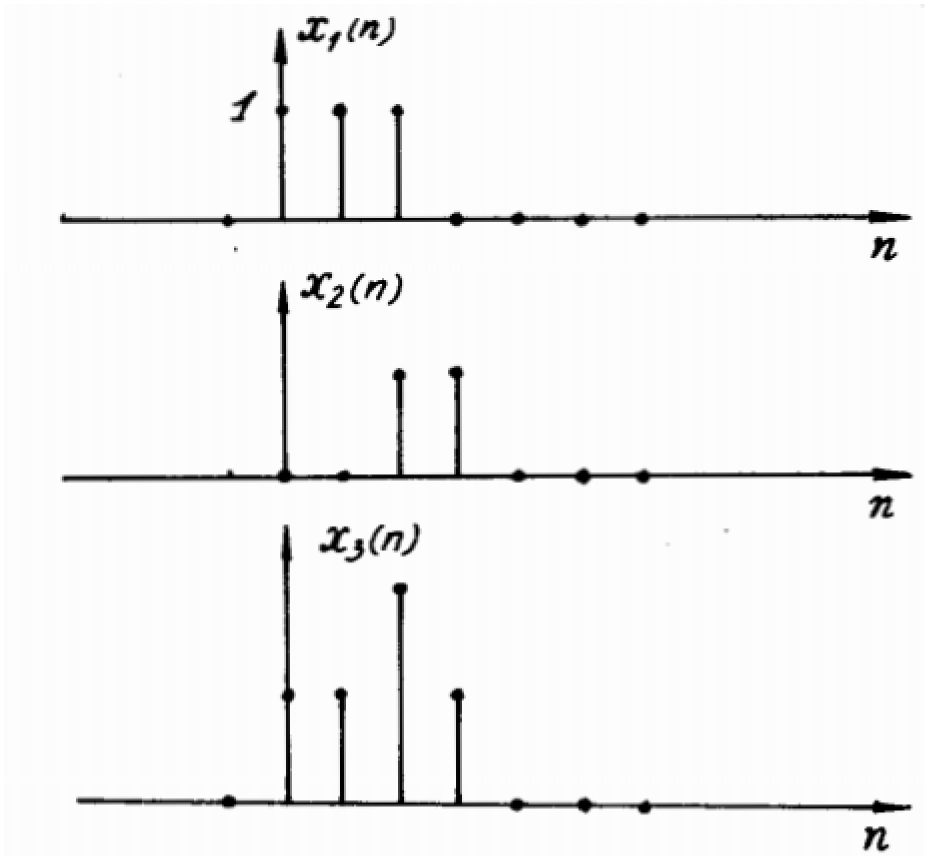
- Tổng của các dãy là tổng của các giá trị mẫu ứng với cùng một trị số của biến độc lập:

VD: Tính tổng hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ với:

$$x_1(n) = rect_3(n)$$
$$x_2(n) = rect_2(n - 2)$$

1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Tổng của hai dãy tính bằng đồ thị:



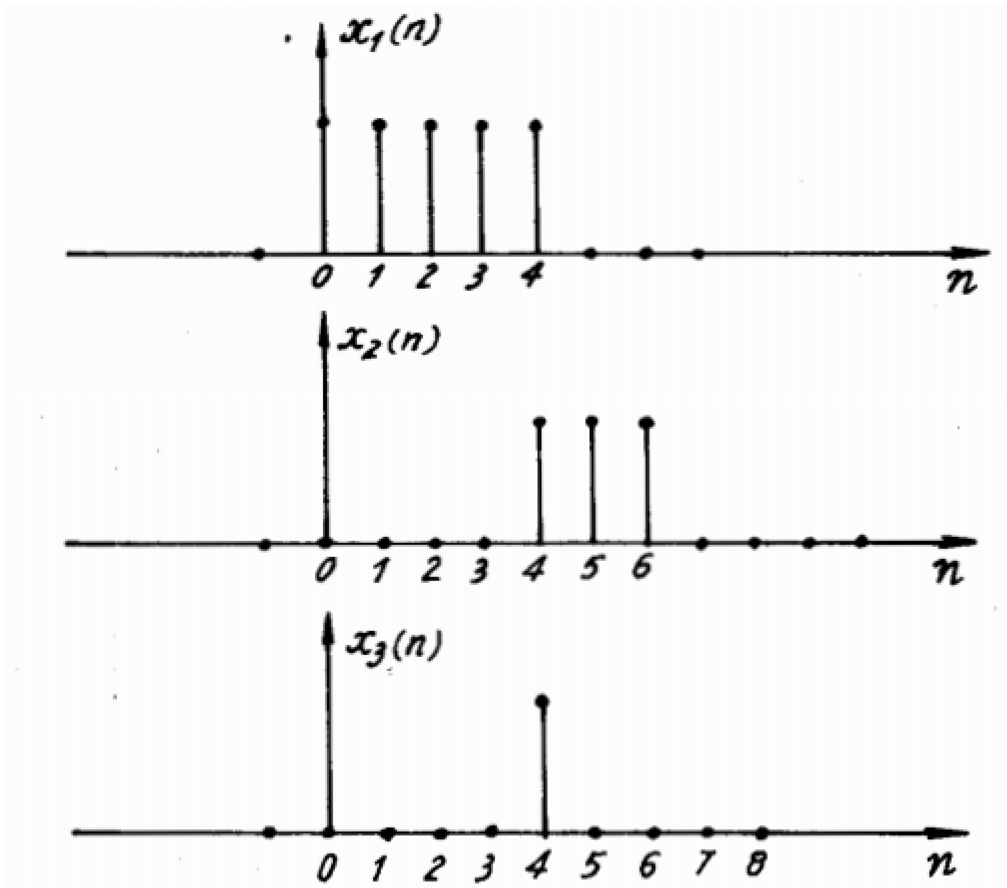
1.2.3.Một số định nghĩa

- Tích của các dãy là tích của các giá trị mẫu ứng với cùng một trị số của biến độc lập.
- VD: tính tích hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ với

$$x_1(n) = rect_3(n)$$
$$x_2(n) = rect_2(n-2)$$

1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Tích của hai dãy tính bằng đồ thị:



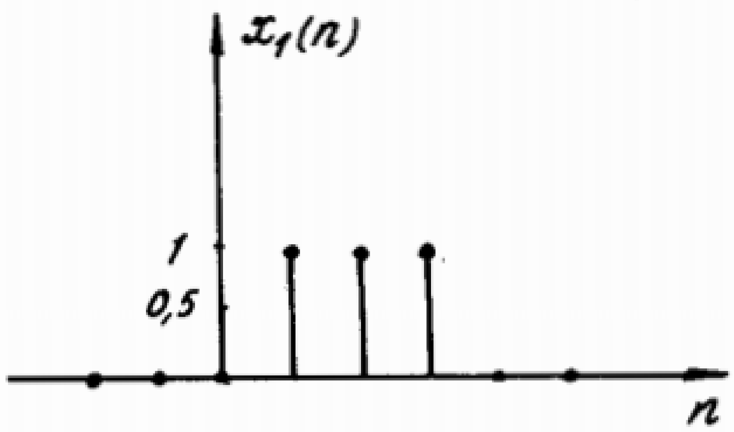
1.2.3.Một số định nghĩa

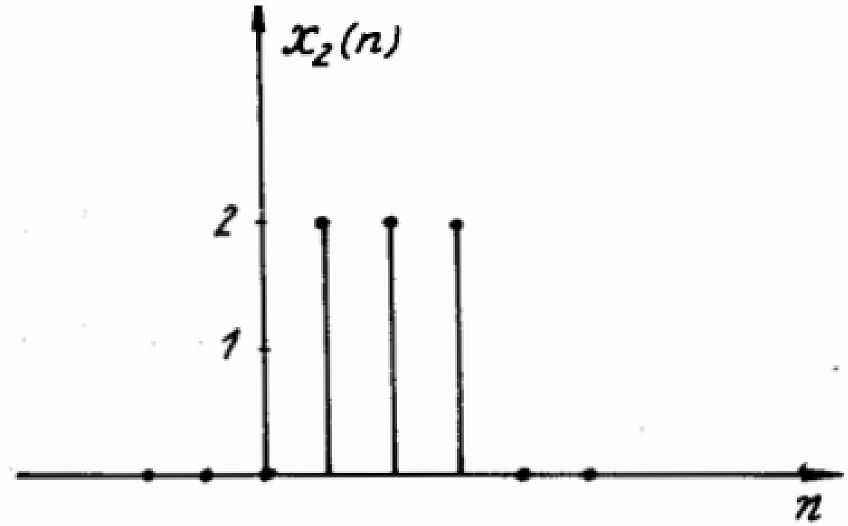
- Tích với hằng số là tích của các giá trị mẫu ứng với hằng số đó.
- VD:

$$x_3(n) = \alpha\, x_1(n)$$

với $\alpha = 2$

$$x_1(n) = rect_3(n-1)$$





1.2.3.Một số định nghĩa

➢ Trễ (Dịch):

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ khác nếu ta có :

$x_2(n) = x_1(n - n_0)$ với mọi n, n_0 số nguyên âm hoặc dương.

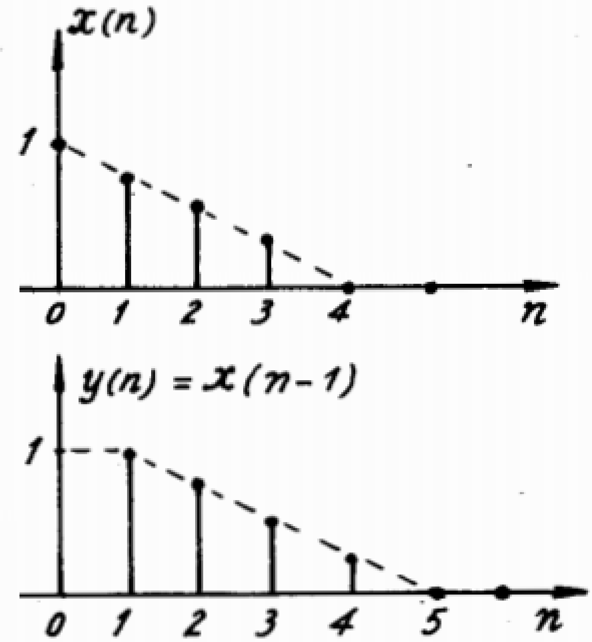
➢ VD:

Hãy tìm dãy trễ $x_2(n)$ của dãy $x_1(n)$ như sau :

$x_2(n) = x_1(n - 1)$

với

$$x_1(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

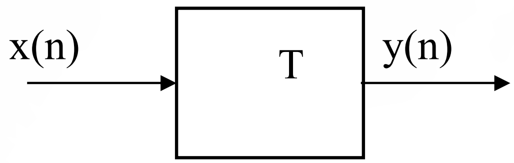


1.3 Các hệ thống tuyến tính bất biến

- 1.3.1.Hệ thống tuyến tính
- 1.3.2. Các hệ tuyến tính bất biến
- 1.3.3. Hệ tuyến tính bất biến và nhân quả

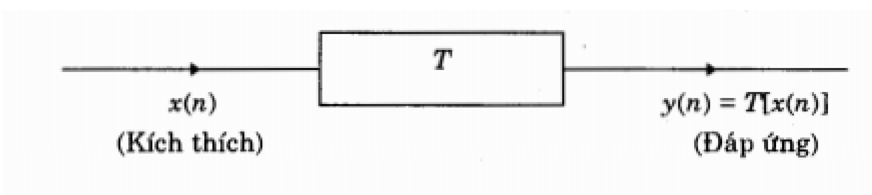
1.3.1.Hệ thống tuyến tính

➢ Một hệ thống xử lý số tổng quát được biểu diễn:



Hệ xử lý tín hiệu

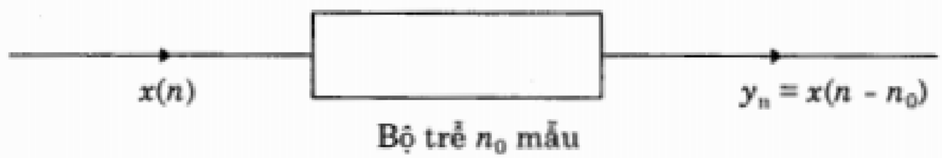
$$y(n) = T[x(n)]$$



1.3.1.Hệ thống tuyến tính

- VD: Toán tử trễ T được biểu diễn:

$$T[x(n)] = x(n - n_0) = y(n)$$



- Hệ thống gọi là tuyến tính khi và chỉ khi toán tử T thỏa mãn nguyên lý xếp chồng;
- Giả sử $y_1(n)$ và $y_2(n)$ là tín hiệu ra của hệ tương ứng với các tín hiệu vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$ hay:
- $$y_1(n) = T[x_1(n)] \text{ và}$$
  $$y_2(n) = T[x_2(n)]$$
- Thì $T[ax_1(n) + bx_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$; Với a,b là các hằng số.

1.3.1.Hệ thống tuyến tính

- Một tín hiệu x(n) bất kỳ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- Khi hệ là tuyến tính thì đáp ứng ra:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

- Đáp ứng xung tuyến tính:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

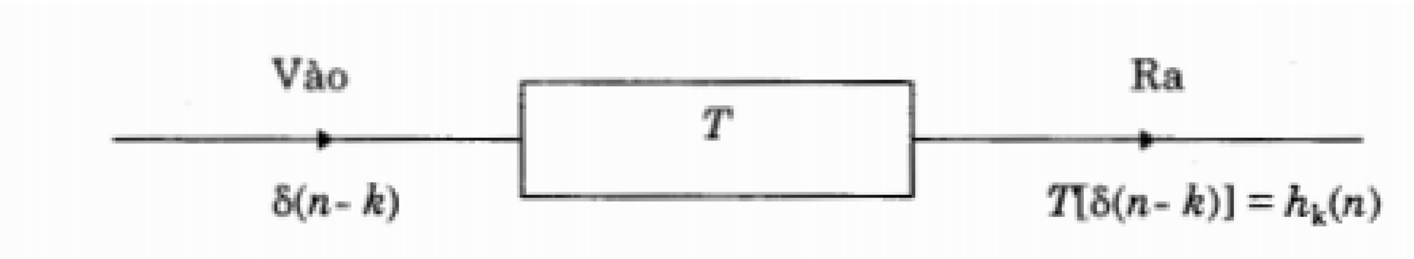
$$\Rightarrow y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n)$$

1.3.1.Hệ thống tuyến tính

- $h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ tuyến tính, hay chính là đầu ra của hệ khi đầu vào là xung đơn vị.



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n)$$

- Các hệ thống tuyến tính được đặc trưng hoàn toàn bởi đáp ứng xung của nó.

- $h_k(n)$ là hàm của k và n, như vậy ở các giá trị k khác nhau sẽ cho ta các đáp ứng xung khác nhau, hệ thống tuyến tính này sẽ phụ thuộc vào biến k, nếu biến k là thời gian, thì ta có hệ thống tuyến tính phụ thuộc vào thời gian.

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

- **Hệ tuyến tính bất biến:** Một hệ tuyến tính là bất biến theo thời gian nếu tín hiệu vào bị dịch đi k mẫu thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi k mẫu.
- Nghĩa là nếu x'(n) = x(n-k) thì y'(n) = y(n-k). Khi một hệ tuyến tính là bất biến ta có: $h_k(n) = h(n-k)$ do đó ta có:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k)$$

- Tương đương như sau:

$$y(n) = x(n)*h(n)$$

Với * được định nghĩa là tích chập của x(n) và h(n)

1.3.2.Hệ thống tuyến tính

➢ VD1: Tính tích chập của hệ thống tuyến tính bất biến với:

$$x(n) = rect_5(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

➢ Theo định nghĩa đáp ứng ra của hệ thống được tính theo công thức:

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = y(n)$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính

Để thu được $y(n)$ ta phải tính $y(n)$ theo từng giá trị của n, về lý thuyết n và k giữ các giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$, như vậy ta không thể tính hết được, nhưng thực tế chúng ta thường làm việc với các dãy có chiều dài hữu hạn. Với mỗi giá trị của $y(n)$ ta phải tính một tổng theo k của tích $x(k)h(n-k)$ như sau :

- Áp dụng vào ví dụ trên ta có:

$x(k) = rect_5(k)$ $\rightarrow$ ta đổi biến n thành k

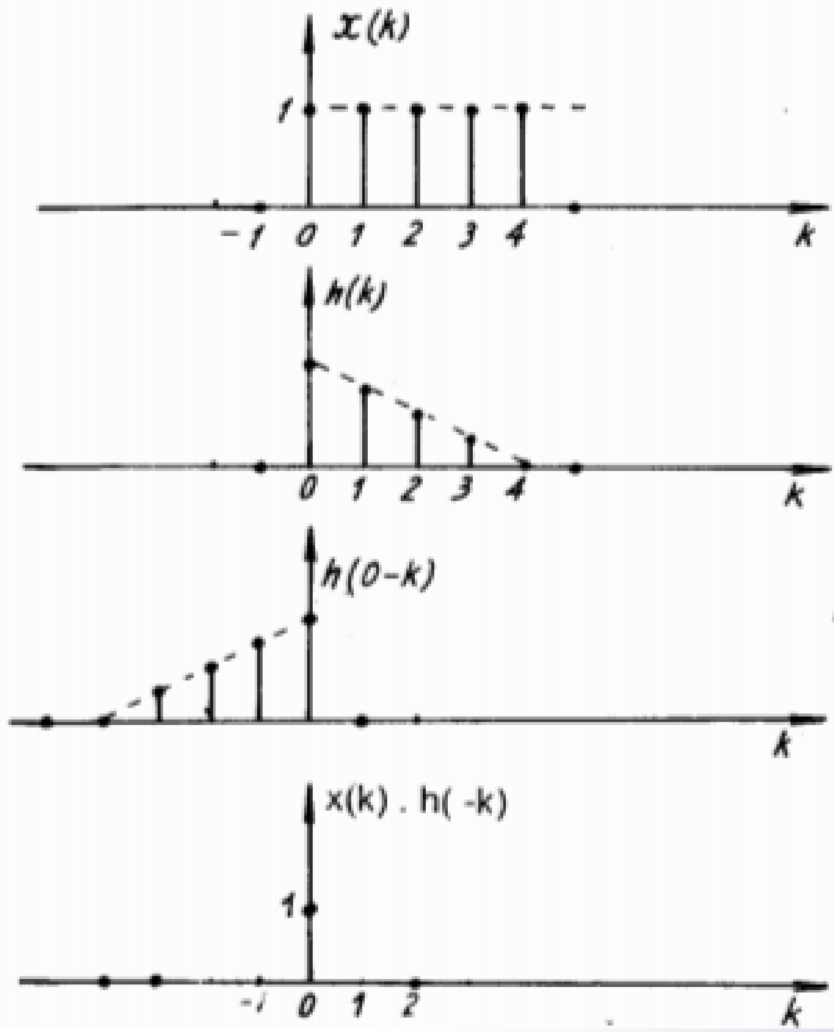
$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-k}{4} & 0 \le n - k \le 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$\rightarrow$ ta đổi biến n thành $n - k$.

$$x(k) = rect_5(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

- Tính bằng đồ thị:

1.3.2.Hệ thống tuyến tính

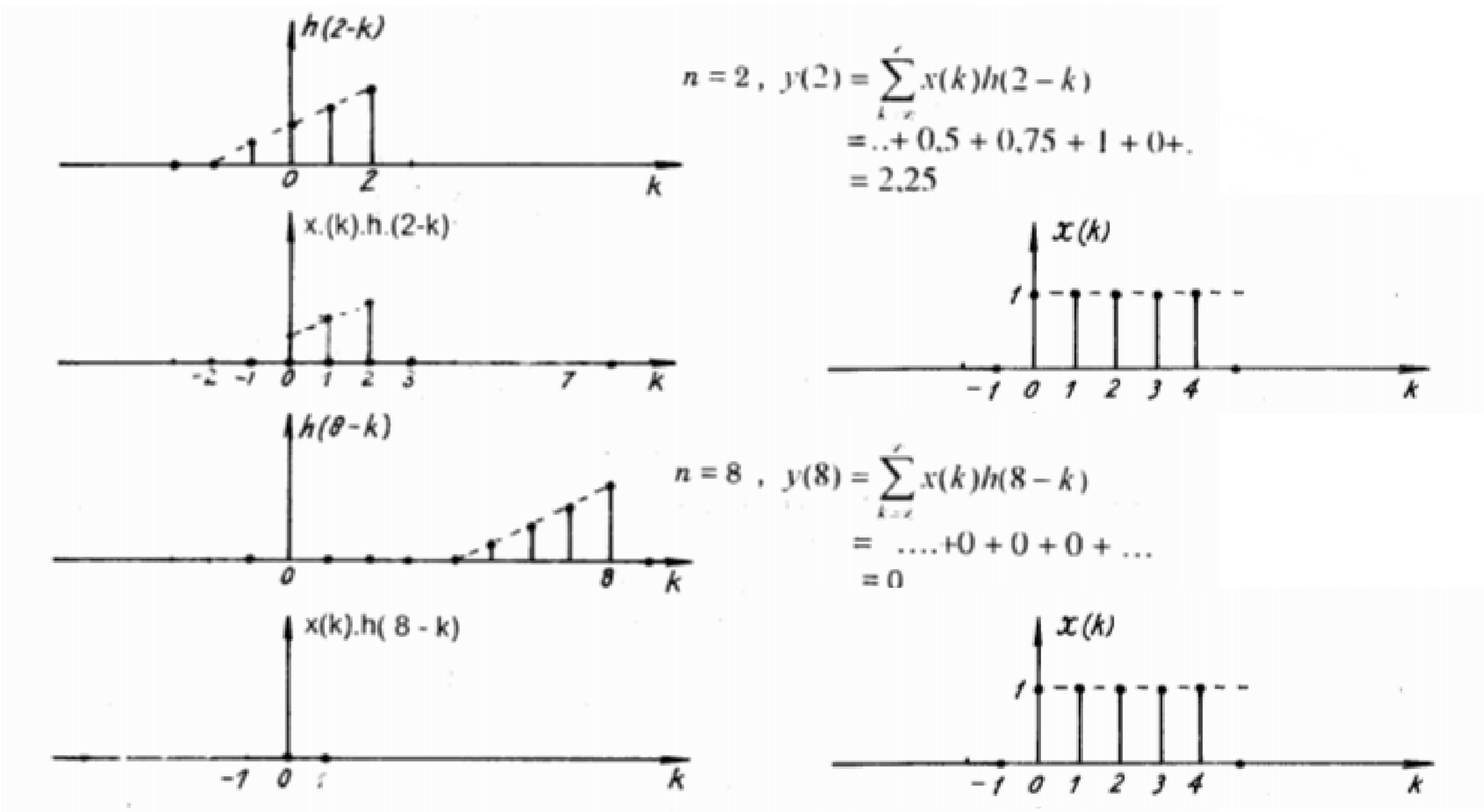


$$n = 0,\quad y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0-k)$$

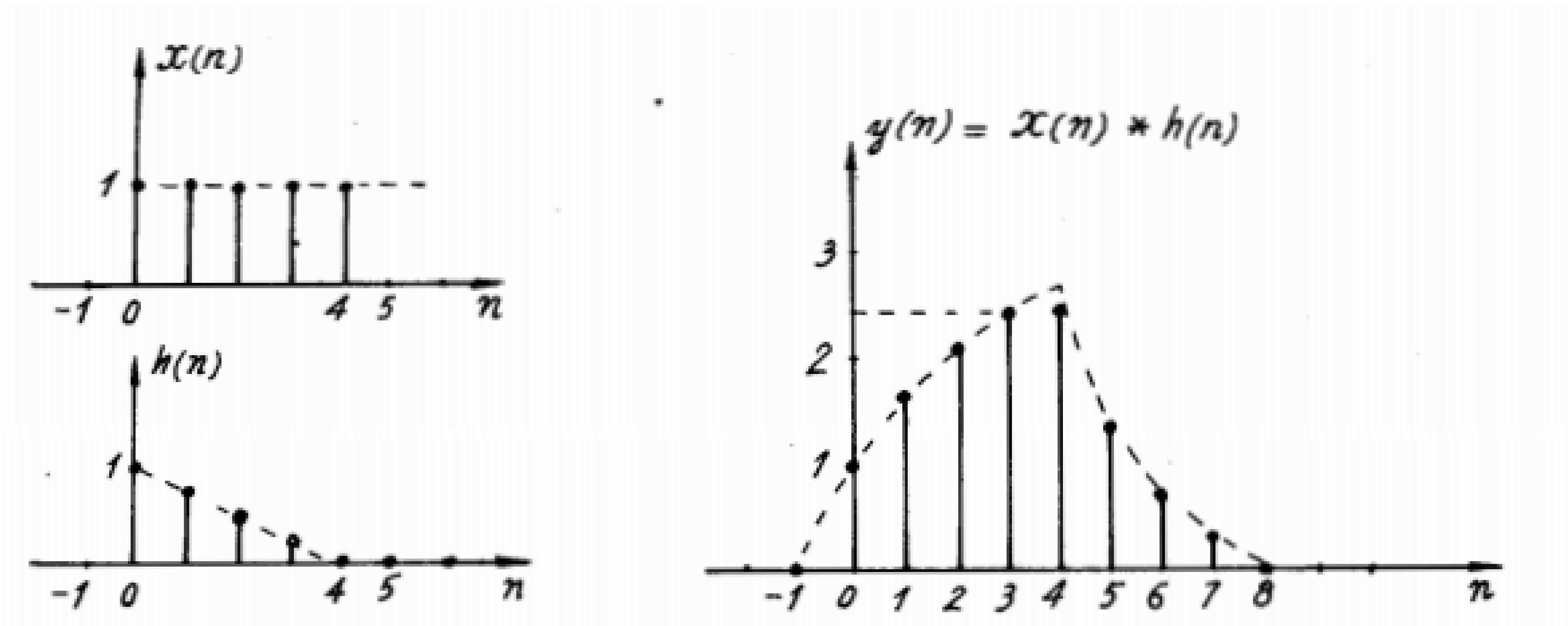
$$= \ldots. + 0 + 1 + 0 + \ldots$$

$$= 1$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính



1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến



1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➢ Tính bằng đại số:

Ta thấy rằng $x(k) = 1$ trong khoảng $0 \le k \le 4$. Vì vậy tổng theo k, $\sum_k$ luôn lấy từ 0 đến4 :

$$\sum_{k=0}^{4} x(k)h(n-k)$$

Còn đối với $h(n-k)$ thì $h(n-k)$ chỉ xác định trong khoảng $0 \le n - k \le 4$, còn ngoài khoảng này, $h(n-k) = 0$, vậy nếu n chạy trong khoảng từ 0 đến 4 : $0 \le n \le 4$, thì k chỉ lấy giá trị lớn nhất là n. Vì nếu $k > n$ thì $(n-k) < 0$ mà $(n-k) < 0$ thì $h(n-k) = 0$, như vậy tổng từ 0 đến 4 theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(n-k) \qquad \text{với } 0 \le n \le 4$$

sẽ thay bằng tổng từ 0 đến n theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \qquad \text{với } 0 \le n \le 4$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➤ Tính bằng đại số:

Còn nếu n chạy trong khoảng từ 5 đến 7 : $5 \le n \le 7$, thì k sẽ lấy giá trị nhỏ nhất là $(n - 4)$, vì nếu $k < n - 4$ (tức là $k \le n - 5$) thì $(n - k) > 4$, mà $(n - k) > 4$ thì $h(n - k)$ không xác định.

Vậy tổng từ 0 đến 4 theo k :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \qquad \text{với } 5 \le n \le 7$$

Sẽ được thay bằng tổng từ $(n - 4)$ đến 4 theo k.

$$y(n) = \sum_{k=n-4}^{4} x(k)h(n-k) \qquad \text{với } 5 \le n \le 7$$

Còn nếu n nằm ngoài khoảng từ 0 đến 7 :

$$n < 0 \quad \text{và} \quad n > 7 \quad \text{thì} \quad y(n) = 0$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

- Tính bằng đại số:

Vậy cuối cùng ta có :

$$y(n)=\begin{cases}(n+1)\left(\dfrac{8-n}{8}\right) & 0\le n\le 4\\ \dfrac{5}{2}\left(3-\dfrac{n}{2}\right)-(n-4)\left(\dfrac{3-n}{8}\right) & 5\le n\le 7\\ 0 & \text{các giá trị còn lại}\end{cases}$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

- VD2:

Tương tự như bài trên hãy tính phép chập $x_3(n) = x_1(n)*x_2(n)$ với:

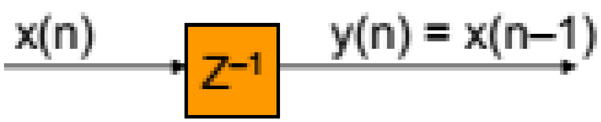
a) $x_1(n) = \begin{cases} 1-\dfrac{n}{3} & n \geq 0 \\ 0 & n \neq \end{cases}$; $x_2(n) = rect_2(n-1)$.

b) $x_1(n) = \delta(n+1) + \delta(n-2)$; $x_2(n) = rect_3(n)$.

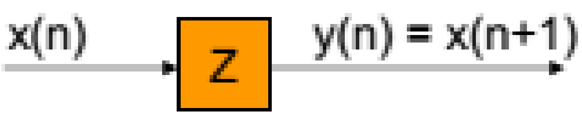
1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➢ Một số ký hiệu cơ bản:

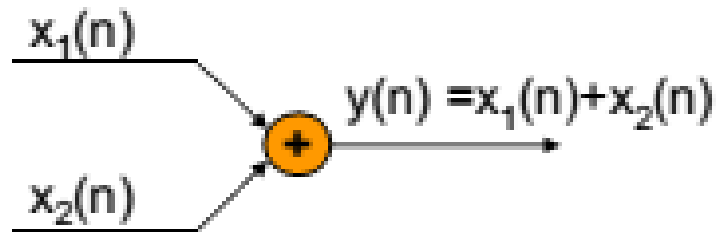
- Bộ trễ đơn vị



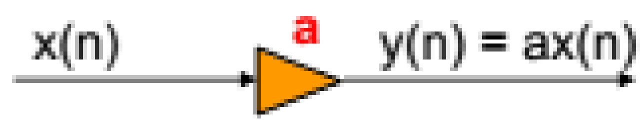
- Bộ tiến đơn vị



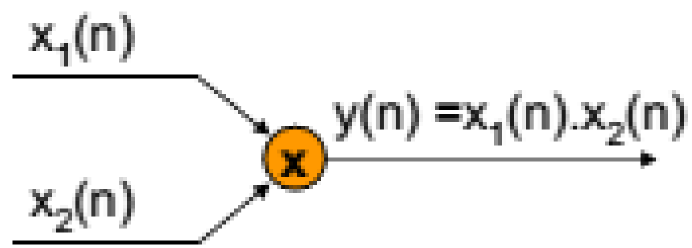
- Bộ cộng



- Bộ co-giãn

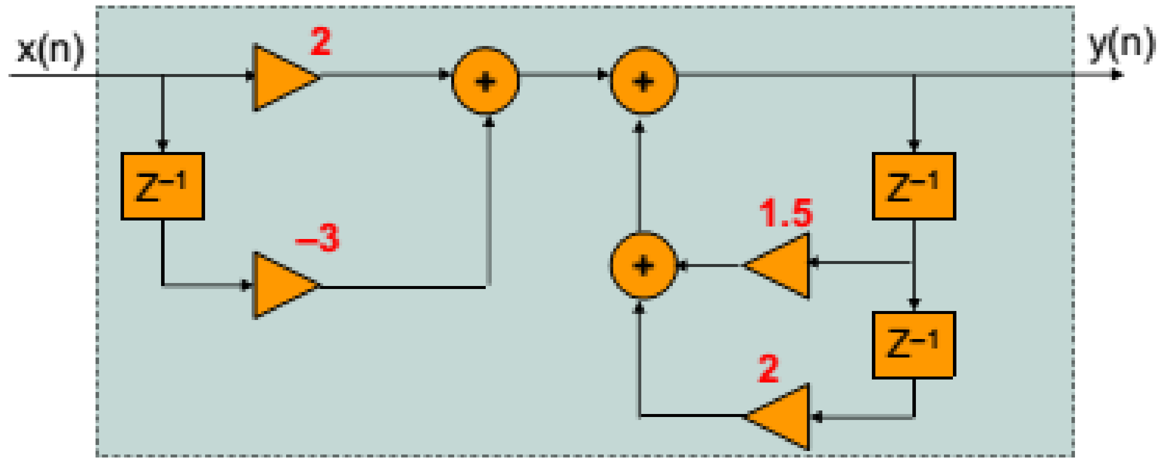


- Bộ nhân



➢ VD: biểu diễn hệ thống:

$$y(n) = 2x(n) - 3x(n-1) + 1.5y(n-1) + 2y(n-2)$$



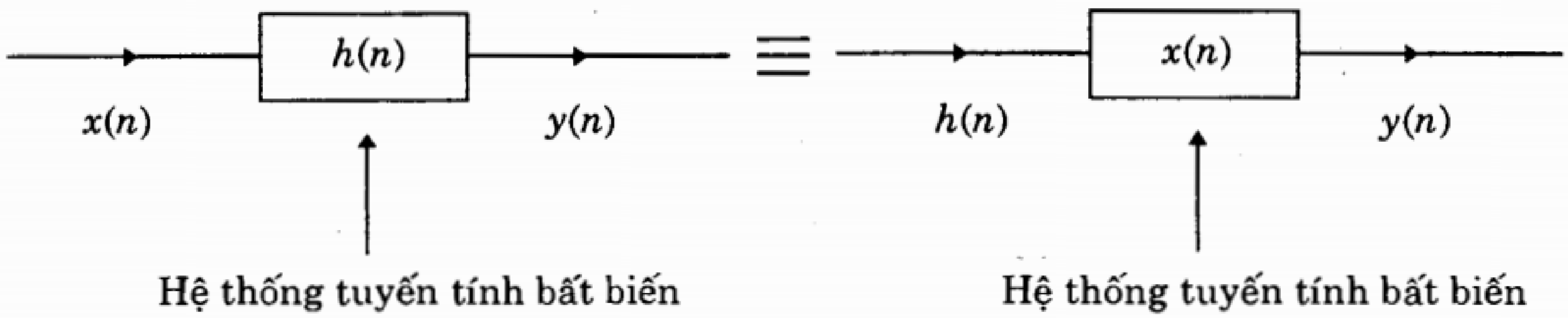
1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

- **Các tính chất:**

- **Tính chất giao hoán:**

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

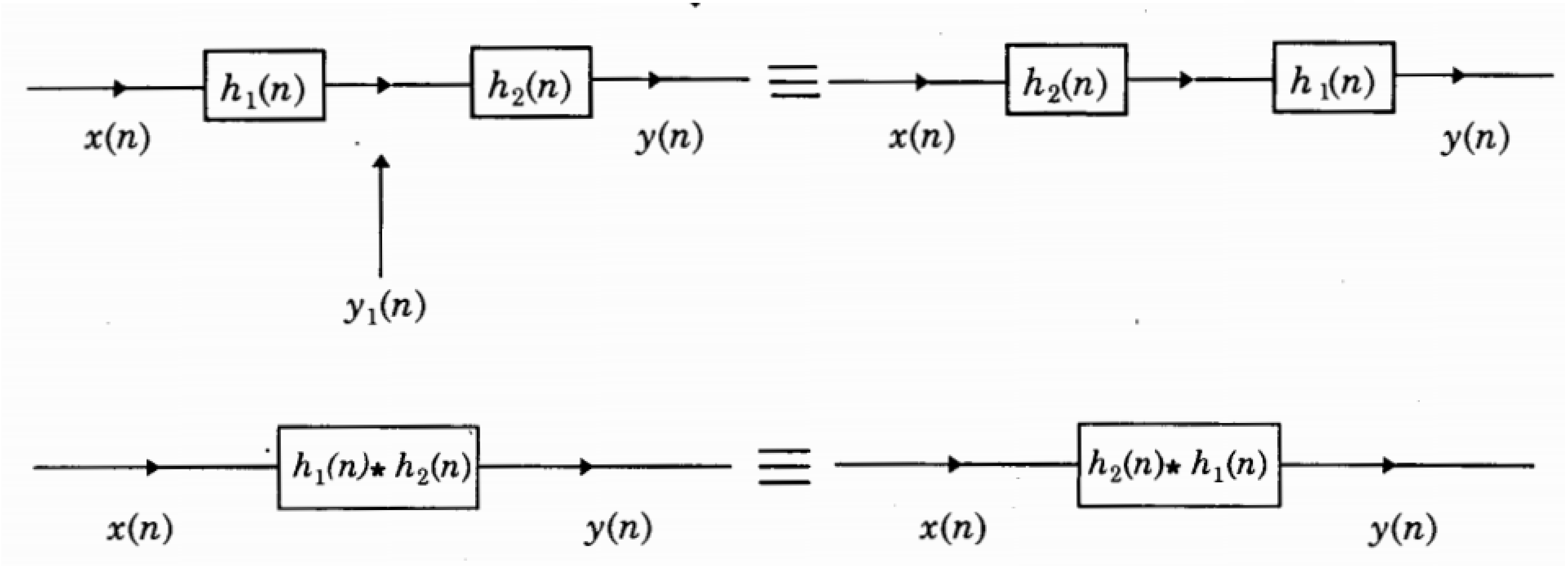


1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➢ **Các tính chất:**

◆ Tính chất kết hợp:

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

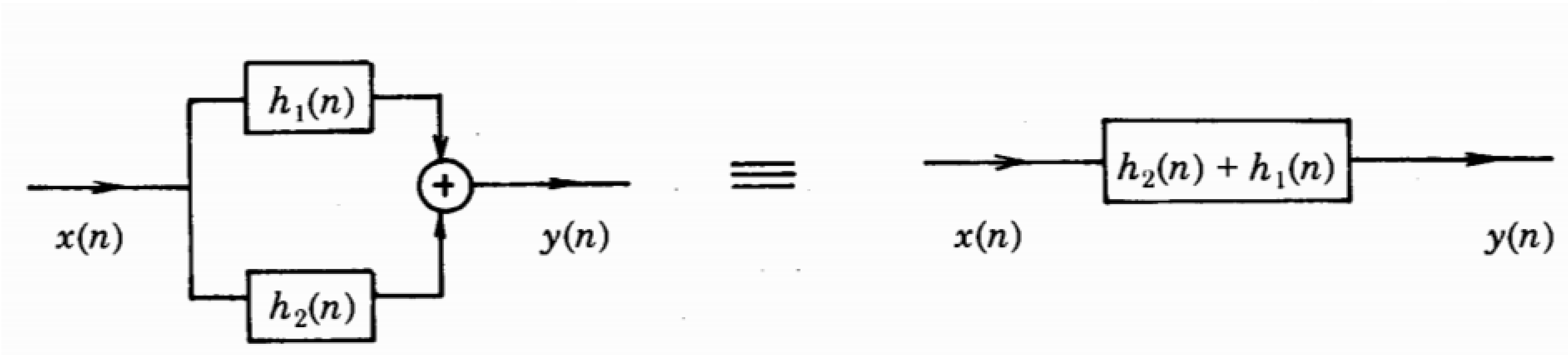


1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➢ **Các tính chất:**

◆ Tính chất phân phối:

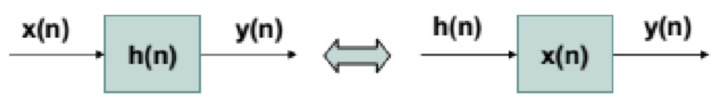
$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] + [x(n) * h_2(n)]$$



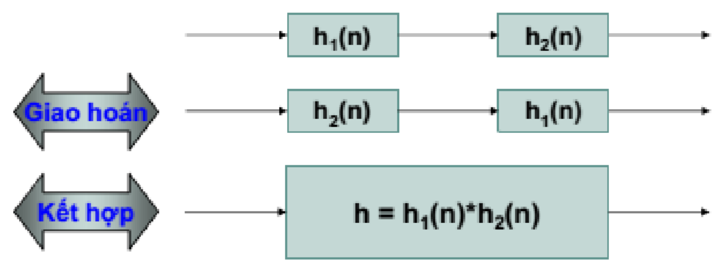
1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

➢ Các tính chất:

- Giao hoán $x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$

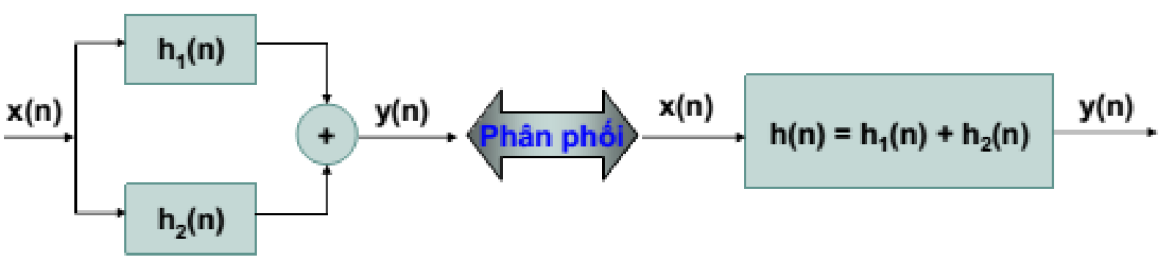


- Kết hợp $[x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$



- Phân phối

$$x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$$



1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến

- **VD1: dùng tích chập, xác định đáp ứng của hệ thống:**

  $x(n) = \{\ldots 0, 1, 2, 1, 1, 0 \ldots\}$ và $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$

1.3.3.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- Một hệ LTI là nhân quả nếu và chỉ nếu các đáp ứng xung của nó bằng 0 đối với các giá trị âm của n [tức, h(n) = 0, ∀n < 0]

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)h(n-k)$$

Qui ước

+ Chuỗi bằng 0 ∀n < 0 → chuỗi nhân quả
+ Chuỗi khác 0 ∀n: n<0 và n>0 → chuỗi không nhân quả

- Nếu t/h nhập là chuỗi nhân quả [x(n) = 0, ∀n < 0]

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{n}x(k)h(n-k)$$

+ Đáp ứng của h/t nhân quả với chuỗi nhân quả là nhân quả [y(n) = 0, ∀n<0]

- Hệ LTI là ổn định nếu hàm đáp ứng xung đơn vị là khả tổng tuyệt đối
  - + Chứng minh

$$Ta\ có\quad \begin{cases} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \\ |x(n)| \le M_x \end{cases}$$

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)||h(k)| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

$$|y(n)| \le M_y < \infty \qquad nếu \qquad S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- Ví dụ: xác định tầm giá trị a, b sao cho hệ LTI sau ổn định

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \ge 0 \\ 1 & -1 \le n < 0 \\ b^n & n < -1 \end{cases}$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- Hệ có đáp ứng xung hữu hạn – FIR (Finite-duration Impulse Response)
  - + h(n) = 0 ∀n: n < 0 và n ≥ M

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

  - + Hệ FIR có bộ nhớ độ dài M

- Hệ có đáp ứng xung vô hạn – IIR (Infinite-duration Impulse Response)
  - + Giả sử h/t có tính nhân quả

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

  - + Hệ IIR có bộ nhớ vô hạn

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD1:

Hãy xác định xem các hệ có phương trình mô tả quan hệ vào ra dưới đây có tuyến tính không:

a) $y(n) = nx(n)$

b) $y(n) = x^2(n)$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- VD1:

a) Đối với các chuỗi xung đầu vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$, tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1(n) = nx_1(n)$$

$$y_2(n) = nx_2(n)$$

Liên hợp tuyến tính hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$\begin{aligned} y_3(n) &= H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = n[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \\ &= a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n) \end{aligned}$$

Trong khi đó liên hợp hai tín hiệu ra y_1 y_2 tạo nên tín hiệu ra:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1nx_1(n) + a_2nx_2(n)$$

So sánh 2 phương trình ta suy ra hệ là tuyến tính.

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD1:

Đáp ứng của hệ đối với hai tín hiệu vào riêng rẽ là:

$$y_1(n) = x_1^2(n)$$

$$y_2(n) = x_2^2(n)$$

Đáp ứng của hệ với liên hợp tuyến tính hai tín hiệu là:

$$y_3(n) = H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2$$
$$= a_1^2x_1^2(n) + +2a_1a_2x_1(n)x_2(n) + a_2^2x_2^2(n)$$

Ngược lại, nếu hệ tuyến tính, nó sẽ tạo ra liên hợp tuyến tính từ hai tín hiệu, tức là:

$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$$

Vì tín hiệu ra của hệ như đã cho không bằng nhau nên hệ là không tuyến tính.

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- VD1:

Đáp ứng của hệ đối với hai tín hiệu vào riêng rẽ là:

$$y_1(n) = x_1^2(n)$$

$$y_2(n) = x_2^2(n)$$

Đáp ứng của hệ với liên hợp tuyến tính hai tín hiệu là:

$$y_3(n) = H[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = [a_1x_1(n) + a_2x_2(n)]^2$$
$$= a_1^2x_1^2(n) + +2a_1a_2x_1(n)x_2(n) + a_2^2x_2^2(n)$$

Ngược lại, nếu hệ tuyến tính, nó sẽ tạo ra liên hợp tuyến tính từ hai tín hiệu, tức là:

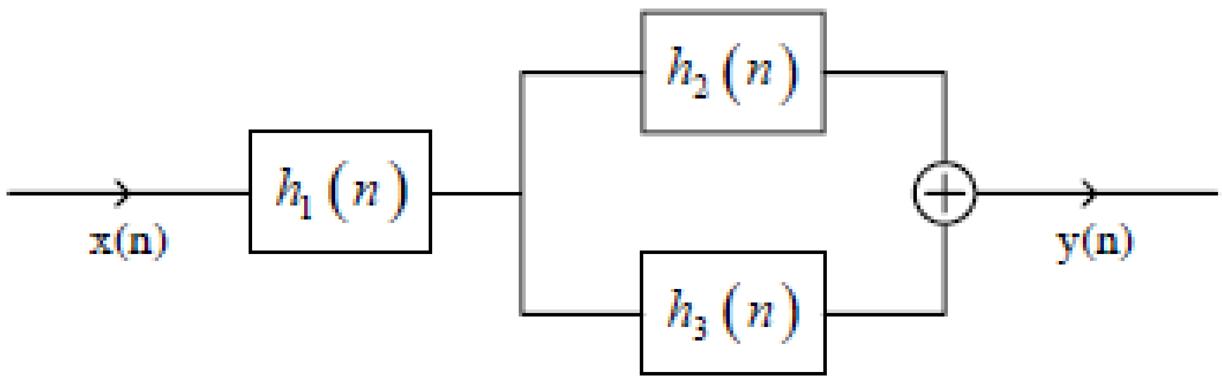
$$a_1y_1(n) + a_2y_2(n) = a_1x_1^2(n) + a_2x_2^2(n)$$

Vì tín hiệu ra của hệ như đã cho không bằng nhau nên hệ là không tuyến tính.

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD2:

Hãy tìm đáp ứng xung h(n) của một hệ thống số được cho bởi sơ đồ sau đây:



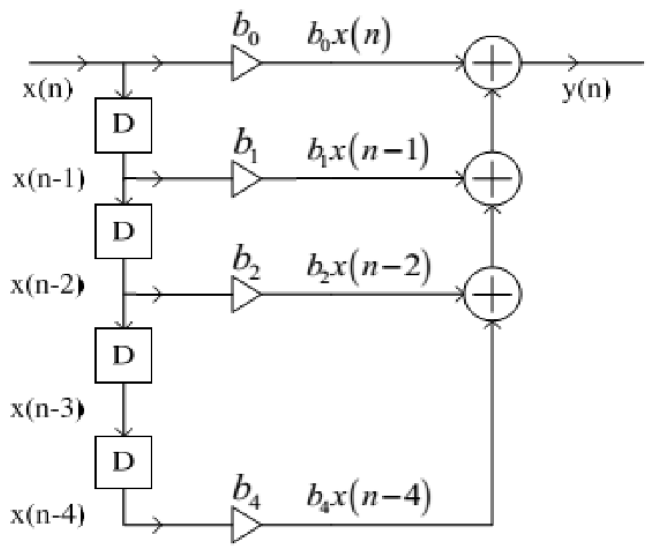
1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD3:

Cho một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

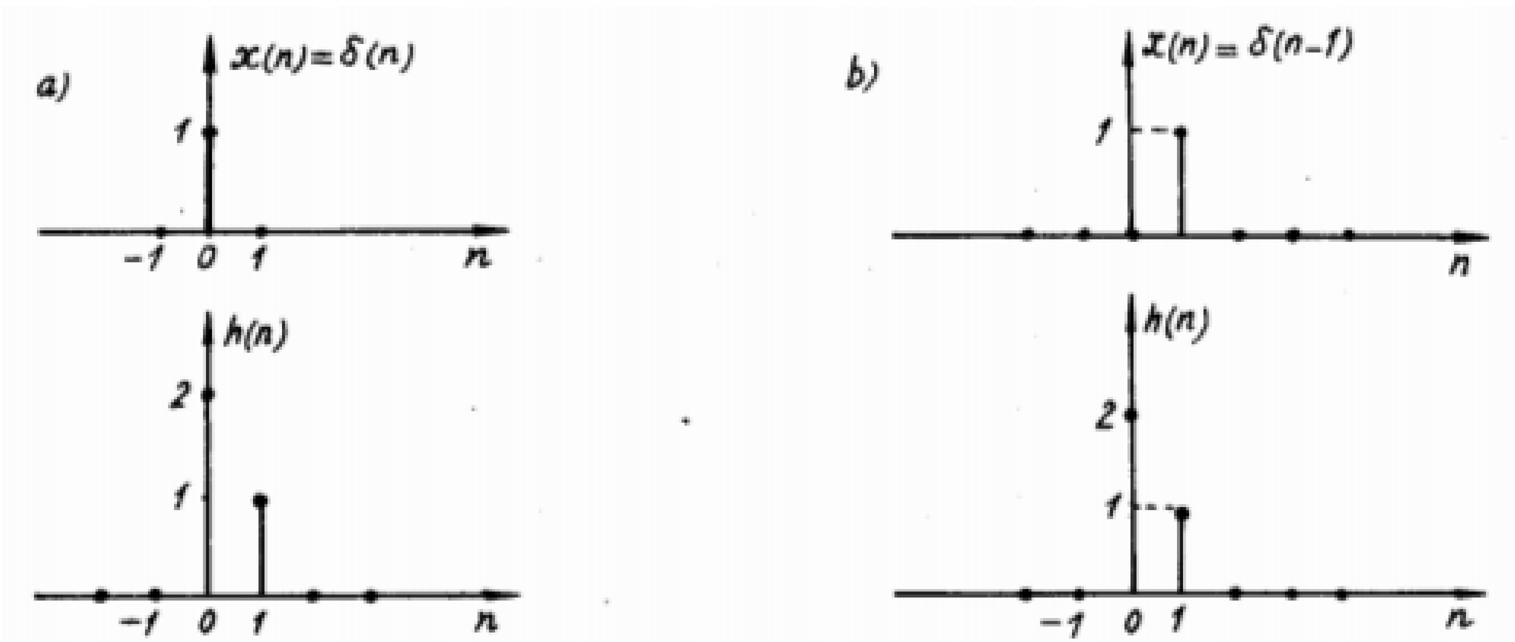
$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + b_4 x(n-4)$$

Hãy biểu diễn hệ thống đó.



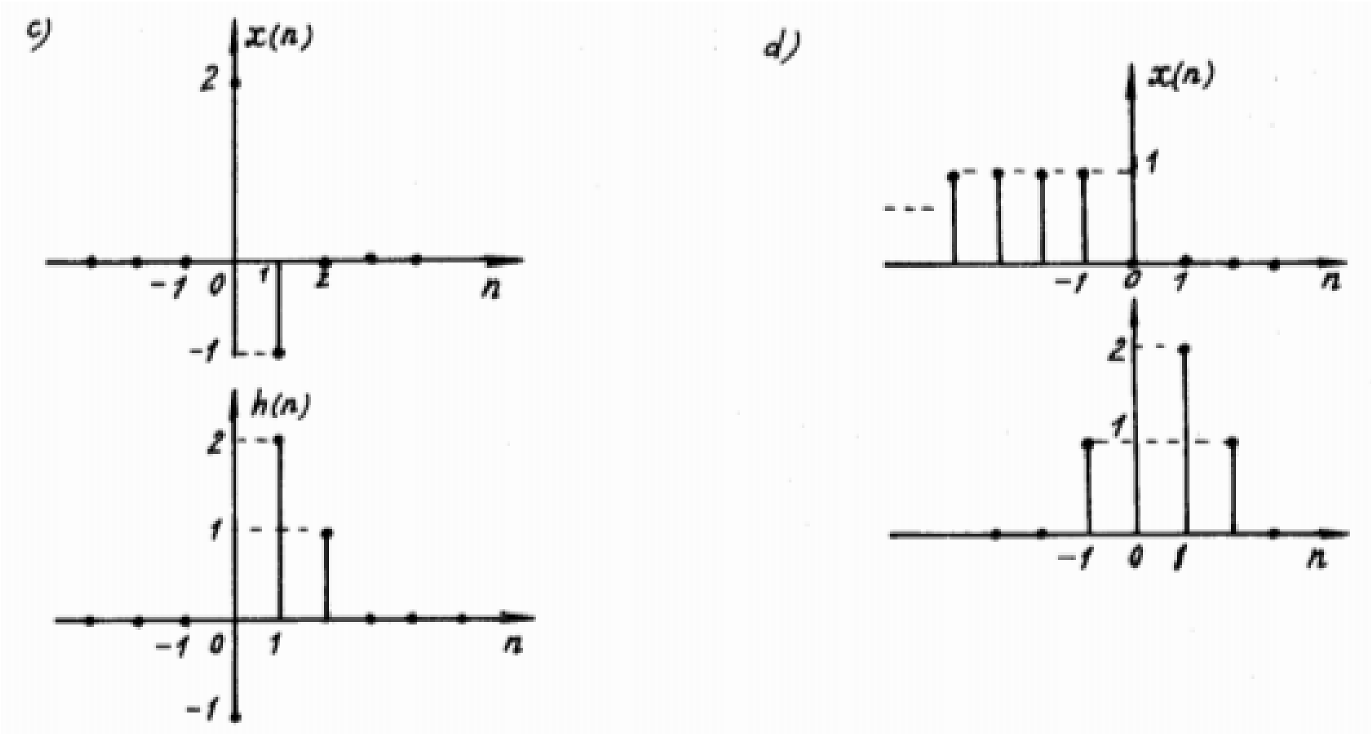
1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD4: Hãy tính các tích chập : $x(n) * h(n) = y(n)$



1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

➢ VD4: Hãy tính các tích chập : $x(n) * h(n) = y(n)$



➢ VD5:

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

a) $x_1(n) = \begin{cases} n & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

$x_2(n) = rect_6(n)$

b) $x_1(n) = rect_7(n)$

$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{8} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

c) $x_1(n) = rect_3(n - 2)$

$x_2(n) = rect_5(n - 1)$

d) $x_1(n) = u(n - 3)$

$x_2(n) = rect_4(n - 1)$

e) $x_1(n) = u(n - 2)$

$x_2(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{6} & 2 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

f) $x_1(n) = \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \delta(n - 3)$

$x_2(n) = \begin{cases} 1 - n & 0 \le n \le 3 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- VD6:

Hãy tìm đáp ứng ra của hệ thống tuyến tính bất biến

a) $x(n) = rect_3(n)$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & -2 \le n \le 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

b) $x(n) = rect_3(n+5)$

$$h(n) = \begin{cases} n+1 & -3 \le n \le 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- VD7:

Chúng ta có hai hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$ và $h_2(n)$ ghép nối tiếp với nhau với:

$$h_1(n) = h_2(n) = u(n) - u(n-3)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tổng quát.

Hãy nhận xét tính ổn định và tính nhân quả của chúng.

1.3.2.Hệ thống tuyến tính bất biến-nhân quả

- VD8:

Cho hai tín hiệu rời rạc $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$$x_1(n) = \frac{1}{2} rect_2(n) + u(n-2)$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2} u(n)$$

Tìm đáp ứng ra của các hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ và $h_4(n)$ với từng kích thích vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

Nhận xét tính bất biến nhân quả và tính ổn định.

Cho : $h_1(n) = rect_9(n+3)$

$$h_2(n) = rect_6(n)$$

$$h_3(n) = rect_3(n-3)$$

$$h_4(n) = rect_3(n+3)$$

1.4 Đệ qui

- Trung bình tích lũy của t/h x(n) trong khoảng $0 \le k \le n$

$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

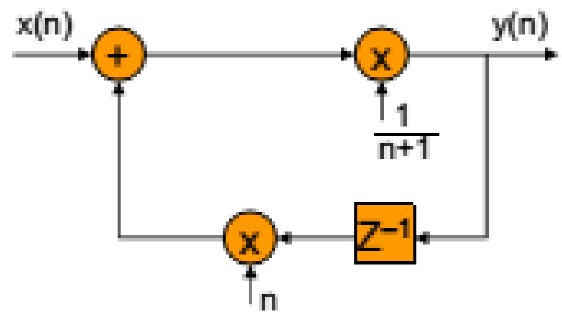
  ✦ Việc tính y(n) đòi hỏi lưu trữ tất cả giá trị của x(k)
  $\Rightarrow$ khi n tăng, bộ nhớ cần thiết cũng tăng

- Cách khác để tính y(n): đệ qui

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)$$

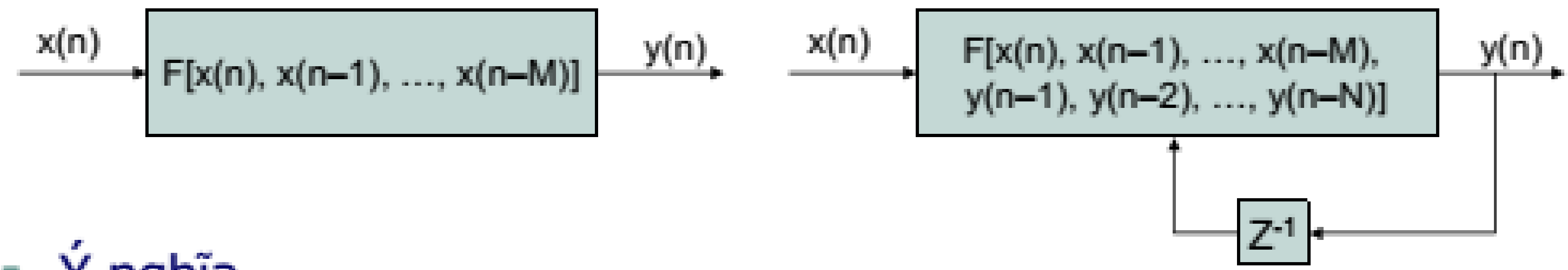
  - $y(n_0 - 1)$: điều kiện đầu



- H/t đệ qui là hệ có y(n) phụ thuộc không chỉ t/h nhập mà còn giá trị quá khứ của ngõ xuất

1.4 Đệ qui

- H/t không đệ qui nếu $y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$
- Khác nhau cơ bản giữa h/t đệ qui và h/t không đệ qui



- Ý nghĩa
  - H/t đệ qui phải tính các giá trị ngõ xuất ở quá khứ trước
  - H/t không đệ qui có thể xác định giá trị ngõ xuất ở thời điểm bất kỳ mà không cần tính giá trị ngõ xuất ở quá khứ
  - Hệ đệ qui: hệ tuần tự
  - Hệ không đệ qui: hệ tổ hợp

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- Tập con của h/t đệ qui và không đệ qui
- Ví dụ h/t đệ qui được mô tả bởi PTSP bậc 1: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$
  - Phương trình xuất nhập cho hệ LTI
  - Tác động vào h/t t/h $x(n)$ $\forall n \geq 0$ và giả sử tồn tại $y(-1)$

    $y(0) = ay(-1) + x(0)$

    $y(1) = ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1)$

    ...

    $y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^{n+1}y(-1) + a^nx(0) + a^{n-1}x(1) + \ldots + ax(n-1) + x(n)$

    Hoặc

    $$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \qquad \forall n \geq 0$$

  - Nếu h/t nghỉ tại n=0, bộ nhớ của nó bằng 0, do đó $y(-1) = 0$
    - Bộ nhớ biểu diễn trạng thái h/t → h/t ở trạng thái 0 (đáp ứng trạng thái 0 hoặc đáp ứng cưỡng bức – $y_{zs}(n)$)

      $$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

    - Đây là tích chập của $x(n)$ và $h(n) = a^nu(n)$
    - Đáp ứng trạng thái 0 phụ thuộc bản chất h/t và t/h nhập

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- Nếu h/t không nghỉ [tức y(−1) ≠ 0] và x(n) = 0 ∀n: hệ thống không có t/h nhập
  - Đáp ứng không ngõ nhập (hay đáp ứng tự nhiên) $y_{zi}(n)$

    $$y_{zi}(n) = a^{n+1}y(-1)$$

  - H/t đệ qui với điều kiện đầu khác không là hệ không nghỉ, tức nó vẫn tạo ra đáp ứng ngõ ra ngay cả khi không có t/h nhập (đáp ứng này do bộ nhớ của h/t)
  - Đáp ứng không ngõ nhập đặc trưng cho chính h/t: nó phụ thuộc bản chất h/t và điều kiện đầu
- Tổng quát $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$
- Dạng tổng quát của PTSPTT HSH

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$hoac$$

  - N: bậc của PTSP

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (a_0 \equiv 1)$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- Xem lại các t/chất tuyến tính, bất biến thời gian và ổn định của h/t đệ qui được mô tả bằng PTSP TT HSH
  - Hệ đệ qui có thể nghỉ hay không tùy vào điều kiện đầu
- Tuyến tính
  - Hệ là tuyến tính nếu nó thỏa
    1. Đáp ứng toàn phần bằng tổng đáp ứng trạng thái không và đáp ứng không ngõ nhập $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$
    2. Nguyên tắc xếp chồng áp dụng cho đáp ứng trạng thái không (tuyến tính trạng thái không)
    3. Nguyên tắc xếp chồng áp dụng cho đáp ứng không ngõ nhập (tuyến tính không ngõ nhập)

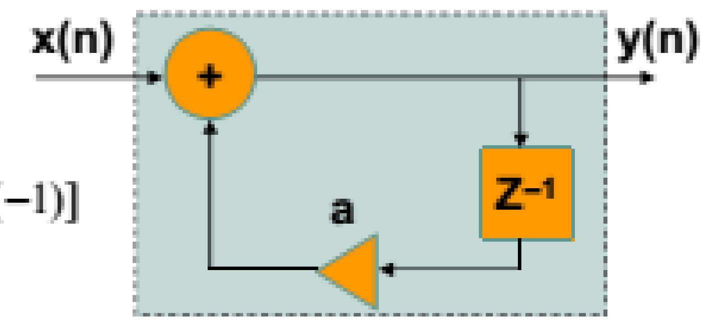
  - Hệ không thoả một trong 3 đ/k trên là hệ phi tuyến
  - Hệ đệ qui được mô tả bằng PTSP HSH thỏa cả 3 đ/k trên → tuyến tính

- Ví dụ: xét tính chất tuyến tính của hệ y(n) = ay(n–1) + x(n)
  - Đ/k 1.

$$\left.\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) && \forall n \geq 0 \\ y_{zi}(n) &= a^{n+1} y(-1) && \forall n \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

  - Đ/k 2.
    - Giả sử $x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k [c_1x_1(n-k) + c_2x_2(n-k)] \\ &= c_1 \sum_{k=0}^{n} a^k x_1(n-k) + c_2 \sum_{k=0}^{n} a^k x_2(n-k) \\ &= c_1 y_{zs}^{(1)}(n) + c_2 y_{zs}^{(2)}(n) \end{aligned}$$



  - Đ/k 3.
    - Giả sử $y(-1) = c_1y_1(-1) + c_2y_2(-1)$

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= a^{n+1} y(-1) = a^{n+1}[c_1 y_1(-1) + c_2 y_2(-1)] \\ &= c_1 a^{n+1} y_1(-1) + c_2 a^{n+1} y_2(-1) \\ &= c_1 y_{zi}^{(1)}(n) + c_2 y_{zi}^{(2)}(n) \end{aligned}$$

  - Vậy y(n) tuyến tính

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- Bất biến thời gian
  - a_k và b_k là hằng số → PTSP HSH là bất biến theo thời gian
  - H/t đệ qui được mô tả bằng PTSP HSH là LTI
- Ổn định
  - H/t BIBO ổn định nếu và chỉ nếu với mọi ngõ nhập hữu hạn và mọi điều kiện đầu hữu hạn, đáp ứng của toàn h/t là hữu hạn
  - Ví dụ: xác định giá trị a để h/t $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ổn định
    - Giả sử $|x(n)| \le M_x < \infty \quad \forall n \ge 0$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \qquad \le \left|a^{n+1}y(-1)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)\right|$$

$$\le |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \sum |a|^k$$

$$\le |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \equiv M_y$$

    - n hữu hạn ⇒ M_y hữu hạn và y(n) hữu hạn độc lập với giá trị a
    - Khi $n \to \infty$, M_y hữu hạn chỉ nếu $|a| < 1 \Rightarrow M_y = M_x/(1 - |a|)$
    - Vậy h/t chỉ ổn định nếu $|a| < 1$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- **Hoặc:**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (a_0 \equiv 1)$$

- **Trong đó: N là bậc của phương trình sai phân.**
- **Tính chất:**
  - ❖ **Tuyến tính**
  - ❖ **Bất biến**
  - ❖ **Ổn định**

- VD1: Cho hai hệ thống tuyến tính:

$$(1) \qquad y(n) = n\,x(n)$$
$$(2) \qquad y(n) = 2\,x(n) + 3\,x(n-1)$$

- Hãy tìm các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$?
- Với hệ thống (1):

$$: N = 0 \;;\; M = 0 \Rightarrow \text{là hệ thống bậc 0}$$
$$a_0(n) = 1 \;;\; a_1(n) = \ldots = a_n(n) = 0$$
$$b_0(n) = n \;;\; b_1(n) = \ldots = b_M(n) = 0$$

Ở đây $a_0(n) = 1$ là hằng số, nhưng $b_0(n) = n$ là phụ thuộc biến số n, $b_0(n)$ không phải là hằng số.

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ Với hệ thống (2):

$N = 0$; $M = 1 \Rightarrow$ là hệ thống bậc 0

$a_0(n) = 1$; $a_1(n) = \ldots = a_n(n) = 0$

$b_0(n) = 2$; $b_1(n) = 3$; $b_2(n) = \ldots = b_M(n) = 0$

Ở đây các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ đều là hằng số độc lập với n.

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân TT HSH:**

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- **Tương đương:**

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

  - **$y_h(n)$ gọi là đáp ứng thuần nhất**
  - **$y_p(n)$ gọi là đáp ứng riêng phần**

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➤ Nghiệm của phương trình thuần nhất:

Phương trình thuần nhất là phương trình không có thành phần thứ hai, tức là ta tìm $y(n)$ ứng với đầu vào $x(n) = 0$, nghiệm này ta ký hiệu là $y_0(n)$.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

➤ Thông thường $y_0(n)=\alpha^n$ nên phương trình thuần nhất:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha^{n-k} = 0$$

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{N-1}\alpha^{n-(N-1)} + a_N\alpha^{n-N} = 0$$

$$\alpha^{n-N}(a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\alpha + a_N) = 0$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ Nghiệm của phương trình thuần nhất:

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \ldots + a_{N-1}\alpha + a_N = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống, và đa thức bên trái gọi là đa thức đặc trưng, đa thức này có bậc là N.

➢ Nghiệm đơn:

$$y_0(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \ldots + A_{N-1}\alpha_{N-1}^n + A_N\alpha_N^n = \sum_{k=1}^{N} A_k\alpha_k^n$$

➢ Nghiệm bội:

$$y_0(n) = A_1\alpha_1^n + A_{20}\alpha_2^n + A_{21}n\alpha_2^n + A_{22}n^2\alpha_2^n + \ldots + A_{2(l-1)}n^{l-1}\alpha_2^n + \ldots + A_N\alpha_N^n$$

$$\Rightarrow y_0(n) = A_1\alpha_1^n + (A_{20} + A_{21}n + \ldots + A_{2(l-1)}n^{l-1})\alpha_2^n + \ldots + A_{N-1}\alpha_{N-1}^n + A_N\alpha_N^n$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **Nghiệm của phương trình riêng phần:**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Nghiệm riêng này ta ký hiệu là $y_p(n)$.
Thông thường dạng của $y_p(n)$ được chọn giống như dạng của $x(n)$.

- **Nghiệm tổng quát= nghiệm thuần nhất+ nghiệm riêng phần**

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n)$$

- **VD1: Giải phương trình sai phân:**

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 0$ và $x(n) = n$.

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **VD1:**
  - **Từ phương trình ta có phương trình thuần nhất:**

$$y(n) + 2y(n-1) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n

$$\Rightarrow \qquad \alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0$$

$$\alpha^{n-1}(\alpha + 2) = 0$$

Phương trình đặc trưng là :

$$\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2$$

Phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm đơn $\alpha_1 = -2$

$$\Rightarrow \qquad y_0(n) = A_1\alpha_1^n = A_1(-2)^n$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **VD1:**
  - **Từ phương trình ta có phương trình riêng:**

$$y(n) + 2y(n-1) = n$$

Vậy $y_p(n)$ có dạng giống $x(n) = n$

$$\Rightarrow \quad : \quad y_p(n) = Bn + C$$

Thay vào phương trình ta sẽ tìm được B và C :

$$Bn + C + 2[B(n-1) + C] = n$$

$$Bn + C + 2Bn - 2B + 2C = n$$

Đồng nhất các hệ số của 2 vế ta có :

$$B = \frac{1}{3} \quad ; \quad C = \frac{2}{9} \qquad \Rightarrow y_p(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

➢ VD1:

❖ Tổng hợp ta có nghiệm của phương trình là:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}$$

❖ Xác định hệ số A_1:

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có :

$$y(-1) = A_1(-2)^{-1} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = -\frac{2}{9}$$

❖ Vậy:

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\left[1 - (-2)^n\right] & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ **VD2:**

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 2x(n) + x(n-1)$$

$$y(-1) = 0 \text{ và } x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ta có phương trình thuần nhất

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0$$

Chọn dạng $y_0(n)$ là α^n, ta có :

$$\alpha^n - \frac{1}{2}\alpha^{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha^{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\alpha - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \qquad y_0(n) = A_1\,\alpha_1^n = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ VD2:

Ta có phương trình có thành phần thứ hai.

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=2.\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$y_p(n) = B\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Như thế $y_p(n)$ sẽ trùng với $y_0(n)$, vậy ta phải chọn $y_p(n)$ có dạng sau :

$$y_p(n) = Bn\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \quad Bn\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{1}{2}B(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **VD2:**

Đồng nhất hệ số của hai vế, ta có :

$$\Rightarrow \qquad B = 4$$

Vậy ta có :

$$y_p(n) = 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dựa vào điều kiện đầu $y(-1) = 0$, ta có :

$$y(-1) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A_1 = 4$$

- **VD2:**

Vậy ta có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân bậc 1 đã cho như sau :

$$y(n) = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n (1+n) & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ **VD3:**

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc 2 sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + x(n-2)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$ và $x(n) = 5^n$

Ta có phương trình thuần nhất bậc 2 sau đây :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0$$

Chọn dạng của $y_0(n)$ là α^n

Ta có phương trình đặc trưng

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = 1 \;;\; \alpha_2 = 2$$

$$y_0(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n = A_1.1^n + A_2.2^n$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **VD3:**

Ta có phương trình có thành phần thứ hai :

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 5^n + 5^{n-2}$$

Chọn $y_p(n)$ có dạng giống $x(n)$, tức là :

$$y_p(n) = B.5^n$$

$$B5^n - 3B5^{n-1} + 2B5^{n-2} = 5^n + 5^{n-2}$$

$$B5^n\left[1-\frac{3}{5}+2.\frac{1}{25}\right] = 5^n\left(1+\frac{1}{25}\right)$$

$$B.\frac{12}{25} = \frac{26}{25}$$

$$\Rightarrow B = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow y_p(n) = \frac{13}{6}5^n$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

- **VD3:**

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1 1^n + A_2 2^n + \frac{13}{6}5^n$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{39}{150} = \frac{13}{50} \quad ; \quad A_2 = -\frac{104}{75}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình sai phân bậc 2 là :

$$y(n) = \begin{cases} \dfrac{13}{50} - \dfrac{104}{75}2^n + \dfrac{13}{6}5^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ VD4:

Hãy xác định nghiệm riêng của phương trình sai phân.

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

khi hàm cưỡng bức đầu vào $x(n) = 2^n$, $n \geq 0$ và bằng không với n khác.

Dạng nghiệm riêng là:

$$y_p(n) = B2^n \qquad n \geq 0$$

Thay $y_p(n)$ vào đầu bài ta có

$$B2^n = \frac{5}{6}B2^{n-1} - \frac{1}{6}B2^{n-2} + 2^n$$

$$4B = \frac{5}{6}(2B) - \frac{1}{6}B + 4 \quad \text{và tìm thấy } B = \frac{8}{5}$$

Bởi vậy, nghiệm riêng là $\quad y_p(n) = \frac{8}{5}2^n \qquad n \geq 0$

1.5 Phương trình sai phân hệ số hằng

➢ VD4:

Hãy giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau

$y(n) – 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + x(n-2)$

Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 0$ và $x(n) = 5^n$

$y(n) = (13/50) – (104/75).2^n + (13/6).5^n$ với $n \geq 0$.

1.6 Tương quan chéo và tự tương quan

➢ Tương quan chéo:

Giả sử ta có hai dãy $x(n)$ và $y(n)$, tối thiểu một trong hai dãy có năng lượng hữu hạn. Tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$ được định nghĩa như sau :

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

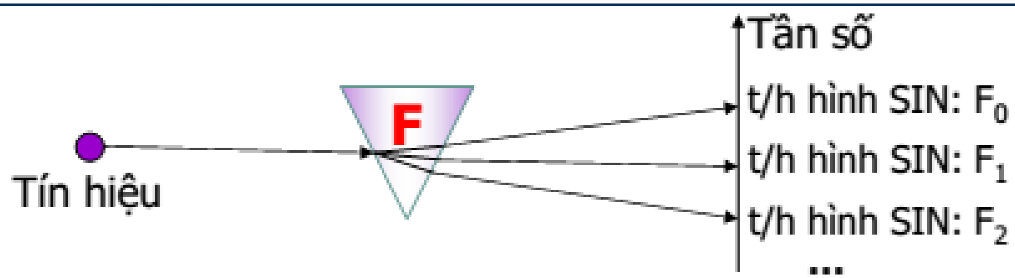
➢ Tự tương quan:

$$r_{xx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n)$$

$r_{xx}(n)$ là hàm tự tương quan của dãy $x(n)$.

- Biến đổi Fourier
  - Định nghĩa và các tính chất
  - Khái niệm đáp ứng tần số và bộ lọc số
- Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

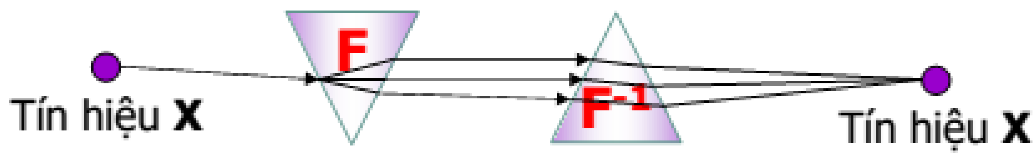
Biến đổi Fourier



F

Công cụ phân tích tần số

- Chuỗi Fourier – tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier – tín hiệu năng lượng, không tuần hoàn
  (J.B.J. Fourier: 1768 - 1830)



F^{-1}

Công cụ tổng hợp tần số

- Chuỗi Fourier ngược – tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier ngược – tín hiệu năng lượng, không tuần hoàn

Biến đổi Fourier

➢Định nghĩa:

Biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Theo quan điểm toán tử, chúng ta sẽ dùng ký hiệu toán tử FT như sau:

$$FT\,[x(n)\,] = X\,(e^{j\omega})$$

$$x(n) \xrightarrow{FT} X\left(e^{j\omega}\right)$$

tức là toán tử FT tác động vào $x(n)$ sẽ cho $X(e^{j\omega})$.

Biến đổi Fourier

➢ Phương pháp biểu diễn $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = R_e\,[X(e^{j\omega})] + jI_m\,[X(e^{j\omega})]$$

$R_e\,[X(e^{j\omega})]$: phần thực của $X(e^{j\omega})$

$I_m\,[X(e^{j\omega})]$: phần ảo của $X(e^{j\omega})$

Thể hiện dưới dạng Modun và argument

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[x(e^{j\omega})\right]}$$

$|\ |$: Là modun

arg : Là argument

$\left|X(e^{j\omega})\right|$: gọi là phổ biên độ của $x(n)$.

$\arg\,[X(e^{j\omega})]$: gọi là phổ pha của $x(n)$.

➢ Phương pháp biểu diễn $X(e^{j\omega})$

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \sqrt{Re^2\left[X(e^{j\omega})\right] + Im^2\left[X(e^{j\omega})\right]}$$

$$arg\left[X(e^{j\omega})\right] = arctg\frac{Im\left[X(e^{j\omega})\right]}{Re\left[X(e^{j\omega})\right]}$$

Ngoài ra ta còn dùng ký hiệu φ(ω) để chỉ argument, ta có:

$$\varphi(\omega) \equiv \arg\left[X(e^{j\omega})\right]$$

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

Biến đổi Fourier

- Điều kiện tồn tại biến đổi Fourier: Biến đổi Fourier chỉ hội tụ khi thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

Về mặt toán học chúng ta có quan hệ sau đây:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \Rightarrow \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 < \infty \Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Biến đổi Fourier

➢ VD: Hãy đánh giá sự tồn tại của biến đổi Fourier:

a) $x_1(n) = u(n)$

b) $x_2(n) = r(n)$

c) $x_3(n) = \delta\,(n)$

d) $x_4(n) = \mathrm{rect}_N(n)$

➤VD: Hãy đánh giá sự tồn tại của biến đổi Fourier:

a)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}1 = \infty$$

$$E_{x_1} = \sum_{n=0}^{\infty}|1|^2 = \infty$$

Vậy $X_1(e^{j\omega})$ là không tồn tại.

b)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|r(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|n| = \infty$$

Biến đổi Fourier

- VD: Hãy đánh giá sự tồn tại của biến đổi Fourier:

$$E_{x_2} = \sum_{n=\infty}^{\infty} |r(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |n|^2 = \infty$$

Vậy $X_2(e^{j\omega})$ là không tồn tại.

c)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)| = 1 < \infty$$

$$E_{x_3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1$$

Vậy $X_3(e^{j\omega})$ tồn tại.

Biến đổi Fourier

- VD: Hãy đánh giá sự tồn tại của biến đổi Fourier:

d)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1}1 = N < \infty$$

$$E_{x_4} = \sum_{n=\infty}^{\infty}|rect_N(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|1|^2 = N$$

Vậy $X_4(e^{j\omega})$ tồn tại.

Biến đổi Fourier

➢Biến đổi Fourier ngược:

$$IFT\,[X(e^{j\omega})] = x(n)$$

hoặc:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{IFT} x(n)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Biến đổi Fourier

➢Biến đổi Fourier ngược:

$$IFT\,[X(e^{j\omega})] = x(n)$$

hoặc:

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{IFT} x(n)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Biến đổi Fourier

➢ VD: Cho

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

n_0 : số nguyên

Hãy tìm $x(n)$, hãy vẽ $X(e^{j\omega})$ và $x(n)$ với $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}$, $n_0 = 4$

Biến đổi Fourier

➢ VD:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-n_0)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-n_0)} e^{j\omega(n-n_0)} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-n_0)]}{\omega_c(n-n_0)}$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}[\omega_c(n-n_0)]$$

Với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $n_0 = 4$ ta có:

Biến đổi Fourier

- VD:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j4\omega} & |\omega \le \pi/2| \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(n-4)}{\frac{\pi}{2}(n-4)}$$

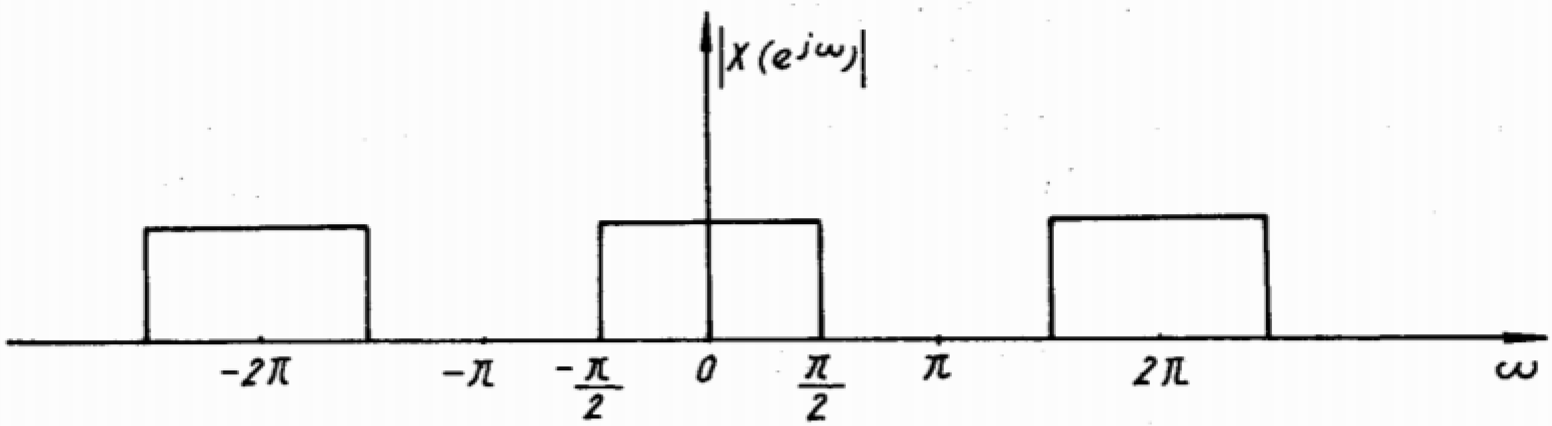
$X(e^{j\omega})$ và $x(n)$ được vẽ trên hình 3.2.3.1

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & |\omega \le \pi/2| \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

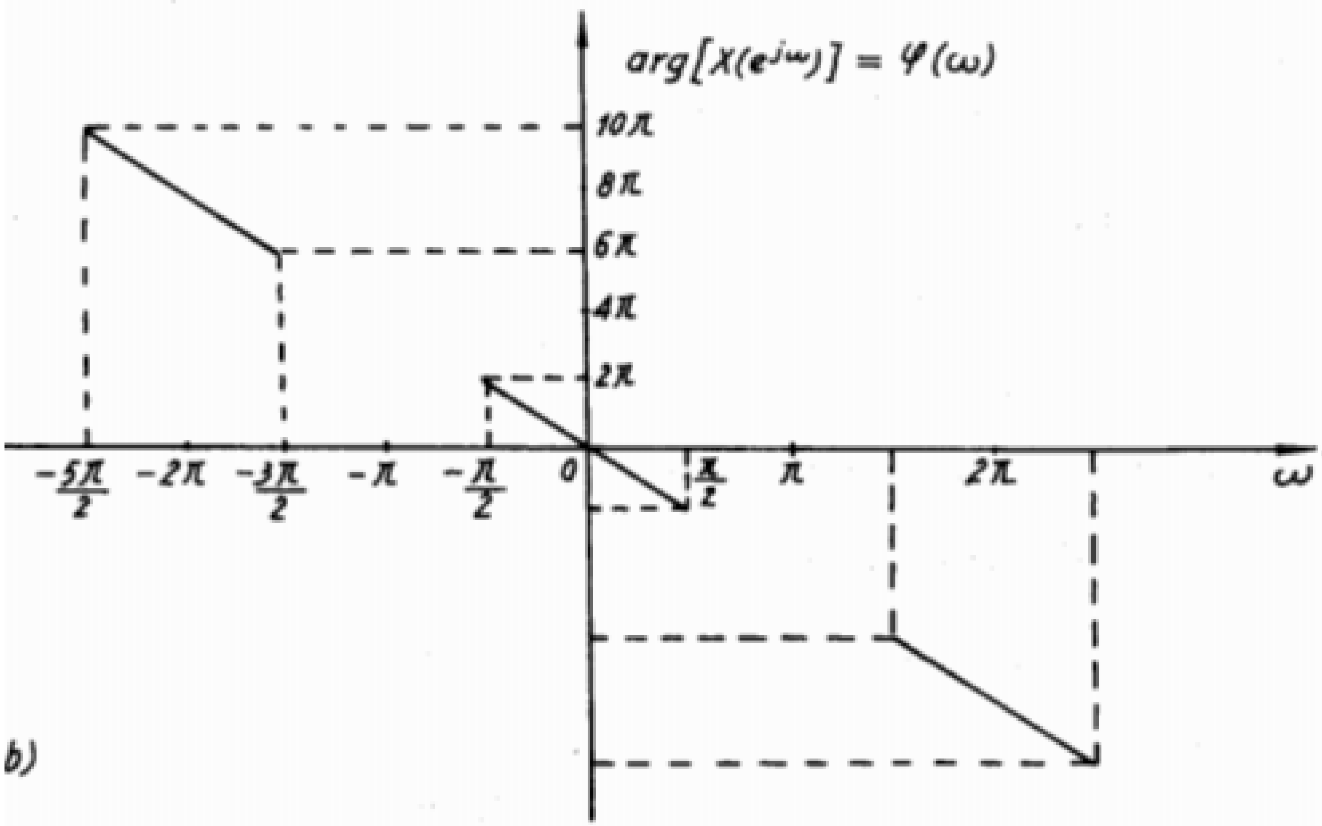
Biến đổi Fourier

- VD:

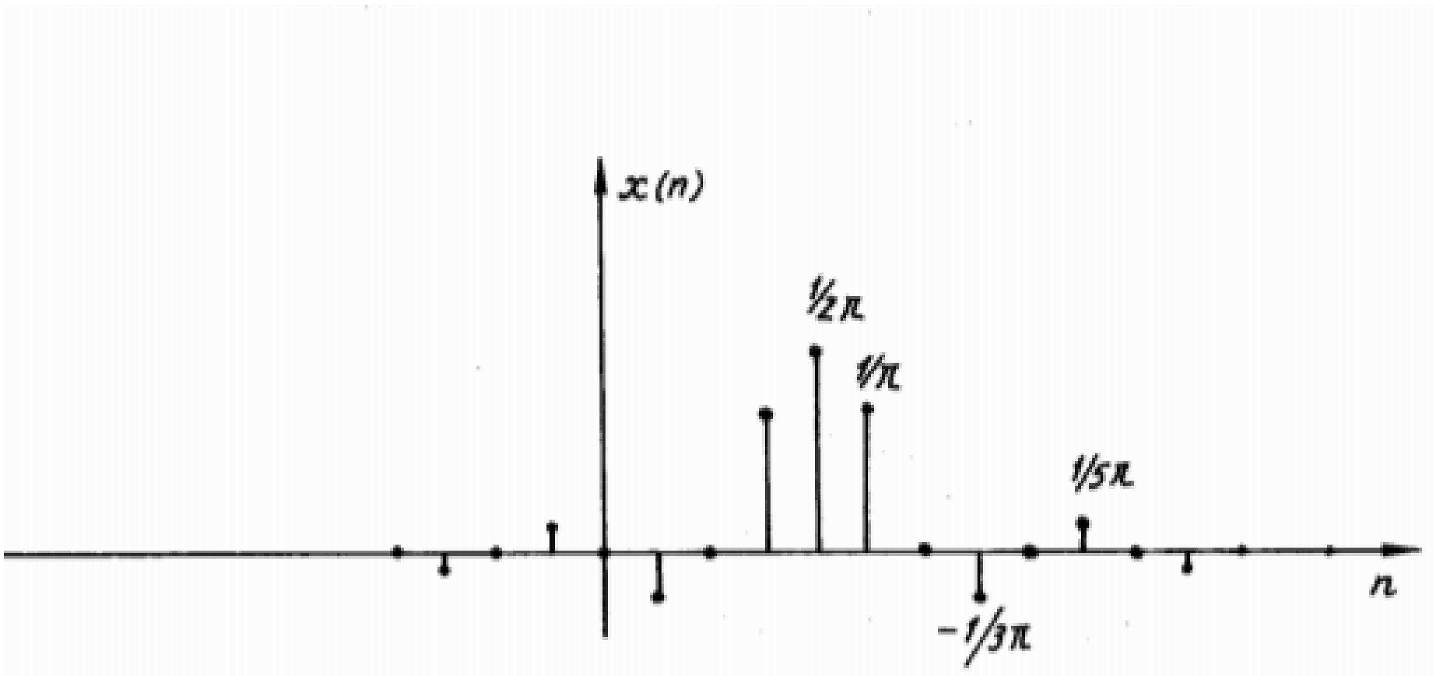
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -4\omega & |\omega \le \pi/2| \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$



➢VD:



➢ VD:



Tính chất của biến đổi FT

➢ Tính tuyến tính

Giả sử ta có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và biến đổi Fourier của chúng là :

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$

$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

Chúng ta coi $x(n)$ được tạo bởi tổ hợp tuyến tính của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau :

$$x(n) = a\,x_1(n) + b\,x_2(n)$$

Ở đây a và b là các hằng số.

Biến đổi Fourier của $x(n)$ được cho bởi :

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n) + bx_2(n)]e^{-j\omega n} = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j\omega n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Tính chất của biến đổi FT

Hãy xác định biến đổi Fourier của tín hiệu sau đây :

$$x(n) = 2\,x_1(n) + 3\,x_2(n)$$

với :

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Tính chất của biến đổi FT

Giải : Áp dụng tính chất tuyến tính ở trên ta có :

$$X(e^{j\omega}) = 2X_1(e^{j\omega}) + 3x_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Vậy :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{2-e^{-j\omega}} + \frac{1}{3-e^{-j\omega}} = \frac{1-2e^{-j\omega}}{6-5e^{-j\omega}+e^{j2\omega}}$$

Tính chất của biến đổi FT

➢ Tính chất trễ

Giả sử $y(n)$ là phiên bản trễ của $x(n)$, tức là:

$$y(n) = x(n - n_0)$$

n_0 : số nguyên.

Ta có :

$$Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - n_0)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số : $l = n - n_0$, ta có :

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega l}e^{-j\omega n_0} = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{j\omega})\right|$$

$$\arg[Y(e^{j\omega})] = -\omega n_0 + \arg[X(e^{j\omega})]$$

Tính chất của biến đổi FT

➢ VD: Cho $x(n) = \text{rect}_N(n-n_0)$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$
- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$.

Giải : Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = FT[\text{rect}_N(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} FT[\text{rect}_N(n)]$$

Áp dụng kết quả của ví dụ 3.2.1.1 ta có:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} = e^{-j\omega\left(n_0+\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| \qquad \arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\omega\left(n_0 + \frac{N-1}{2}\right) + \arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

Tính chất của biến đổi FT

➢ Tính chất đối xứng:

Trong trường hợp tổng quát tín hiệu $x(n)$ là tín hiệu phức, ta có thể viết:

$$x(n) = Re\,[x(n)] + jIm\,[x(n)]$$

Vậy dãy liên hợp phức của $x(n)$ là $x^*(n)$ có dạng:

$$x^*(n) = Re[x(n)] - jIm\,[x(n)]$$

Bây giờ ta tìm quan hệ giữa $FT[x^*(n)]$ và $FT[x(n)]$:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$FT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n}\right]^*\right\}^*$$

$$= \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}\right\}^* = \left\{X(e^{-j\omega})\right\}^* = X^*(e^{-j\omega})$$

Tính chất của biến đổi FT

- Tính chất đối xứng:

Trong trường hợp tổng quát tín hiệu $x(n)$ là tín hiệu phức, ta có thể viết:

$$x(n) = Re\,[x(n)] + jIm\,[x(n)]$$

Vậy dãy liên hợp phức của $x(n)$ là $x^*(n)$ có dạng:

$$x^*(n) = Re[x(n)] - jIm\,[x(n)]$$

Bây giờ ta tìm quan hệ giữa $FT[x^*(n)]$ và $FT[x(n)]$:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$FT[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n}\right]^*\right\}^*$$

$$= \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}\right\}^* = \left\{X(e^{-j\omega})\right\}^* = X^*(e^{-j\omega})$$

Tính chất của biến đổi FT

➢ Tính chất đối xứng:

Vậy:

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

Nếu $x(n)$ là thực thì :

$$x^*(n) \equiv x(n) \text{ và } FT[x^*(n)] = FT[x(n)]$$

Vậy đối với tín hiệu $x(n)$ thực ta có quan hệ sau đây:

$$X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

hay:

$$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

Tính chất của biến đổi FT

➢ Tính chất đảo của biến số n

Giả sử ta có tín hiệu $x(n)$ và biến đổi Fourier của nó là:

$$FT\,[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$$

Bây giờ ta tính biến đổi Fourier của tín hiệu $x(-n)$:

$$FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) e^{-j\omega n}$$

đổi biến số $l = -n$ ta có:

$$FT[x(-n)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l) e^{-j\omega l} = X(e^{-j\omega})$$

Vậy:

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$$

Tính chất của biến đổi FT

- Tích chập

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

✦ Chú ý: Có thể dùng BĐ Fourier thuận và BĐ Fourier ngược để tính tích chặp

- Tương quan

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow r_{x_1x_2}(m) \xleftrightarrow{F} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$$

- Định lý Wiener-Khintchine

$$x(n)\ thuc \qquad \Rightarrow r_{xx}(l) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(\omega) = X(\omega)X(-\omega)$$

Tính chất của biến đổi FT

- Dịch theo tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 k} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$$

- Định lý điều chế

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad \Rightarrow x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \tfrac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)\right]$$

- Định lý Parseval

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$$

Tính chất của biến đổi FT

- Nhân 2 chuỗi (định lý cửa sổ)

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$$

- Đạo hàm miền tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad nx(n) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

- Liên hợp phức

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$

Tổng hợp

Tính chất	Miền biến số n	Miền tần số liên tục ω
Ký hiệu	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(e^{j\omega})$ $X_1(e^{j\omega})$ $X_2(e^{j\omega})$
Cặp biến đổi Fourier	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
Tuyến tính	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$
Trễ	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Đối xứng	$x(n)$ thực	$X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$ $Re\,[X(e^{j\omega})]=Re\,[X(e^{-j\omega})]$ $Im\,[X(e^{j\omega})]=-Im\,[X(e^{-j\omega})]$ $\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ $\arg[X(e^{j\omega})]=-\arg[X(e^{-j\omega})]$
Liên hợp phức	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
Biến số đảo	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Tích chập	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega}).$

Tổng hợp

Tích (đại số)	$x_1(n) \, . \, x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j(\omega-\omega')}\right)X_2\left(e^{j\omega'}\right)d\omega'$
Vi phân trong miền ω	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Trễ tần số	$e^{j\omega_0 n} \, x(n)$	$X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
Điều chế	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)+\frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
Quan hệ Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega$
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$
Tương quan	$r_{x_1x_2}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(m-n)$	$X_1(e^{j\omega}). \, X_2(e^{-j\omega})$
Định lý Weiner- Kintchine	$r_{xx}(n)$	$R_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) = \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2$

Tính chất của biến đổi FT

➢ VD: Giả sử ta có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+2) + \delta(n-2)$$

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thông qua tính chất của biến đổi Fourier.

Giải :

Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(n+2)+\delta(n-2)\right]e^{-j\omega n} = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = 2\cos 2\omega$$

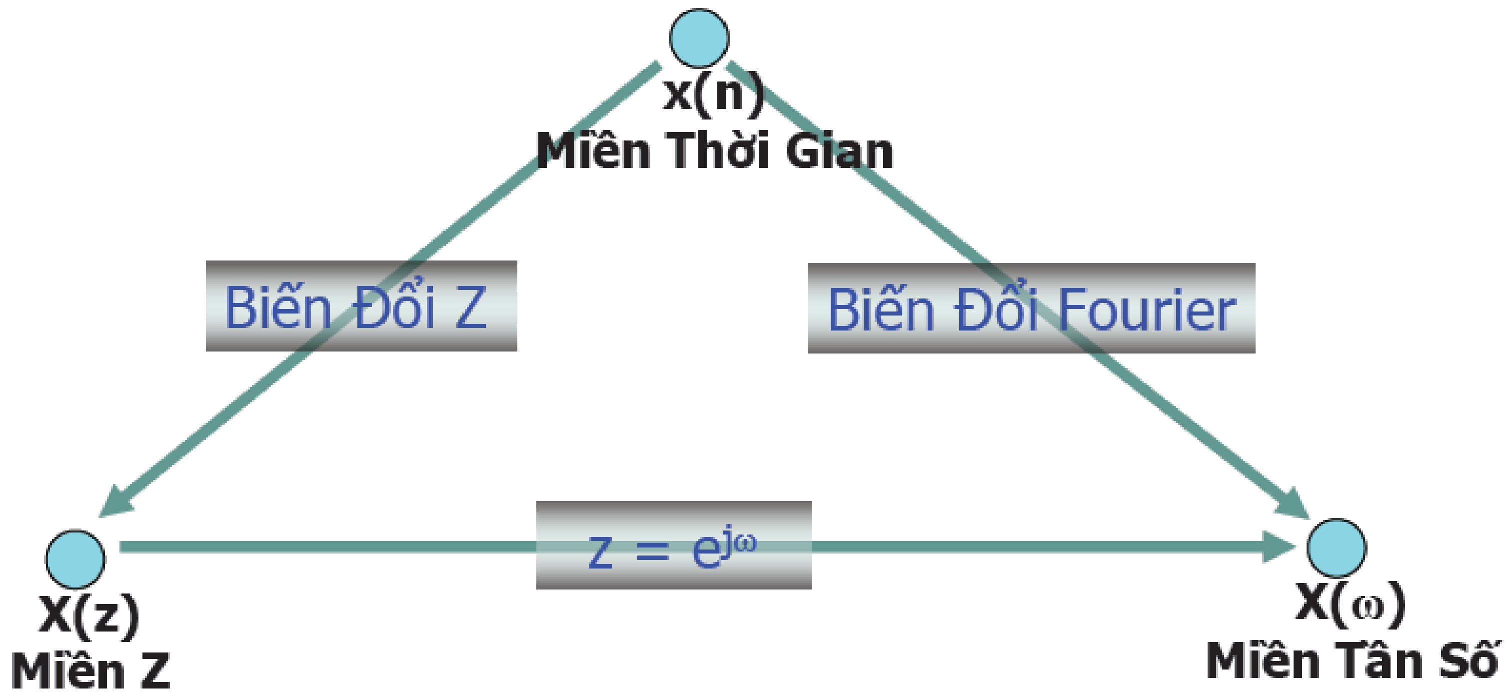
Vậy:

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}).\,X_2(e^{j\omega}) = 4\cos^2 2\omega = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2e^{j2\omega}\,e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}$$
$$= e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

Áp dụng biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x_3(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)$$

Quan hệ biến đổi FT và ZT



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

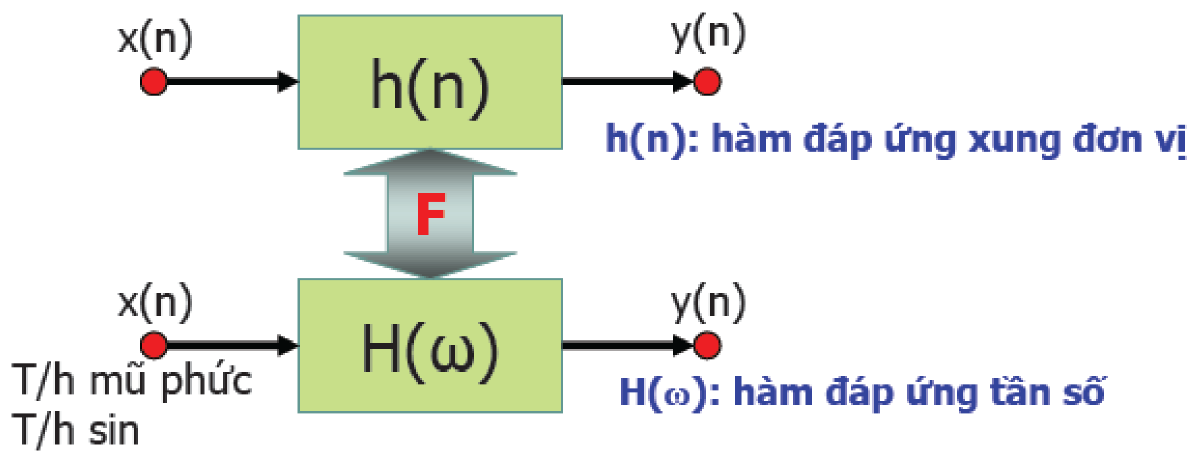
$z = e^{j\omega}$ (xét trên vòng tròn đơn vị)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

➢ Đáp ứng tần số:

Miền thời gian

Miền tần số



✦ Đáp ứng tần số của t/h mũ phức: cho $x(n) = Ae^{j\omega n}$ $\quad -\infty < n < \infty$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)} = Ae^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

$$= AH(\omega)e^{j\omega n}$$

$x(n) = Ae^{j\omega n}$ là một eigenfunction của h/t
$H(\omega)$ là eigenvalue tương ứng

➢ Đáp ứng tần số:

- Biểu diễn H(ω) ở dạng cực $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}$
- Ta có

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k - j\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sin\omega k$$
$$= H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$
$$= \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}\, e^{j\tan^{-1}[H_I(\omega)/H_R(\omega)]}$$

Trong đó

$$H_R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k \qquad hàm chan$$
$$H_I(\omega) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sin\omega k \qquad hàm le$$

⇒

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \qquad hàm chan$$
$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \qquad hàm le$$

- Do đó, nếu biết |H(ω)| và Θ(ω) trong khoảng 0 ≤ ω ≤ π thì cũng xác định được trong khoảng –π ≤ ω ≤ 0

Hệ thống rời rạc trong miền tần số

- **VD:** Cho một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung như sau:

$$h(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1$$

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống và đáp ứng ra với kích thích vào là

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n} \quad ; \quad \text{và } a = \frac{1}{3}$$

➢ VD:

Giải :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

Vì $|a| < 1$ nên $\left|ae^{-j\omega}\right| < 1$ nên chuỗi này hội tụ, vậy ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Từ đây ta có:

$$Re\left[H(e^{j\omega})\right] = \frac{1 - a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

$$Im\left[H(e^{j\omega})\right] = -\frac{a\sin\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

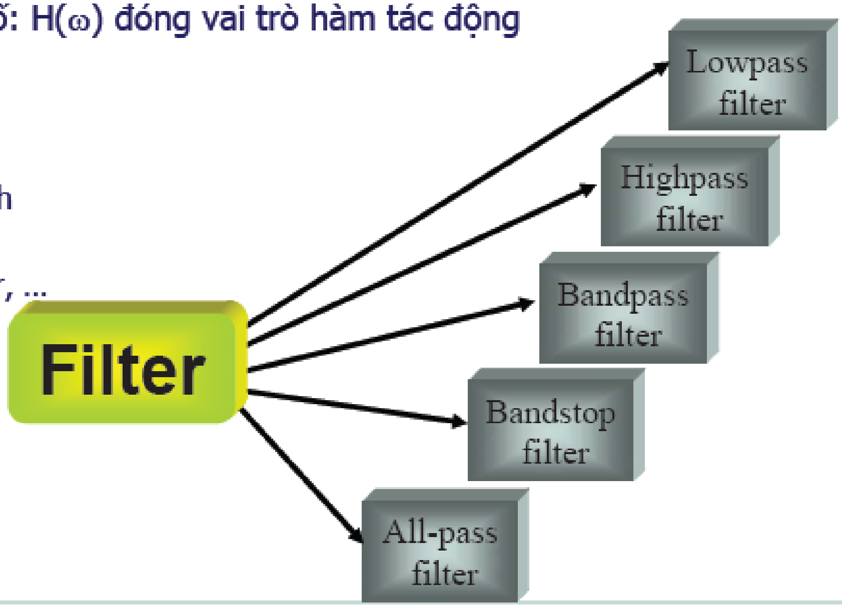
$$\arg\left[H(e^{j\omega})\right] = -arctg\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

Với $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n}$, ứng dụng biểu thức (3.5.1.3) ta có đáp ứng ra $y(n)$ như sau:

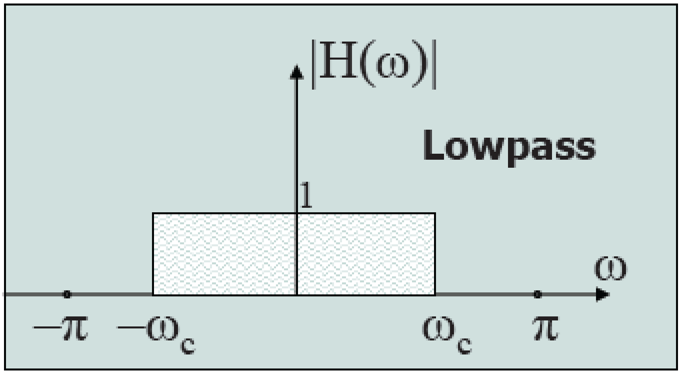
$$y(n) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}} . e^{j\frac{\pi}{3}n}$$

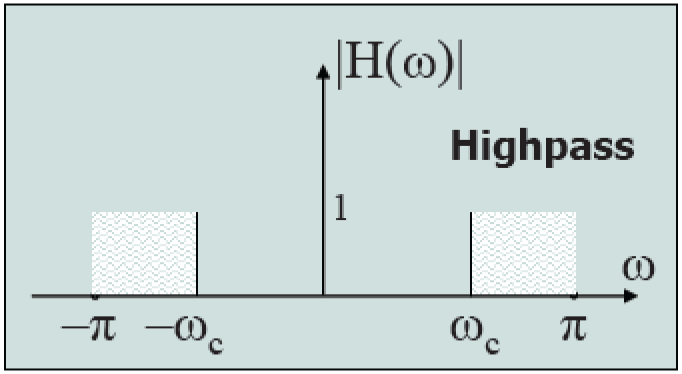
➢ Bộ lọc số:

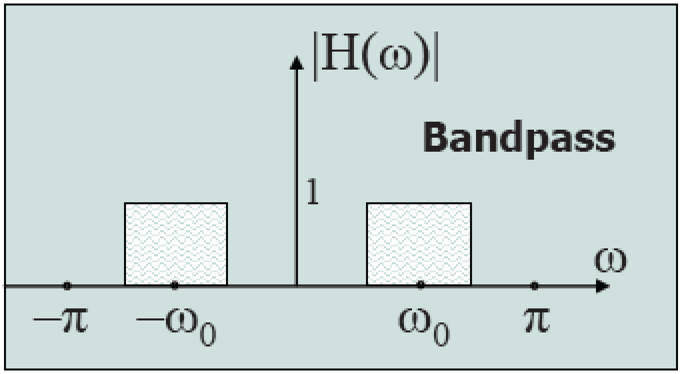
- Bộ lọc
  - Thiết bị dùng để xử lý tùy theo đặc tính của t/h tác động vào h/t
  - Ví dụ: bộ lọc không khí, bộ lọc dầu, bộ lọc tia cực tím
- Hệ LTI
  - $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
  - Thay đổi phổ t/h nhập tùy theo đặc trưng của đáp ứng tần số $H(\omega)$
  - Hệ LTI được xem là bộ lọc tần số: $H(\omega)$ đóng vai trò hàm tác động hoặc hàm chỉnh phổ
  - Có tác dụng
    - Loại bỏ nhiễu trên t/h
    - Tinh chỉnh hình dạng phổ của t/h
    - Phân tích phổ t/h
    - Phát hiện t/h trong Radar, Sonar, ...
- Phân loại bộ lọc

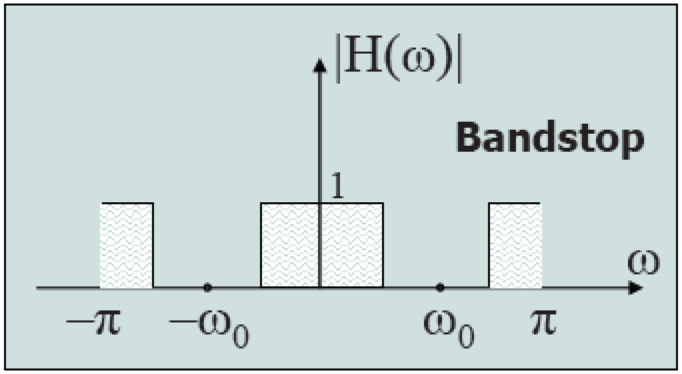


Hệ thống rời rạc trong miền tần số







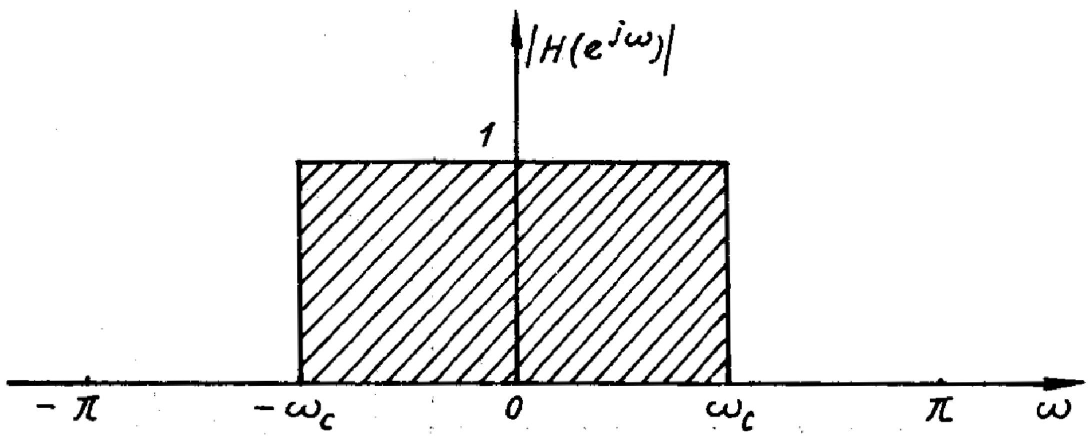


➢ Bộ lọc thông thấp:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \le \omega \le \pi)$



➢ Bộ lọc thông thấp:

Ở đây $|H(e^{j\omega})|$ là đối xứng, tức là chúng ta đã định nghĩa bộ lọc số thông thấp lý tưởng với $h(n)$ là thực, và sau này nếu $|H(e^{j\omega})|$ là đối xứng thì ta chỉ cần xét một nửa chu kỳ ($0 \le \omega \le \pi$) là đủ.

Nếu chỉ xét trong một nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng sẽ như sau:

ω_c : tần số cắt

$0 \le \omega \le \omega_c$: dải thông

$\omega_c \le \omega \le \pi$: dải chắn

- VD: Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và hãy vẽ $h(n)$ trong trường hợp tần số cắt $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}$.

- VD:

Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

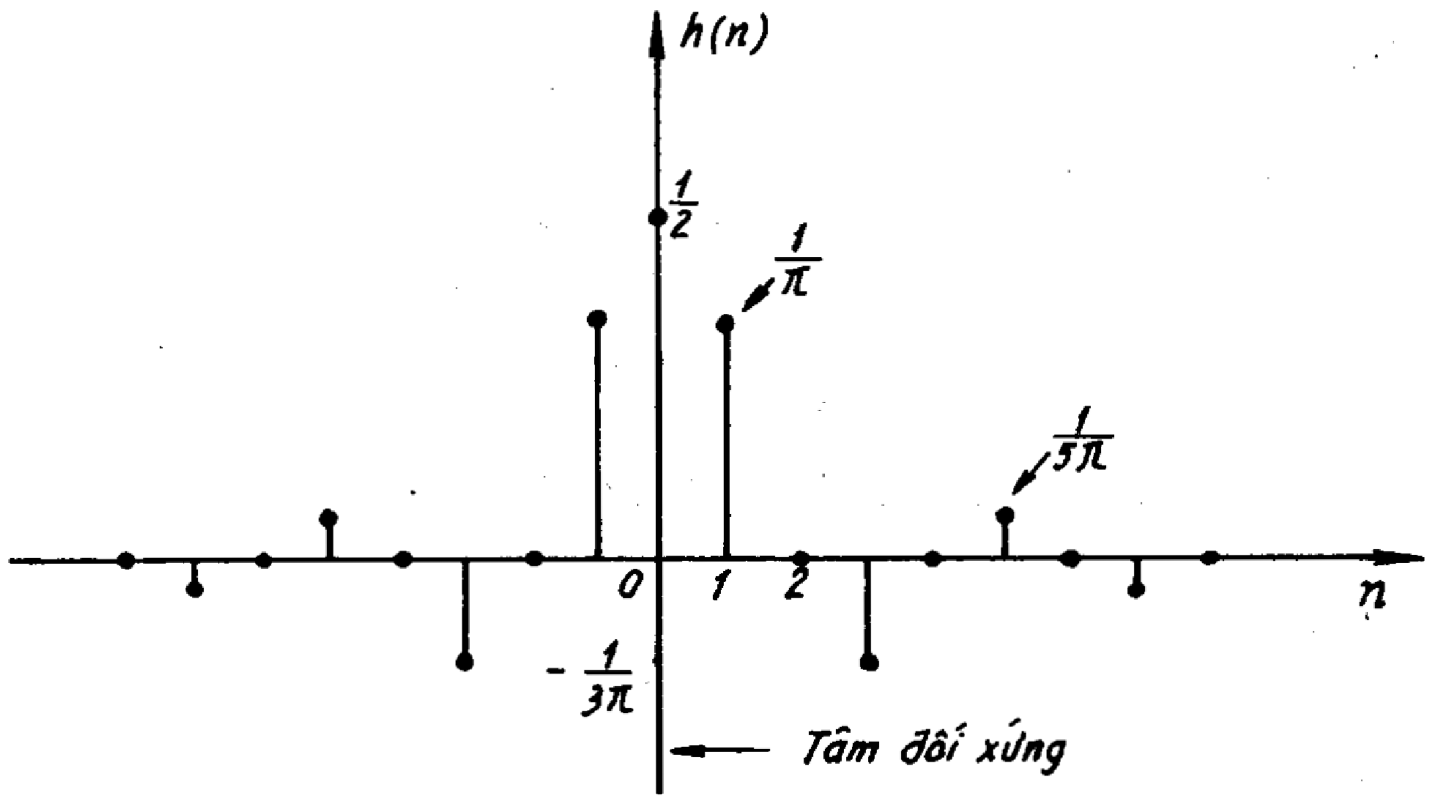
$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} \qquad (3.5.2.2)$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ta có :

$$h(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n}$$

Hệ thống rời rạc trong miền tần số

- VD:

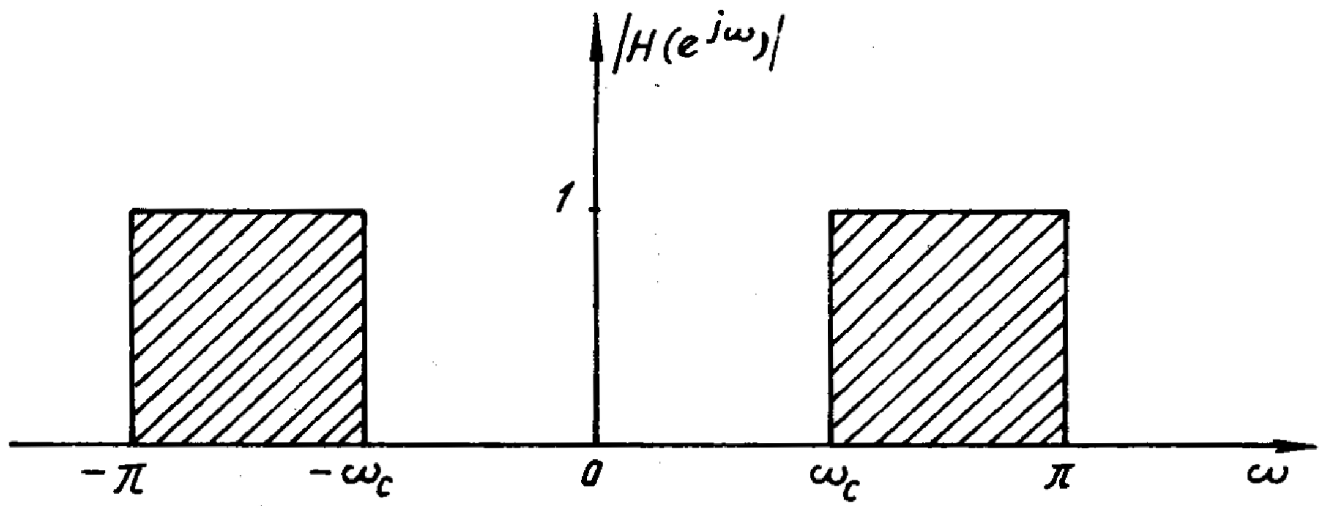


➤ Bộ lọc thông cao:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

(- π ≤ ω ≤ π



➢ Bộ lọc thông cao:

Cũng giống như bộ lọc số thông thấp lý tưởng, $\left|H(e^{j\omega})\right|$ là đối xứng như vậy $h(n)$ là thực và như vậy trong miền tần số ω ta chỉ cần xét $\left|H(e^{j\omega})\right|$ trong một nửa chu kỳ $(0 \le \omega \le \pi)$ là đủ.

Nếu xét trong một nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc số thông cao lý tưởng sẽ như sau:

ω_c : tần số cắt

$0 \le \omega \le \omega_c$: dải chắn

$\omega_c \le \omega \le \pi$: dải thông.

➢ VD: Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông cao lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và vẽ $h(n)$ trong trường hợp $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

➢ VD:

Giải :

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega-\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\pi n}{\pi n}-\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}$$

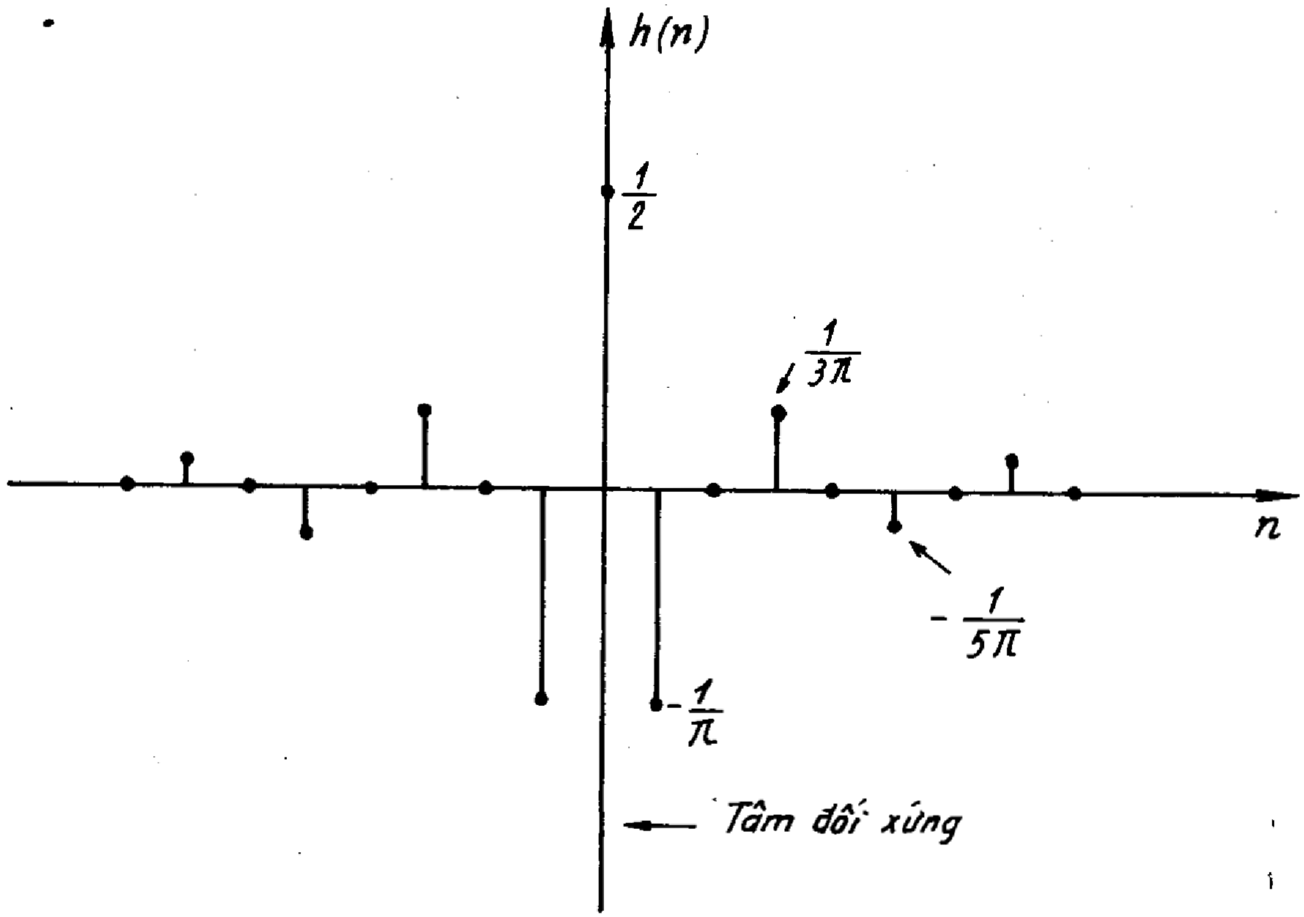
$$h(n)=\delta(n)-\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n} \qquad (3.5.2.4)$$

Thay $\omega_c=\frac{\pi}{2}$ ta có:

$$h(n)=\delta(n)-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}n}$$

Hệ thống rời rạc trong miền tần số

➢ **VD:**

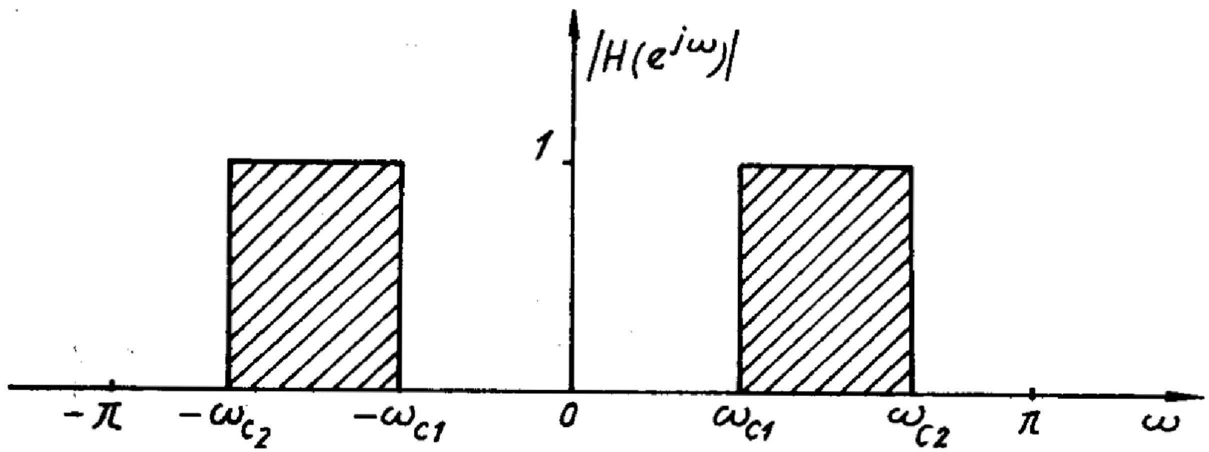


➢ Bộ lọc thông dải:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau :

$$
\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c_2} \le \omega \le -\omega_{c_1} \\ \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}
$$

$(-\pi \le \omega \le \pi)$



- VD: Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông dải lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c_2} \le \omega \le -\omega_{c_1} \\ \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và tìm $h(n)$ trong trường hợp $\omega_{c1} = \dfrac{\pi}{3}$, $\omega_{c2} = \dfrac{\pi}{2}$.

- **VD:**

Giải :

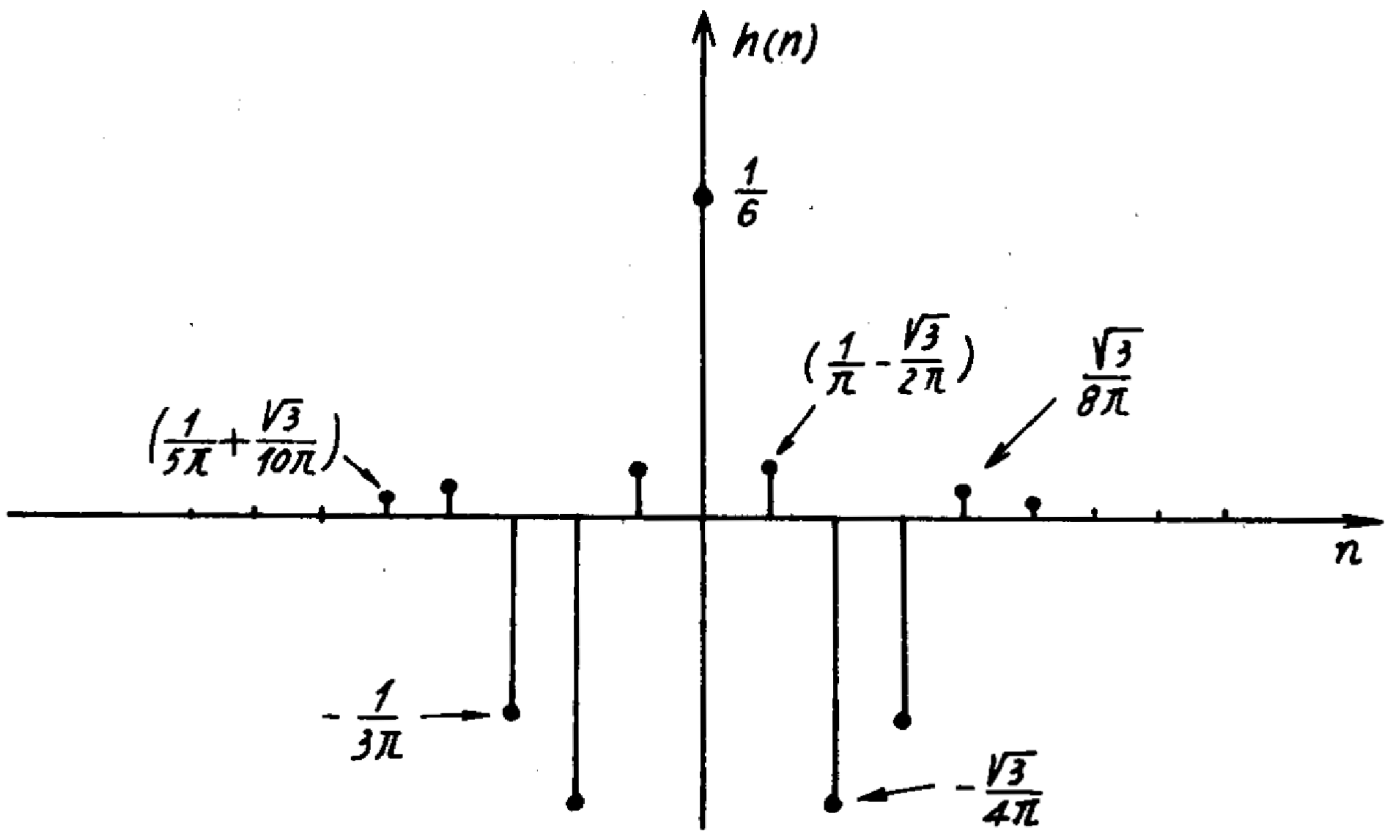
$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n}d\omega$$

$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n} \qquad (3.5.2.11)$$

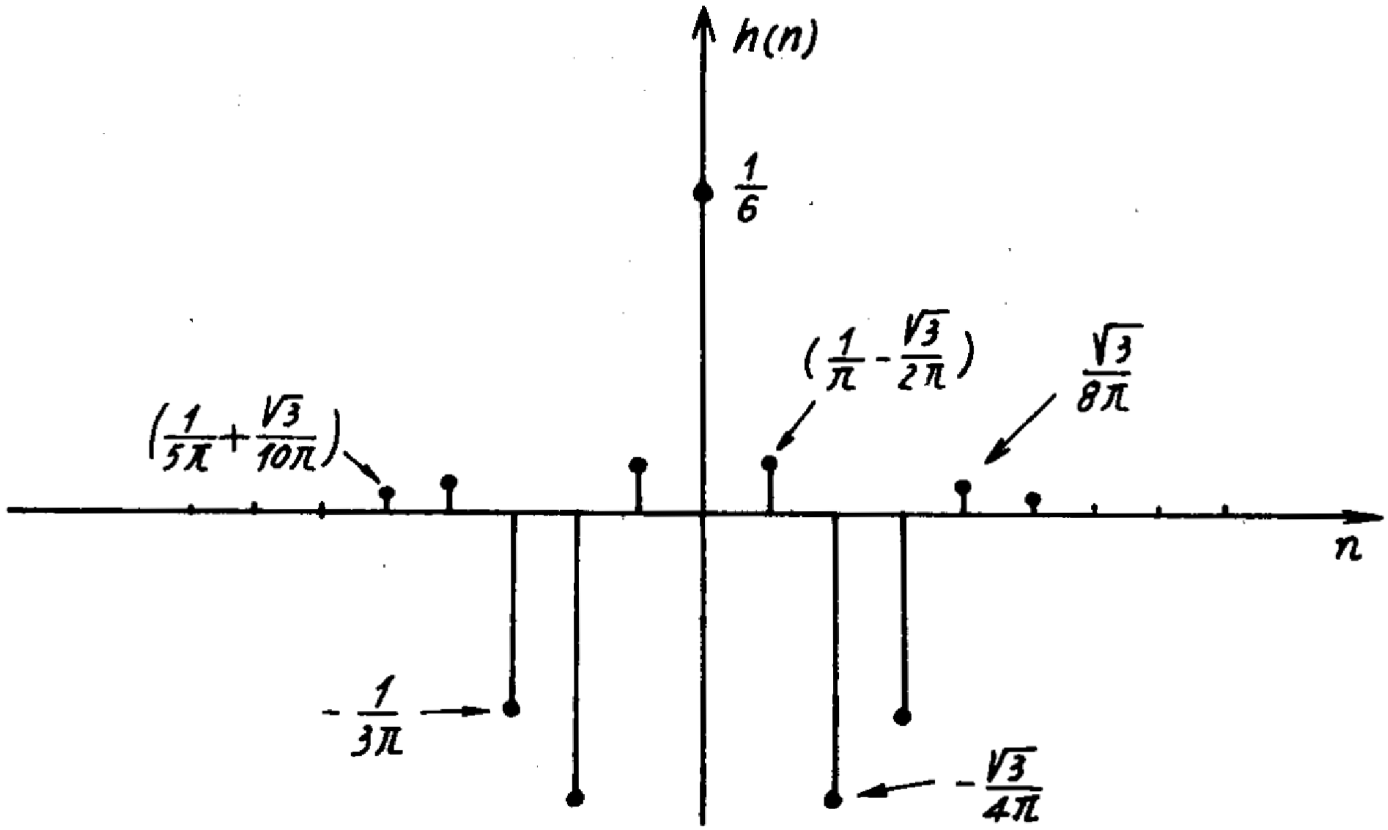
Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \ \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$h(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}$$

- **VD:**



➢ **VD:**

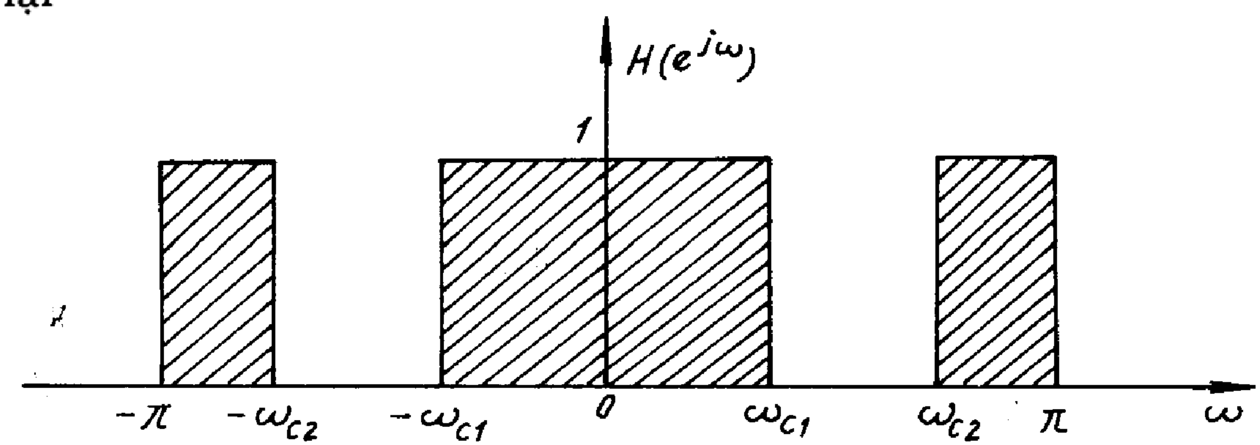

h(n)
$\frac{1}{6}$
$\left(\frac{1}{5\pi}+\frac{\sqrt{3}}{10\pi}\right)$
$\left(\frac{1}{\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$
$\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$
$-\frac{1}{3\pi}$
$-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$
n

➢ Bộ lọc chắn dải:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_{c_2} \\ -\omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_1} \\ \omega_{c_2} \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \le \omega \le \pi)$



Hệ thống rời rạc trong miền tần số

➢ **VD:**

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc chắn dải lý tưởng pha không như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_{c_2} \\ -\omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_1} \\ \omega_{c_2} \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và tìm $h(n)$ trong trường hợp

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

➢ **VD:**

Giải :

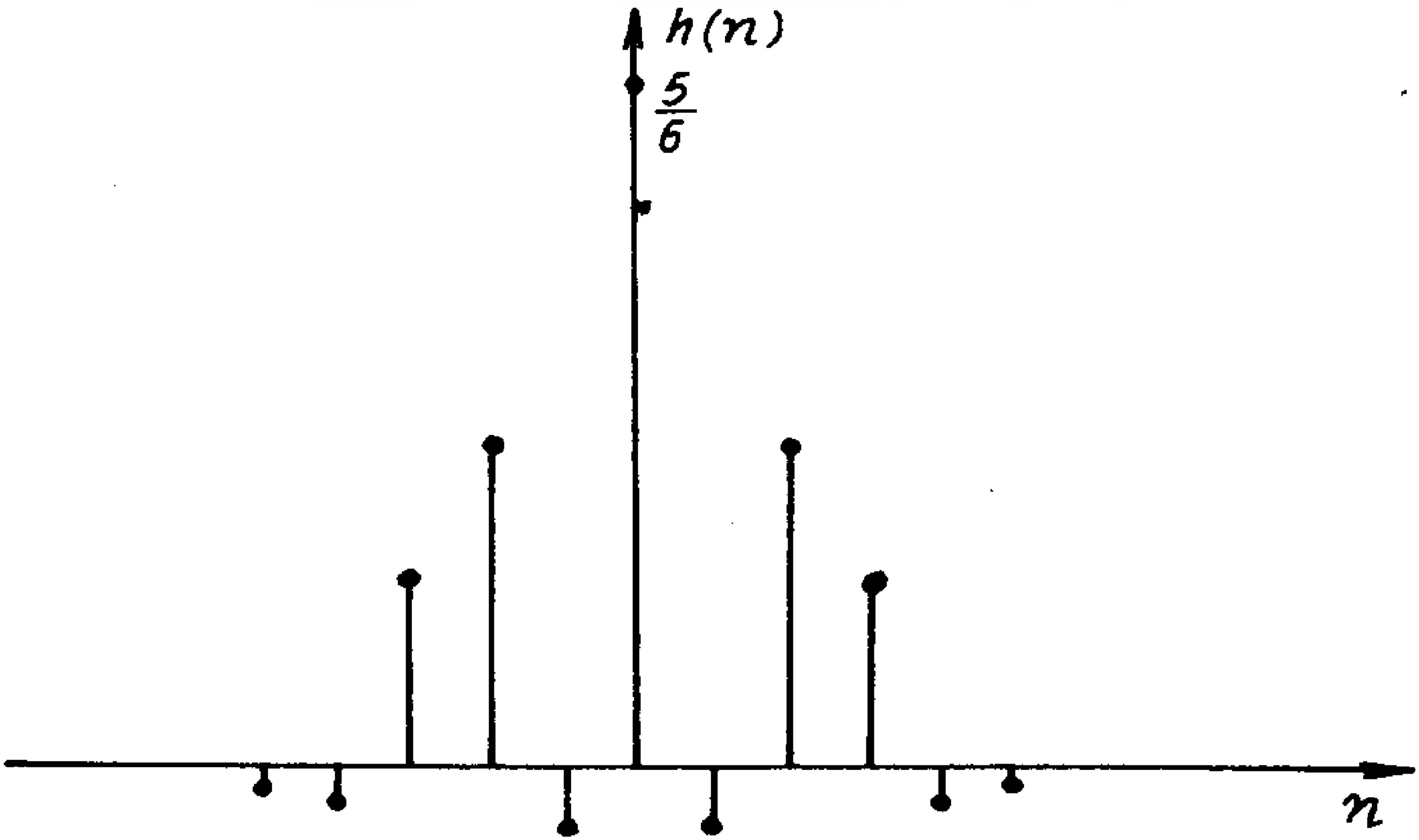
$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n}d\omega$$

$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}\right] \qquad ($$

Thay $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}\right]$$

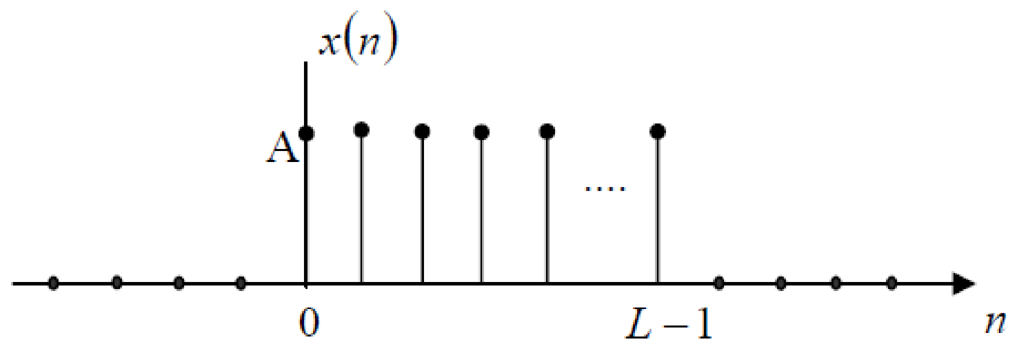
- **VD:**



➤ **BT1:** Tìm biến đổi Fourier và phổ biên độ của dãy

$$x(n)=\begin{cases} A & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \ne \end{cases}$$

với minh hoạ như hình sau



➢ BT1:

Vì $x(n)$ là một khả tổng tuyệt đối nên biến đổi Fourier của nó tồn tại. Hơn nữa, $x(n)$ là tín hiệu năng lượng hữu hạn với $E_x = |A|^2 L$. Biến đổi Fourier của tín hiệu này là

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n} = A\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = A e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)(L-1)} \frac{\sin\left(\omega L/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

Với $\omega = 0$, biến đổi ta có $X\left(e^{j0}\right) = |A| L$.

Phổ biên độ của $x(n)$ có dạng

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A| L & \omega = 0 \\ |A| \dfrac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} & \neq \end{cases}$$

- **BT2:** Hãy tính phép chập các dãy $x_1(n) * x_2(n)$ với

$$x_1(n) = x_2(n) = \left\{ 1,\ \underset{0}{\underset{\rightarrow}{1}},\ 1 \right\}$$

thông qua biến đổi Fourier.

➢ BT2:

Sử dụng biến đổi Fourier, ta có

$$X_1\left(e^{j\omega}\right) = X_2\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 2\cos\omega$$

Do đó

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) = (1+2\cos\omega)^2 \\ &= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega \\ &= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \end{aligned}$$

Biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad \underset{\substack{\to \\ 0}}{3} \quad 2 \quad 1 \right\}$$

Kết quả này trùng với kết quả nếu ta tính tích chập trên bằng phương pháp đồ thị.

- **BT3** Xác định mật độ phổ năng lượng $S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)$ của tín hiệu

$$x(n) = a^n u(n) \quad -1 < a < 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Vì thế biến đổi Fourier của $x(n)$ tồn tại như vậy:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

➢ BT3:

Vì $\left|ae^{-j\omega}\right| = |a| < 1$, nên

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Phổ mật độ năng lượng là

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega) = \frac{1}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)\left(1 - ae^{j\omega}\right)}$$

hoặc tương đương

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Chương 2 Biến đổi Fourier và Fourier rời rạc

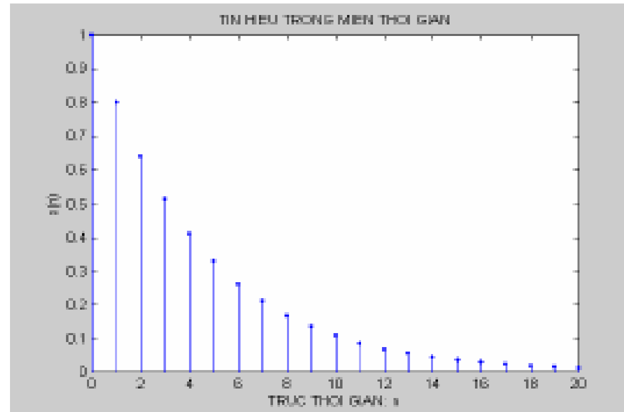
- Biến đổi Fourier
    - Định nghĩa và các tính chất
    - Khái niệm đáp ứng tần số và bộ lọc số
- Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Biến đổi Fourier liên tục

x(n)

$x(n) = 0.8^n u(n)$

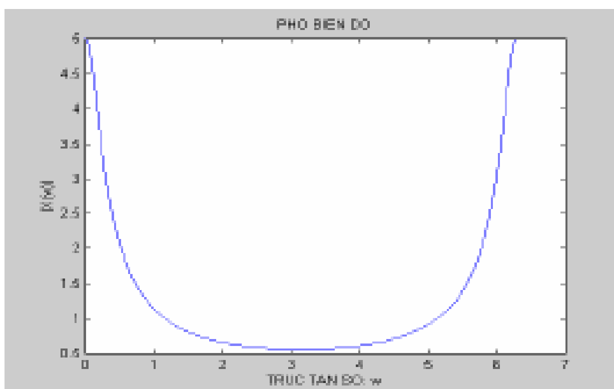


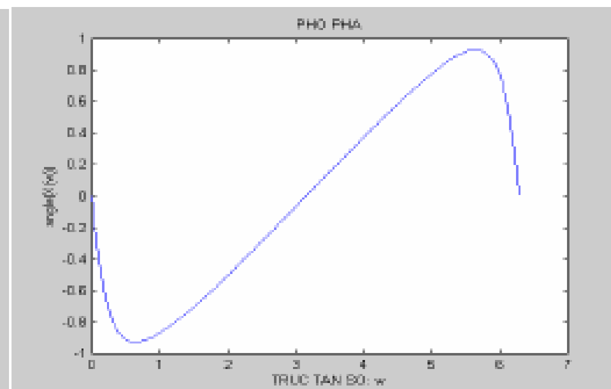
F

Miền thời gian

Miền tần số

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$





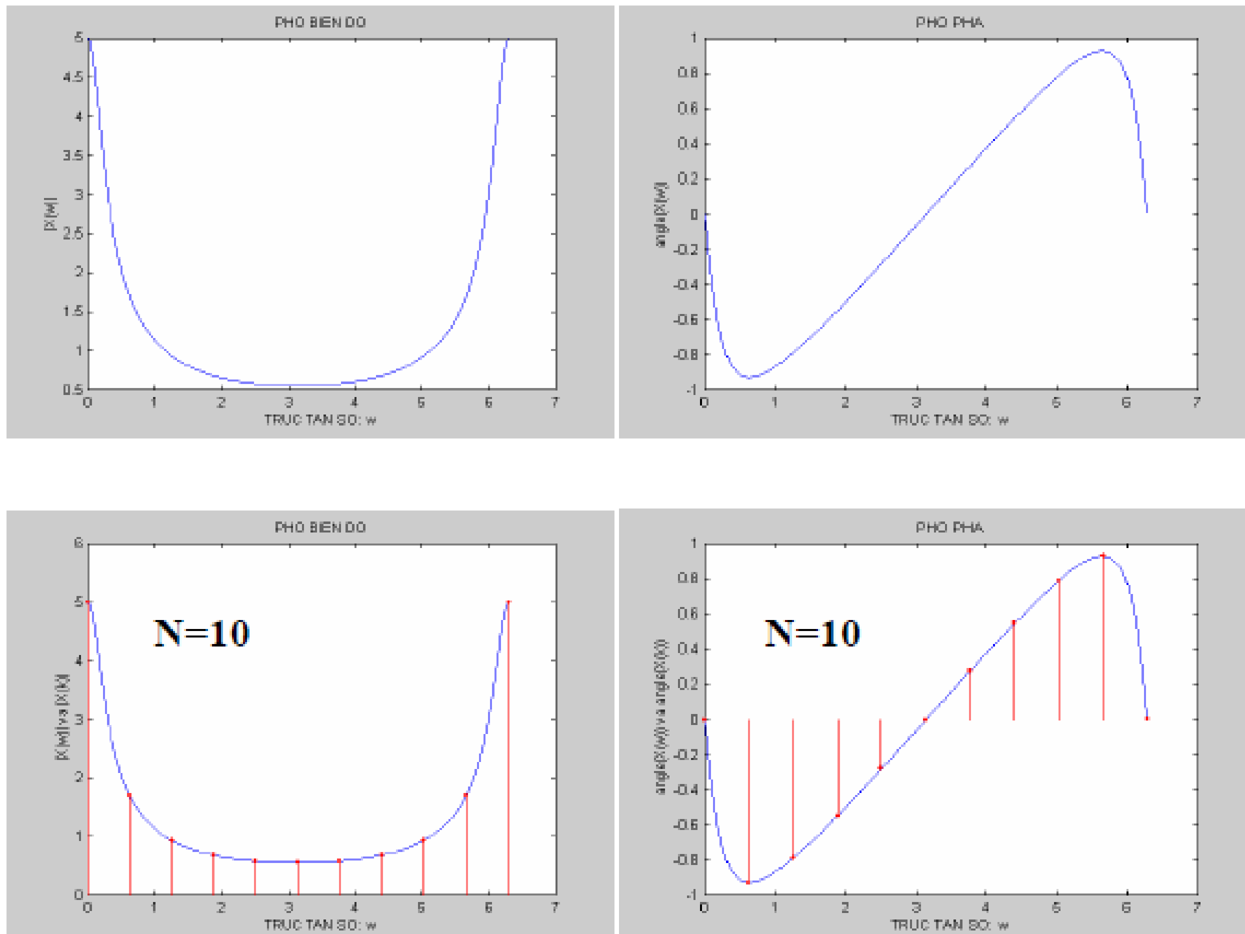
- Vấn đề: $X(\omega)$ liên tục theo tần số ω → không thích hợp cho việc tính toán trên máy tính

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

X(ω)

Lấy mẫu

$$X(k) \equiv X(\omega = \tfrac{2\pi}{N} k)$$



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

$$X(\omega)\Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

$$X(k) = \Lambda + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \Lambda$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{Thay n bằng (n-lN)}$$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{với} \qquad x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

- T/h $x_p(n)$ – lặp chu kỳ của x(n) mỗi N mẫu – t/h tuần hoàn với chu kỳ cơ bản N

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,\dots,N-1$$

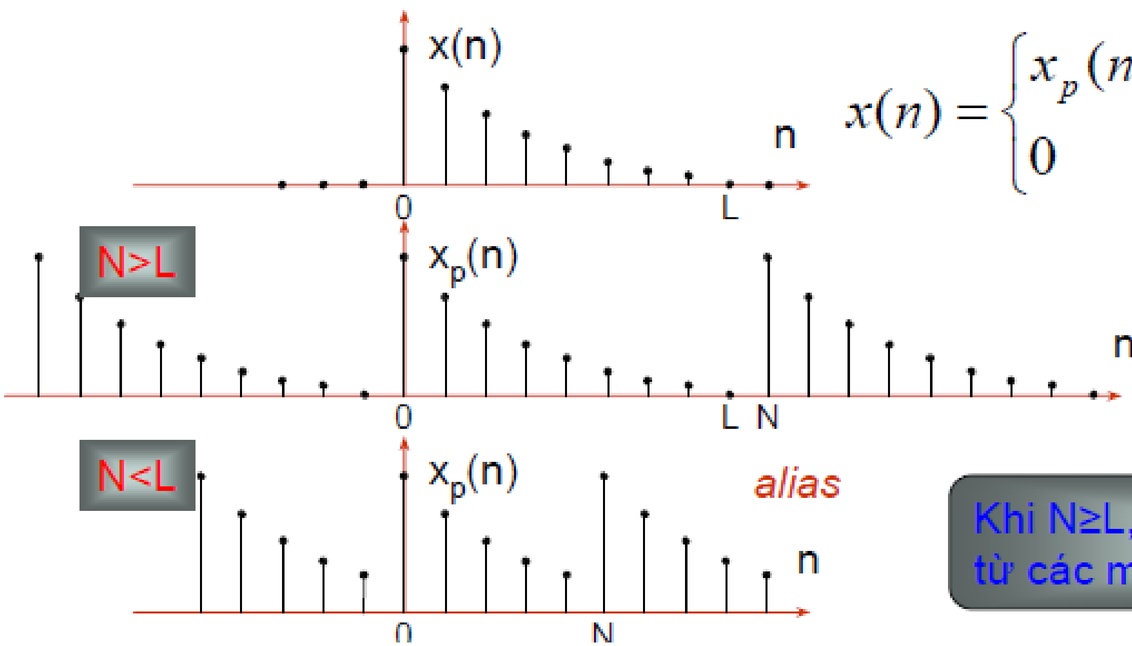
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

$$c_k = \frac{1}{N} X(k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

- Có thể phục hồi t/h $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ $X(\omega)$



$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$$

Khi N≥L, x(n) có thể được khôi phục từ các mẫu phổ tần số tại $\omega_k = 2\pi k/N$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Có thể phục hồi X(ω) từ các mẫu X(k) với k = 0, 1,…, N-1
  - Giả sử N ≥ L → x(n) = $x_p(n)$ khi 0 ≤ n ≤ N-1

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi kn/N}$$

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi kn/N}\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\omega-2\pi k/N)n}\right]$$

$$P(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$\boxed{X(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)P\left(\omega-\tfrac{2\pi}{N}k\right)\qquad N\geq L}$$

$$P\left(\tfrac{2\pi}{N}k\right)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

x(n)
có chiều dài L≤N

BĐ F

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

Lấy mẫu

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)P(\omega-\omega_k)$$

$$P(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j\omega n} \qquad \omega_k=\frac{2\pi}{N}k$$

Phục hồi

Phục hồi

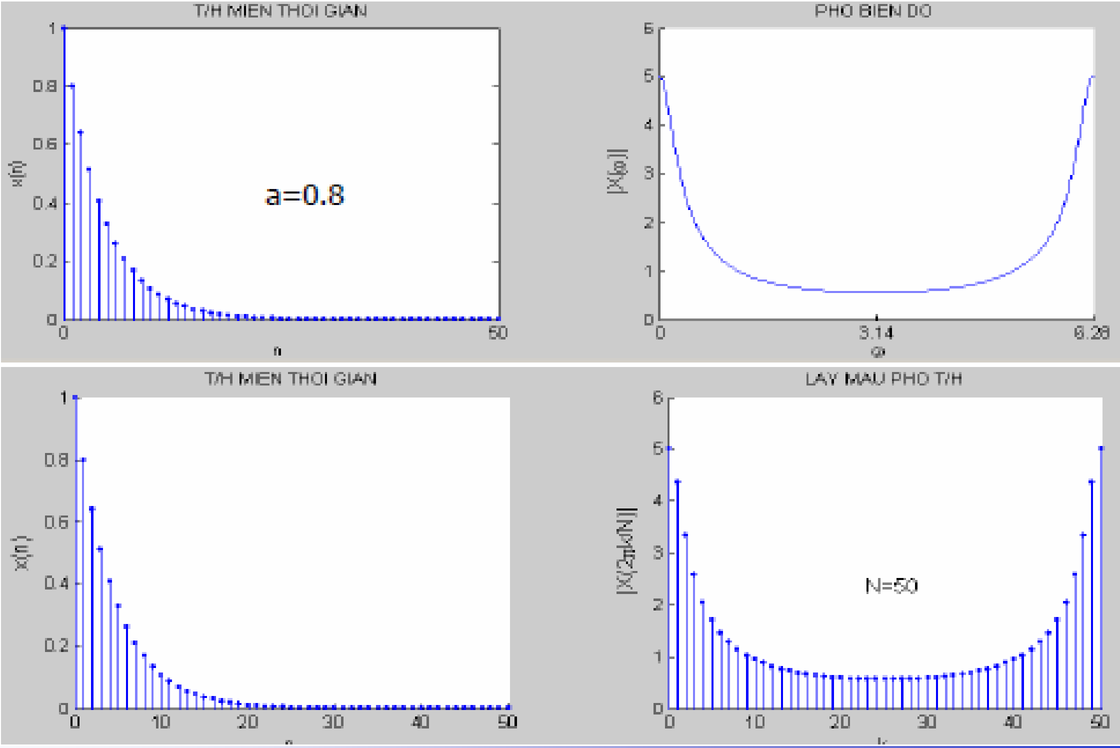
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Ví dụ: $x(n) = a^n u(n)$, $0<a<1$
  - Phổ t/h được lấy mẫu tại các tần số $\omega_k = 2\pi k/N$, k=0, 1, ..., N-1

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \qquad X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$$

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \sum_{l=-\infty}^{0} a^{n-lN} = \frac{a^n}{1-a^N}$$



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Chuỗi không tuần hoàn, năng lượng hữu hạn x(n)
- Các mẫu tần số X(2πk/N), k = 0, 1,…, N-1 không đặc trưng cho x(n) khi x(n) có chiều dài vô hạn
- Nó đặc trưng cho chuỗi tuần hoàn, chu kỳ N $x_p(n)$
- $x_p(n)$ là lặp tuần hoàn của x(n) nếu x(n) có chiều dài hữu hạn L ≤ N
- Do đó, các mẫu tần số X(2πk/N), k = 0, 1,…, N-1 đặc trưng cho chuỗi chiều dài hữu hạn x(n); i.e. X(n) có thể được phục hồi từ các mẫu tần số {X(2πk/N)}
- x(n) = $x_p(n)$ trên một chu kỳ N (được đệm vào N-L zero). Mặc dù L mẫu của X(ω) có thể tái tạo lại được X(ω), nhưng việc đệm vào N-L zero giúp việc tính toán DFT N điểm của X(ω) đồng nhất hơn

DFT	IDFT
$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
$k=0,1,K\ ,N-1$	$n=0,1,K\ ,N-1$

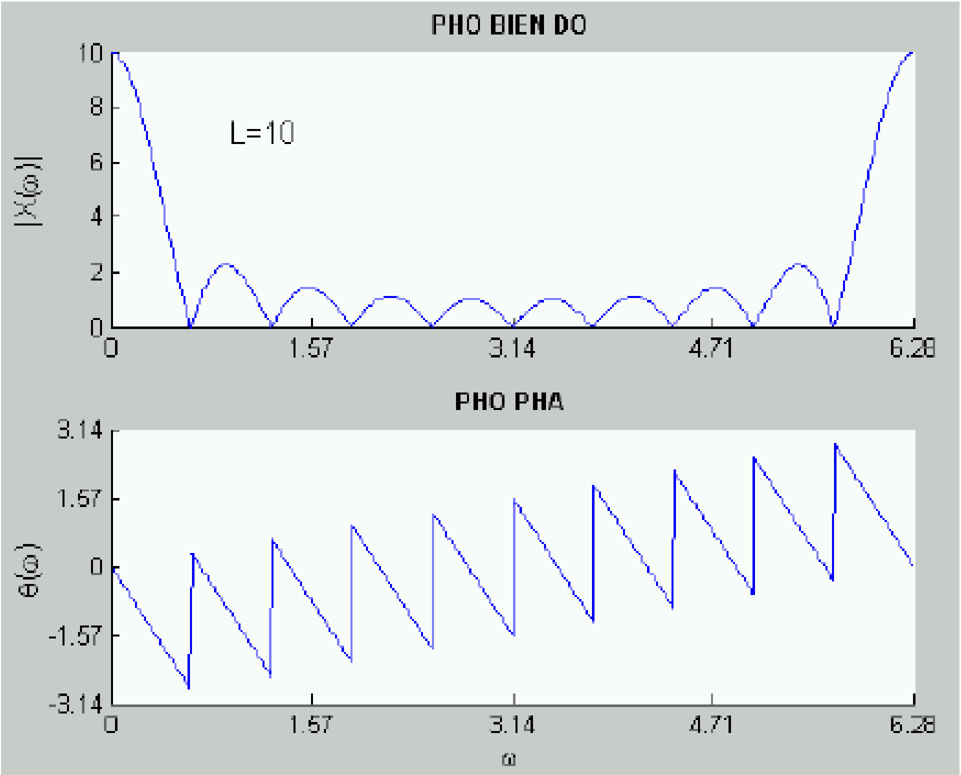
Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Ví dụ: xác định DFT N điểm của chuỗi x(n) có độ dài L hữu hạn (N≥L)

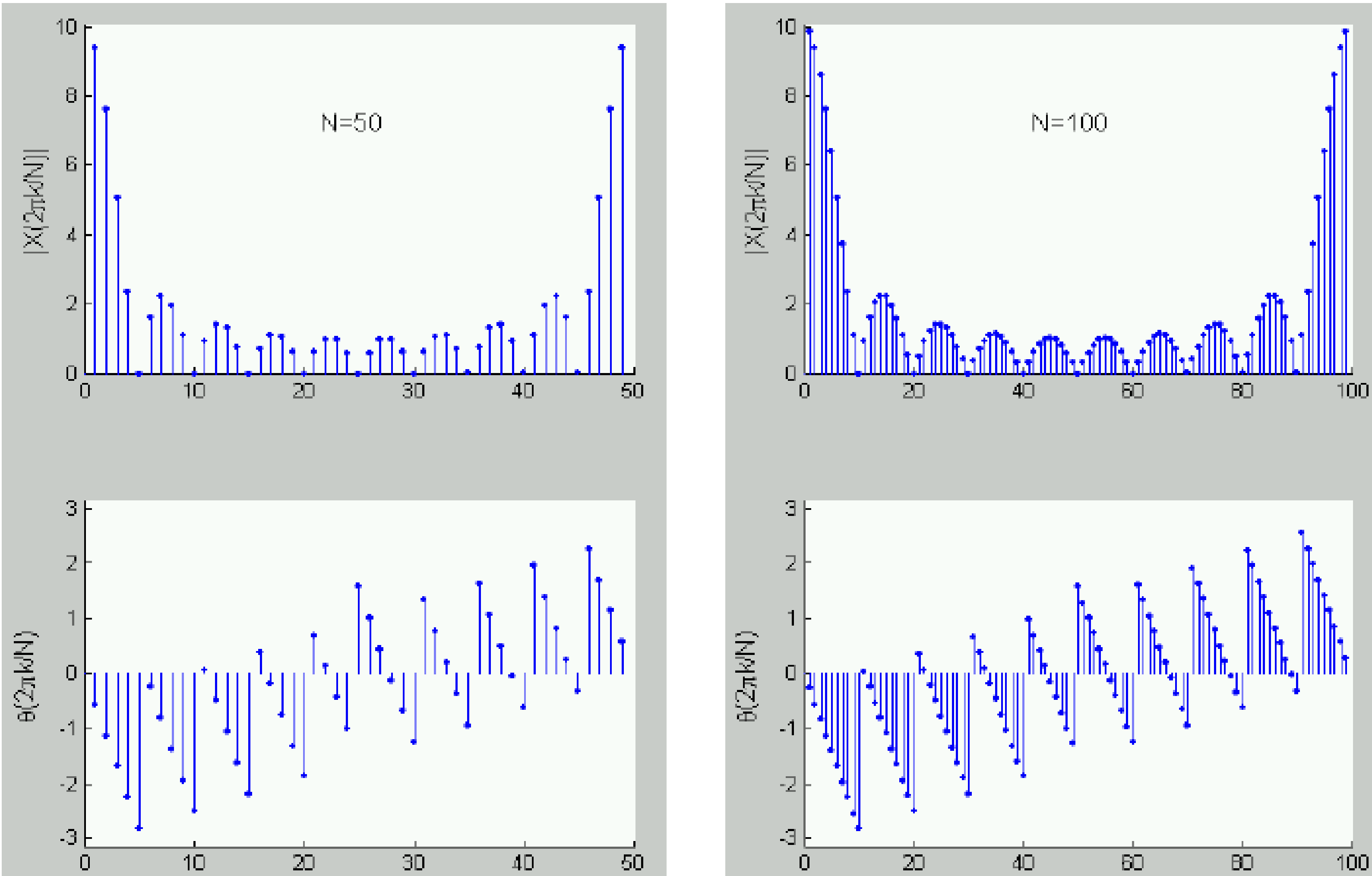
$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

DFT	IDFT
$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k=0,1,\ldots,N-1$	$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n=0,1,\ldots,N-1$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Nghiệm thứ N của đơn vị

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad n=0,1,\ldots,N-1$$

Tính DFT một điểm
- Nhân phức: N
- Cộng phức: N-1

Tính DFT N điểm
- Nhân phức: N²
- Cộng phức: N(N-1)

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$ Các mẫu miền thời gian

$$X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$ Các mẫu miền tần số

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$ Ma trận BĐ tuyến tính

- BĐ DFT N điểm

$$X_N = W_N . x_N$$

$$x_N = W_N^{-1} X_N$$
$$x_N = \tfrac{1}{N} W_N^* X_N$$

$$W_N^{-1} = \tfrac{1}{N} W_N^*$$
$$W_N W_N^* = N I_N$$

W_N là ma trận đường chéo

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Với hệ số Fourier của chuỗi chu kỳ

Chuỗi $x_p(n)$ tuần hoàn chu kỳ N

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$-\infty \le n \le \infty$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(k) = Nc_k$$

DFT N điểm cho chính xác phổ vạch của chuỗi tuần hoàn chu kỳ N

DFT N điểm của chuỗi x(n)

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$n = 0,1,\ldots,N-1$$

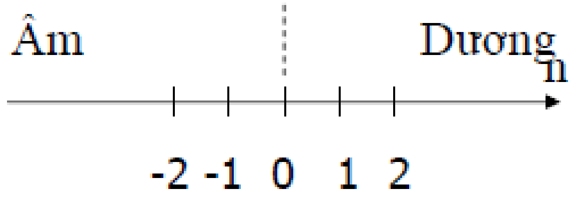
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$k = 0,1,\ldots,N-1$$

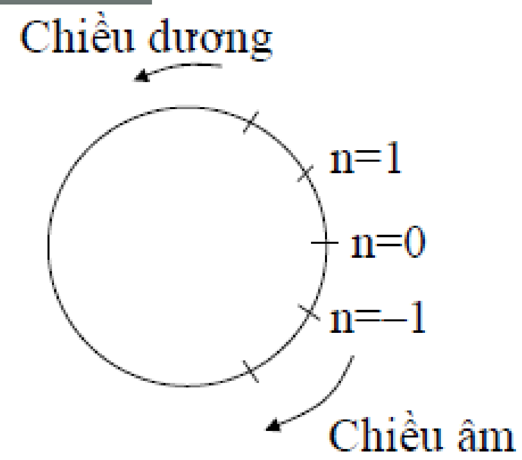
- Với BĐ Fourier của chuỗi không chu kỳ
  - DFT N điểm cho phổ vạch của chuỗi không chu kỳ x(n) nếu x(n) hữu hạn có độ dài $L \le N$
- SV xem thêm mối quan hệ giữa DFT và BĐ Z; giữa DFT và hệ số Fourier của t/h LTTG

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

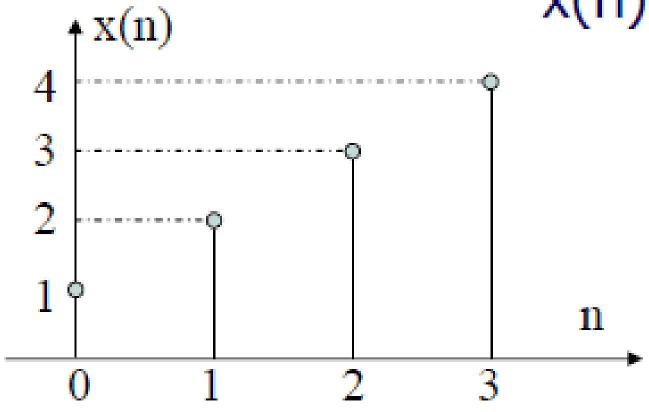
Dạng thẳng

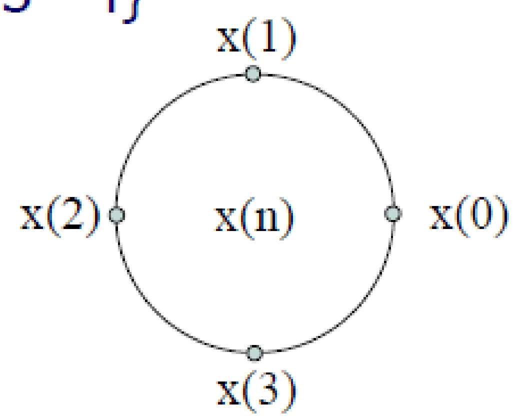


Dạng vòng



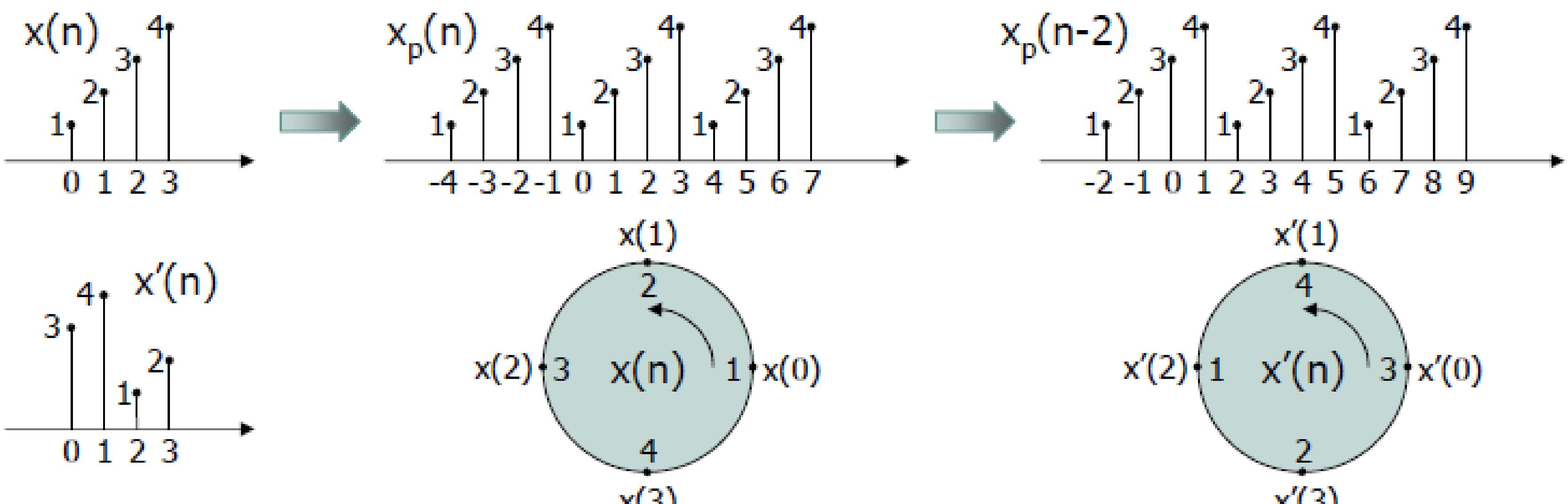
$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4\}$$





Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Chuỗi tuần hoàn chu kỳ N, mở rộng từ x(n) $x_p(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n - lN)$
- Chuỗi dịch $x_p(n)$ đi k mẫu $x_p'(n) = x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN - k)$
- Chuỗi có chiều dài hữu hạn từ $x'_p(n)$ $x'(n) = \begin{cases} x_p'(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
- Quan hệ giữa x(n) và x′(n): dịch vòng $x'(n) = x(n\text{-}k, \text{MOD } N) \equiv x((n\text{-}k))_N$



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Phép dịch vòng của một chuỗi N điểm tương đương với phép dịch tuyến tính của chuỗi mở rộng tuần hoàn của nó
- Chuỗi N điểm là *chẵn* theo vòng nếu nó đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N - n) = x(n),\ 0 \le n \le N - 1$
- Chuỗi N điểm là *lẻ* theo vòng nếu nó phản đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N - n) = -x(n),\ 0 \le n \le N - 1$
- Đảo theo thời gian của chuỗi N điểm: đảo các mẫu của chuỗi quanh điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x((-n))_N = x(N - n),\ 0 \le n \le N - 1$
  - Phép đảo được thực hiện bằng cách vẽ x(n) theo chiều kim đồng hồ

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Giả sử x(n) và BĐ DFT X(k) là t/h phức
  - $x(n) = x_R(n) + jx_I(n),\ 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_R(k) + jX_I(k),\ 0 \le k \le N-1$

$$\begin{cases} X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} + x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \\ X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} - x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \end{cases} \qquad \begin{cases} x_R(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} - X_I(k) \sin \frac{2\pi kn}{N} \right] \\ x_I(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k) \sin \frac{2\pi kn}{N} + X_I(k) \cos \frac{2\pi kn}{N} \right] \end{cases}$$

- Nếu x(n) thực: X(N-k) = X*(k) = X(−k)

$$|X(N-k)| = |X(k)| \quad \text{và} \quad \angle X(N-k) = -\angle X(k)$$

- Nếu x(n) thực và chẵn: $x(n) = x(N-n) \rightarrow X_I(k) = 0$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cos \frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thực và lẻ: $x(n) = -x(N-n) \rightarrow X_R(k) = 0$

$$X(k) = -j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sin \frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thuần ảo: $x(n) = jx_I(n)$

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \sin \frac{2\pi kn}{N} \qquad X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n) \cos \frac{2\pi kn}{N}$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Tuần hoàn

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(n) = x(n+N) & \forall n \\ X(k) = X(k+N) & \forall k \end{cases}$$

- Tuyến tính

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

- Tổng chập vòng

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(n) \, \text{N} \, x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k)X_2(k)$$

N Tích chập vòng N điểm

$$x_1(n) \, \text{N} \, x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\text{K}\ ,N-1$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$x(m) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k) = X_1(k)X_2(k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & a=1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases}$$

$$Trong\,đó \qquad a = e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n-l)}$$

$$a = 1, khi: m-n-l = pN, p \in Z$$

$$a \neq 1 \Rightarrow a^N = e^{j2\pi(m-n-l)} = 1 \Rightarrow 1-a^N = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & m-n-l = pN \Leftrightarrow l = ((m-n))_N \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(m) &= IDFT\{X(k)\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(m-n-l)} \end{aligned}$$

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N \qquad m = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Đảo vòng theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x((-n))_N = x(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X((-k))_N = X(N-k)$$

- Dịch vòng theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x((n-l))_N \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)e^{-j2\pi kl/N}$$

- Dịch vòng theo tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow x(n)e^{j2\pi nl/N} \xleftrightarrow{DFT_N} X((k-l))_N$$

- Liên hợp phức

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^*(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \\ x^*((-n))N = x^*(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*(k) \end{cases}$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Tương quan vòng

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \tilde{r}_{xy}(l) \xleftrightarrow{DFT_N} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

với $\tilde{r}_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))_N$

- Nhân 2 chuỗi

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} \tfrac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$$

- Định lý Parseval

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
  - ✦ Hàm liên tục theo tần số ω
  - ✦ Khó thực hiện trên các máy tính số
  - → DFT: một cách tính hiệu qủa của tổng chập miền thời gian
- Lọc tuyến tính
  - ✦ Tín hiệu ngắn

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \qquad y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

x(n) chiều dài = L (n=0,1,…,L-1)
h(n) chiều dài = M (n=0,1,…,M-1)

y(n) chiều dài N = M+L-1

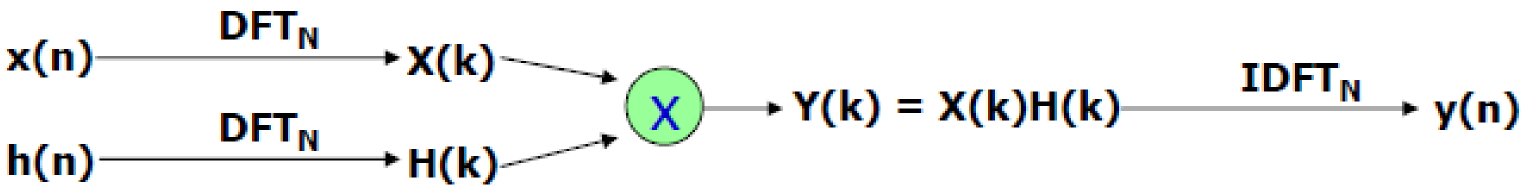
Số mẫu phổ (tần số) cần thiết để biểu diễn duy nhất chuỗi y(n) ≥ L+M-1

Y(k) = H(k)X(k), k=0,1,…,N-1
H(k), X(k): DFT N điểm của h(n), x(n)
(các số 0 được đệm vào để tăng kích thước chuỗi lên N)

$y(n) = \text{IDFT}_N\{Y(k)\}$

- Tổng chập vòng N điểm của h(n) và x(n) tương đương với tổng chập tuyến tính của h(n) với x(n)
- DFT có thể được dùng để lọc tuyến tính (bằng cách đệm thêm các số 0 vào chuỗi tương ứng)

- Tóm tắt

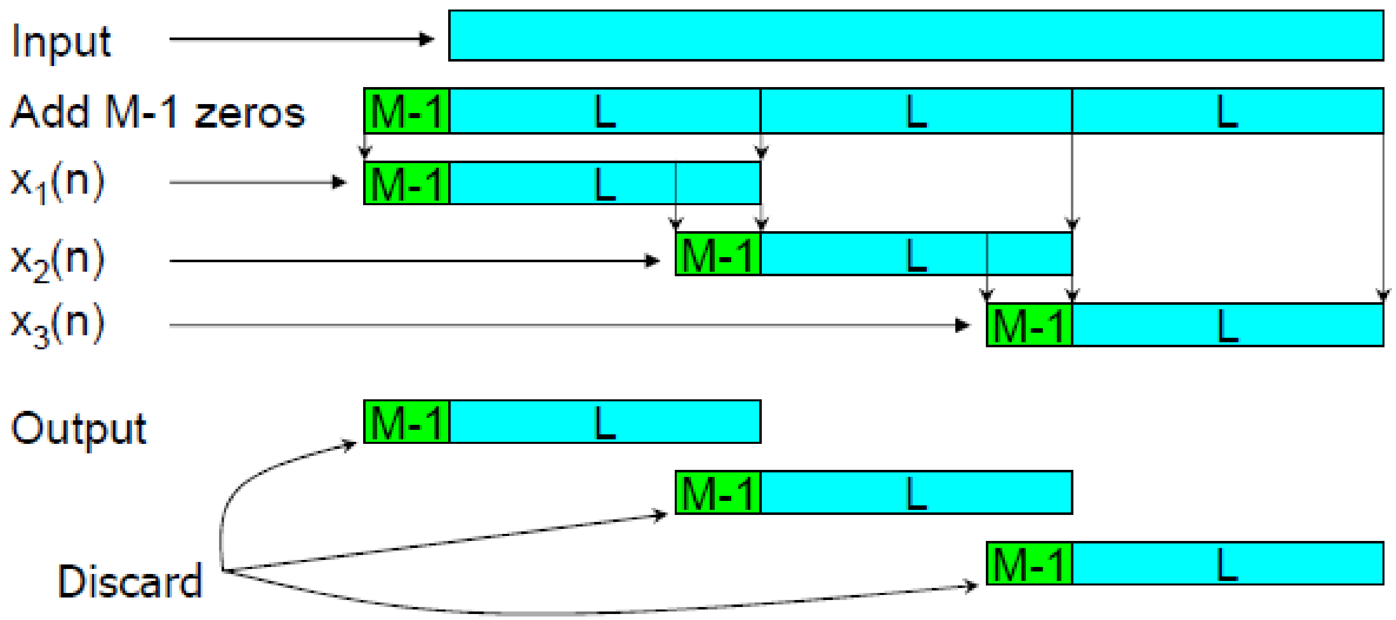


- Tín hiệu nhập dài: chia nhỏ x(n) thành từng block có độ dài cố định
  - Overlap-Save
  - Overlap-Add

- Giả thiết
  - Bộ lọc có h(n): chiều dài M
  - T/h nhập x(n): được chia nhỏ thành từng block có chiều dài L >> M

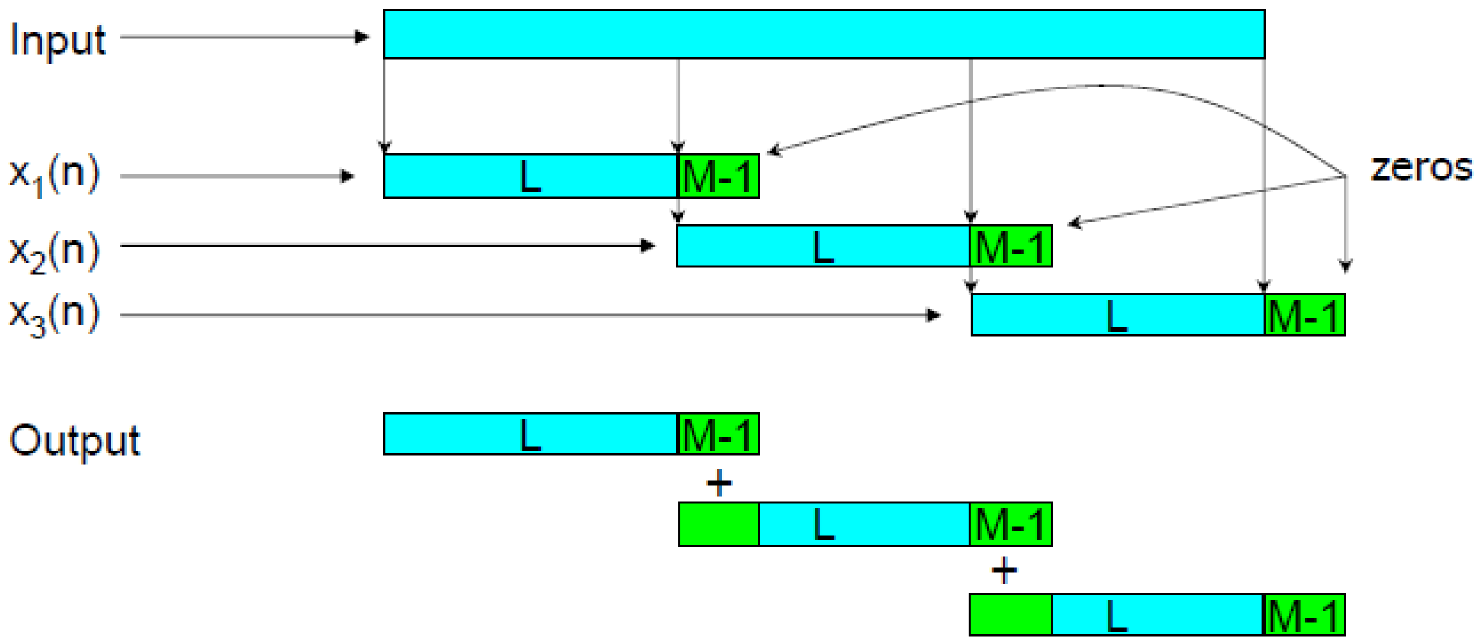
Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- DFT_N và $IDFT_N$ với $N = L+M-1$
- Mỗi block dữ liệu được xử lý bao gồm (M – 1) điểm của block trước và L điểm mới của t/h nhập
  - M-1 điểm của block đầu tiên được set bằng 0
- Đáp ứng xung của bộ lọc được đệm thêm (L – 1) số 0 để tăng chiều dài lên N
  - DFT của N điểm của h(n) được tính một lần duy nhất



Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Đệm thêm (M-1) số 0 vào mỗi block dữ liệu đầu vào



Phương pháp hiệu quả hơn dùng để xác định bộ lọc tuyến tính được trình bày trong chương 6

Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- T/h ngắn
  - Tính DFT từ x(n)
- T/h dài
  - Cửa sổ hoá

x(n): t/h cần phân tích
Giới hạn chiều dài chuỗi một khoảng L mẫu
⇔ Nhân chuỗi với cửa sổ chiều dài L

$x_w(n) = x(n)w(n)$
w(n): hàm cửa sổ

Hàm cửa sổ có chiều dài L
chỉ phân biệt được
nếu các tần số cách nhau
ít nhất một đoạn

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$$

Cửa sổ chữ nhật

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Cửa sổ Hanning

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{L-1}n\right) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

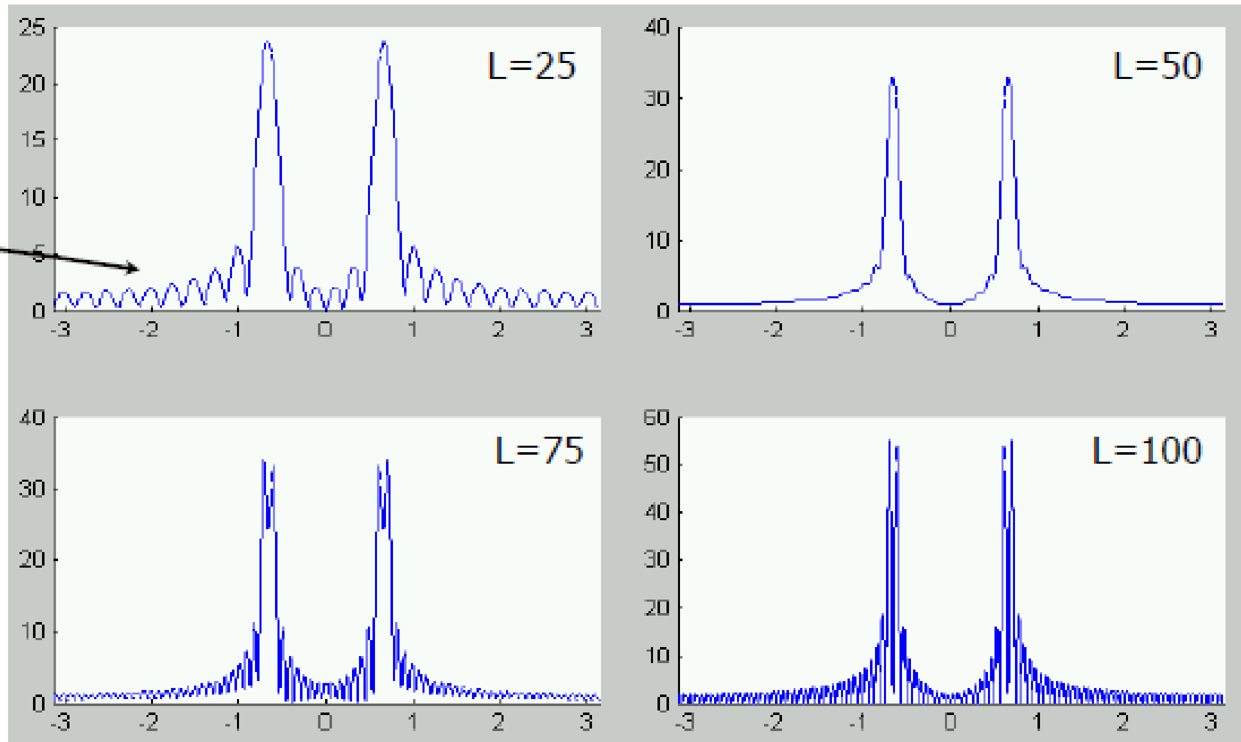
Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn

- Ví dụ $x(n) = \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n$ $\quad w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$$\hat{X}(\omega) = \tfrac{1}{2}\left[W(\omega-\omega_1) + W(\omega-\omega_2) + W(\omega+\omega_1) + W(\omega+\omega_2)\right]$$

$\omega_1 = 0.2\pi$
$\omega_2 = 0.22\pi$

Rò rỉ công suất



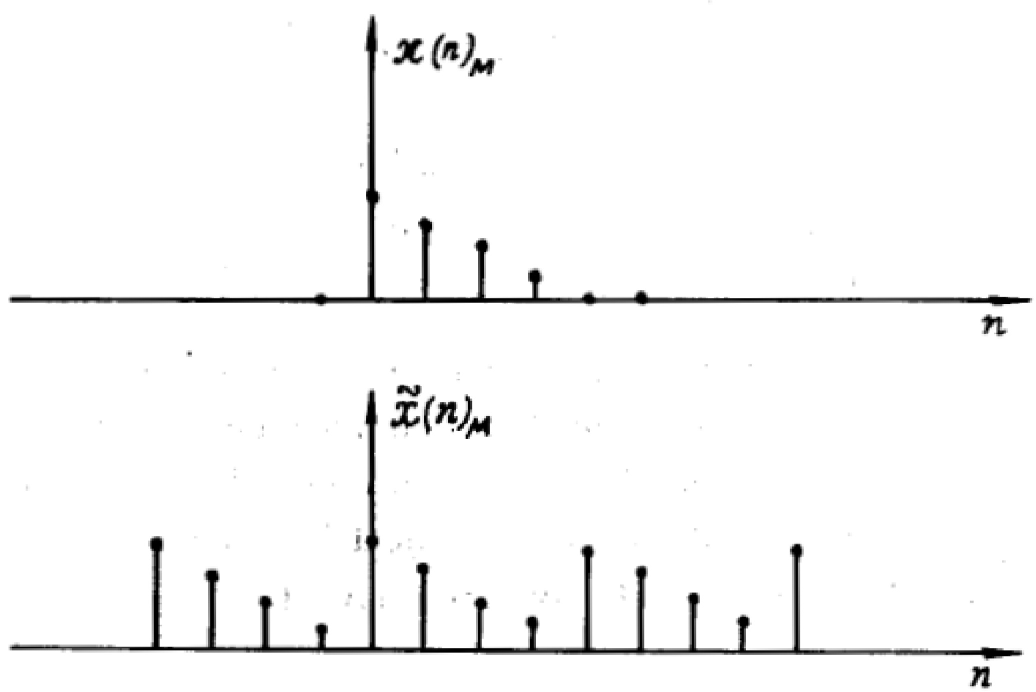
Chương 2 Biến đổi Fourier và Fourier rời rạc

- Biến đổi Fourier
  - Định nghĩa và các tính chất
  - Khái niệm đáp ứng tần số và bộ lọc số
- Biến đổi Fourier rời rạc cho tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

Nếu chúng ta có một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn M và một dãy tuần hoàn có chu kỳ N.

Nếu $M = N$ thì dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ chính bằng chính xác một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ $N = M$ $\tilde{x}(n)_M$. Hình (4.3.1.1) sẽ cho ta một ví dụ $M = N = 4$.



Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

Nếu $M < N$ thì ta thấy rằng dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ sẽ có thể bằng chính một chu kỳ của dãy tuần hoàn chu kỳ N $\tilde{x}(n)_N$ khi chúng ta coi dãy có chiều dài hữu hạn M $x(n)_M$ là một dãy có chiều dài N bằng cách kéo dài dãy này thêm $N - M$ mẫu có giá trị không.

$$x(n)_M \rightarrow x(n)_N$$

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (*DFT*) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau:

Biến đổi Fourier thuận

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_n^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ký hiệu :

$$DFT[x(n)] = X(k)$$

$$x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$$

Biến đổi Fourier ngược (*IDFT*)

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_n^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ký hiệu :

$$IDFT\,[X(k)] = x(n)$$

$$X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n)$$

Ở đây ta gọi $X(k)$ là phổ rời rạc của tín hiệu $x(n)$, và nếu biểu diễn ở dạng modul và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$\varphi(k) = \arg\,[X(k)] \qquad (4.3.1.3)$$

$|X(k)|$: Gọi là phổ rời rạc biên độ.

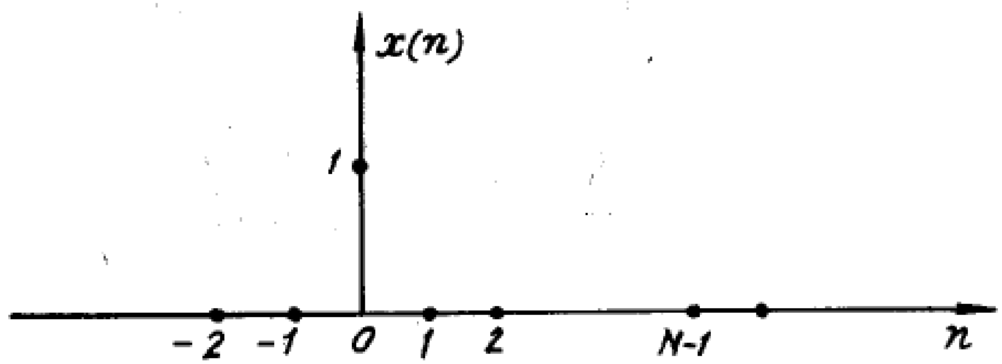
$\varphi(k)$: Gọi là phổ rời rạc pha.

Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

➢ VD1: Hãy tìm *DFT* của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \delta(n)$$

Giải : Muốn tìm *DFT* trước hết ta phải chọn chiều dài của *DFT*, tức là chọn chiều dài của dãy. Giả sử ta chọn là N, vậy dãy $x(n)$ có dạng sau (hình 4.3.1.3).



Và $X(k)$ được tính như sau:

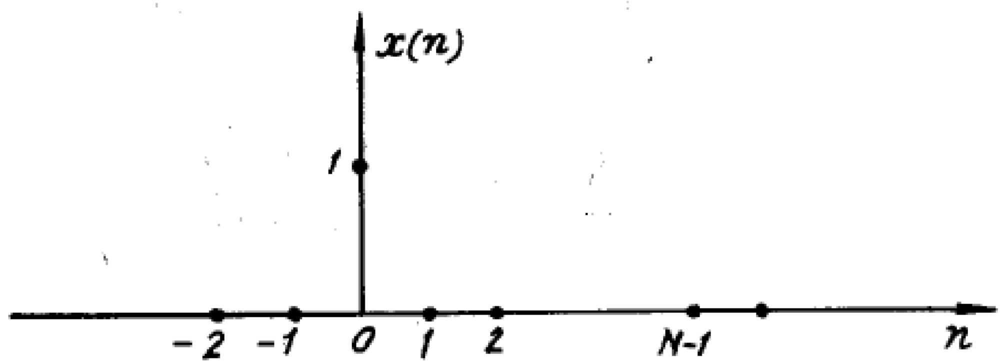
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn}$$

Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

➤ VD1: Hãy tìm *DFT* của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \delta(n)$$

Giải : Muốn tìm *DFT* trước hết ta phải chọn chiều dài của *DFT*, tức là chọn chiều dài của dãy. Giả sử ta chọn là N, vậy dãy $x(n)$ có dạng sau (hình 4.3.1.3).



Và $X(k)$ được tính như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn}$$

- VD:

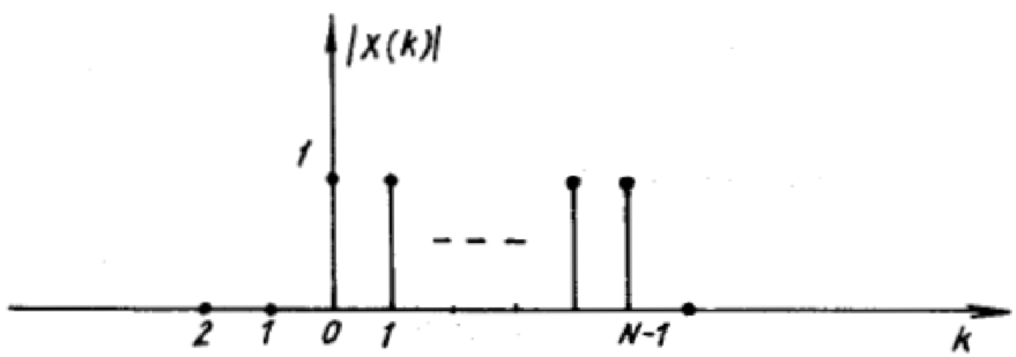
$$= \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0 \qquad \forall k$$

$|X(k)|$ có dạng sau (hình 4.3.1.4).



Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

➢ VD2: Hãy tìm *DFT* của dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải : Theo định nghĩa *DFT* ta có:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (a\,W_N^k)^n = \frac{1-(a\,W_N^k)^N}{1-a\,W_N^k}$$

mà: $W_N^{kn} = 1 \qquad \forall k$.

- VD2: Vậy:

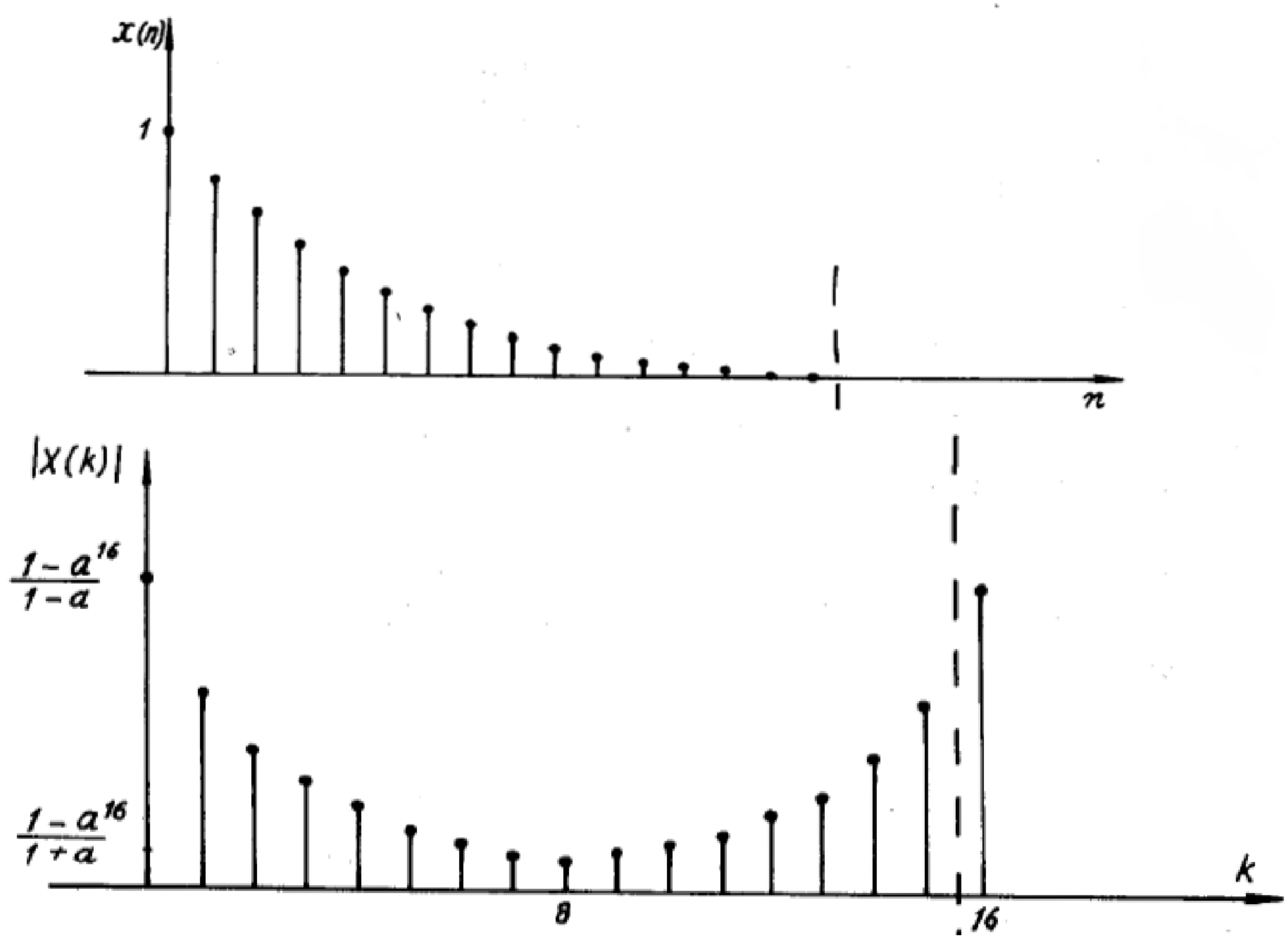
$$X(k) = \frac{1-a^N}{1-a\,W_N^k}$$

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \frac{1-a^N}{\sqrt{\left(1-a\cos\frac{2\pi}{N}k\right)^2 + a^2\sin^2\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-a^N}{\sqrt{1-2a\cos\frac{2\pi}{N}k + a^2}}$$

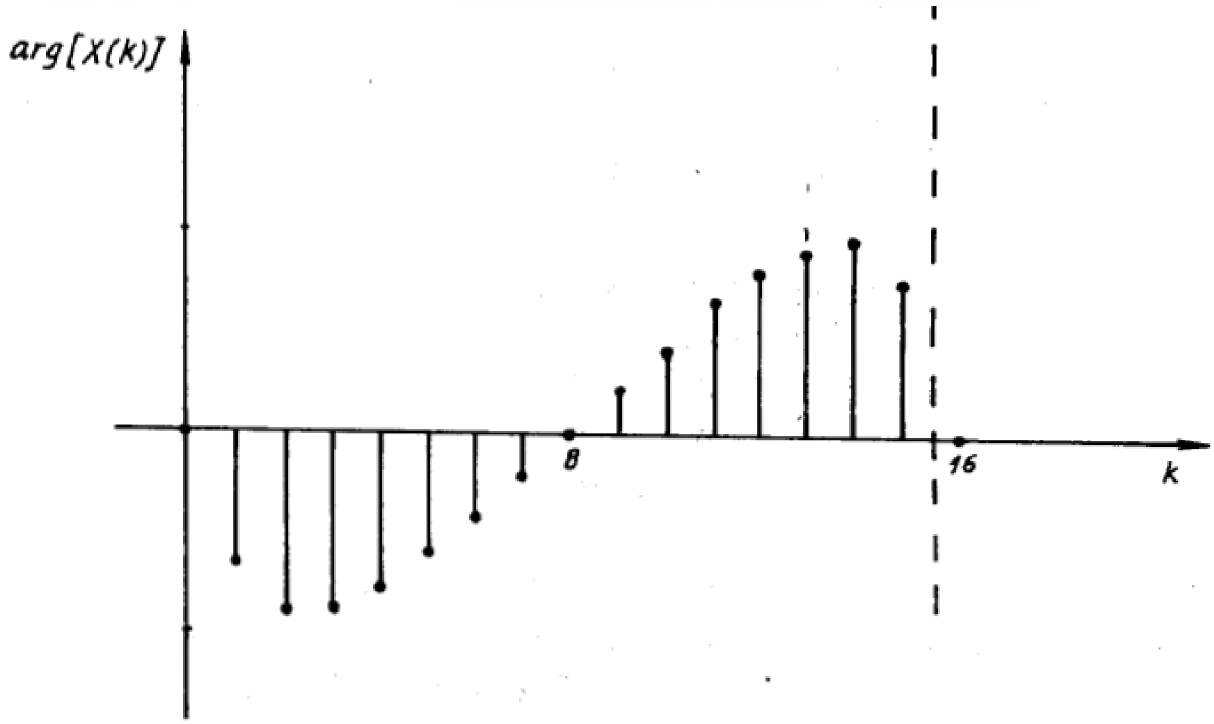
Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

- VD2:



Biến đổi Fourier rời rạc cho dãy có chiều dài hữu hạn

- VD2:



➢ Đề bài:

Câu 1:

a. Xác định phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn với $x(n)=4\sin(\pi(n-2)/3)$

b. Tính biến đổi Fourier của tín hiệu sau: $x(n)=u(n)-u(n-6)$

c.Xác định tín hiệu rời rạc với $X(\omega)=\cos^2\omega$.

Câu 2:

a. Xác định phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn: $x(n)=\mathrm{Cos}(2\pi n/3)+\sin(2\pi n/5)$.

b.Tính biến đổi Fourier của tín hiệu: $x(n)=2^n u(-n)$

c. Xác định tín hiệu có biến đổi Fourier sau:

$$X(\omega)=\begin{cases}0 & 0\le|\omega|\le\omega_0\\ 1 & \omega_0\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

d. Xác định các tín hiệu tuần hoàn x(n) với tần số cơ bản N=8 nếu các hệ số Fourier của nó là:

$$c_k=\begin{cases}\sin\dfrac{k\pi}{3} & 0\le k\le 6\\ 0 & k=7\end{cases}$$

Chương 3 Tổng hợp các bộ lọc số đáp ứng xung hữu hạn

- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

Chương 3 Tổng hợp các bộ lọc số đáp ứng xung hữu hạn

- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

Giới thiệu chung

Một hệ thống dùng để làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số .

Trong miền rời rạc hệ thống tuyến tính:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

trong đó :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).x(n-m) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m).h(n-m)$$

h(n) : là đáp ứng xung của hệ thống và ta biết rằng đáp ứng xung là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền n. Mặt khác một lớp các hệ thống tuyến tính bất biến được biểu diễn bởi phương trình sai phân sau đây :

Giới thiệu chung

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Tổng hợp tất cả các hệ số a_k và b_r sẽ biểu diễn một hệ thống tuyến tính bất biến . Tức là các hệ số a_k và b_r đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống .

Trong miền Z hệ thống được đặc trưng bởi hàm truyền đạt H(Z)

$$H(Z) = ZT[h(n)] = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}}$$

Khi đó , trong miền tần số :

Nếu hàm truyền đạt H(Z) được đánh giá trên vòng tròn đơn vị đối với $|Z|=1$ thì chúng ta có đặc tính tần số H($e^{j\omega}$)

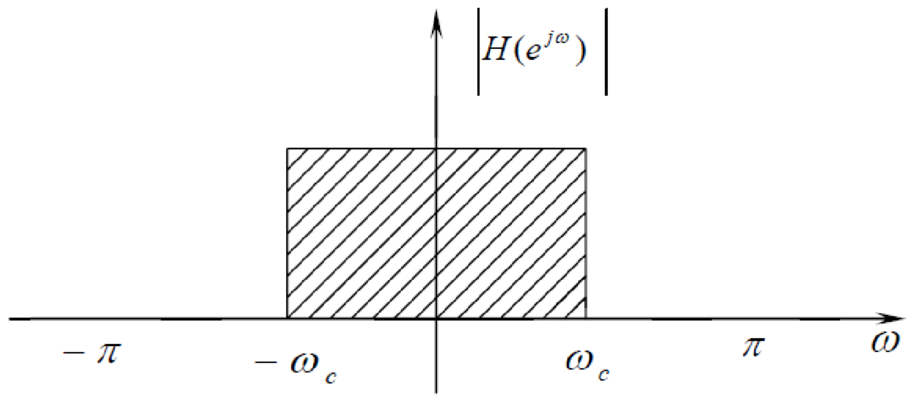
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) . X(e^{j\omega})$$

Giới thiệu chung

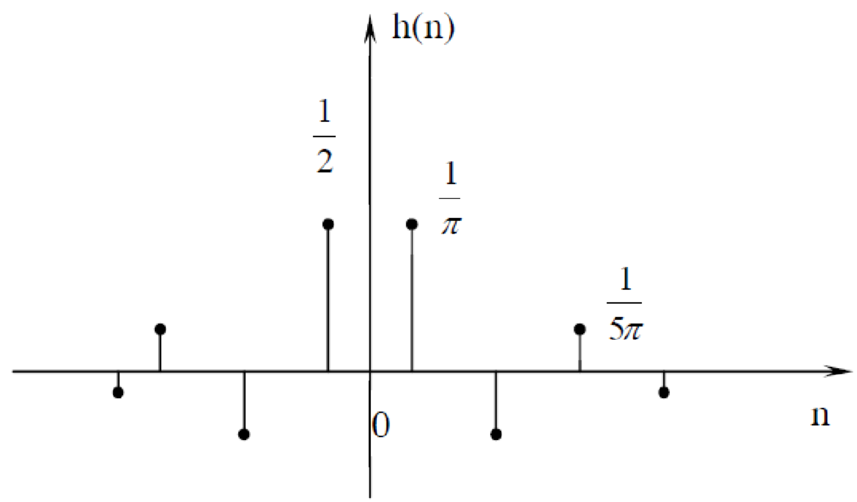
- ➢ **Các mạch lọc số lý tưởng:**
- ◆ **Bộ lọc thông thấp:**

$$
\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \text{với } \omega \text{ còn lại} \end{cases}
$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



$$
\mathrm{h(n)} = \frac{\omega_c}{\pi}\,\frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}
$$

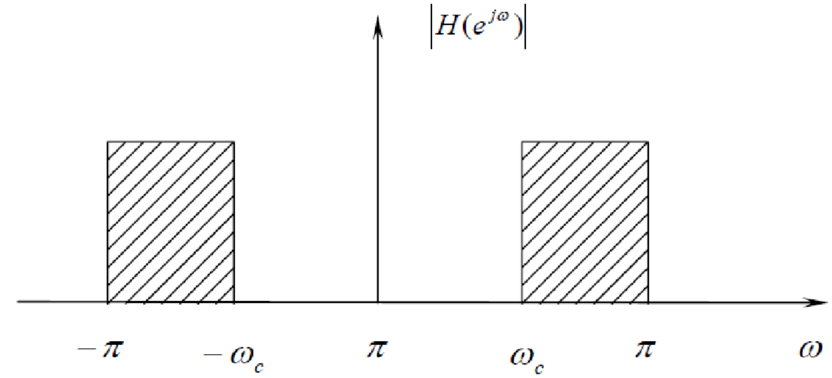


Giới thiệu chung

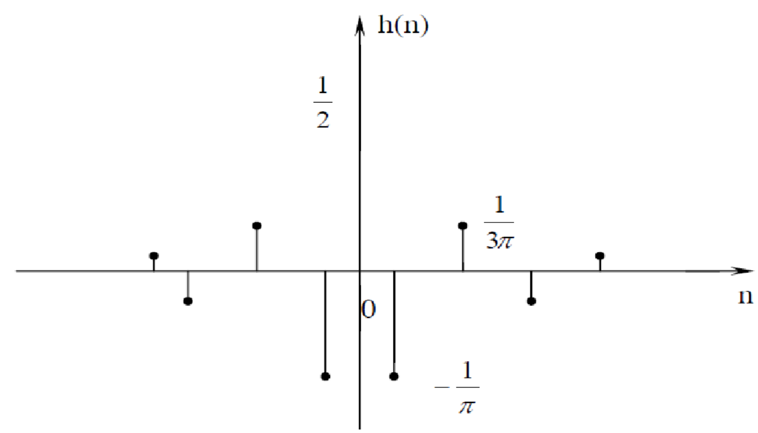
- **Các mạch lọc số lý tưởng:**
- **Bộ lọc thông cao:**

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \text{với } \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

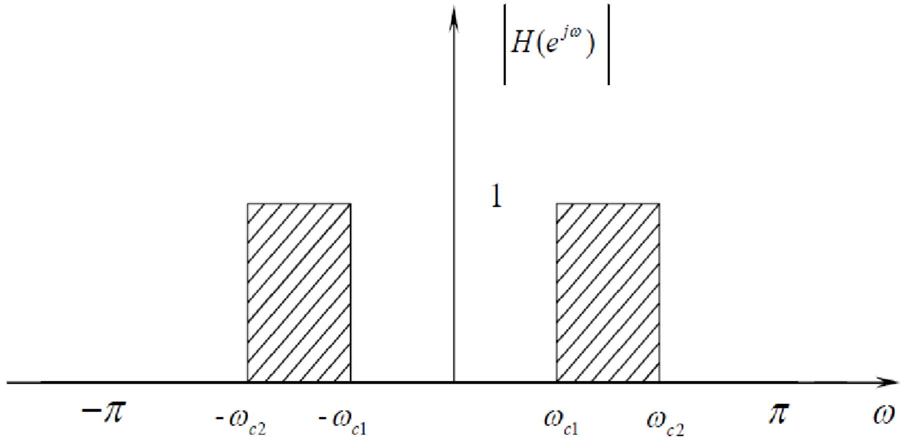


Giới thiệu chung

- Các mạch lọc số lý tưởng:
- Bộ lọc thông dải:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c2} \le \omega \le -\omega_{c1} \\ \omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2} \end{cases} \\ 0 & \text{với } \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



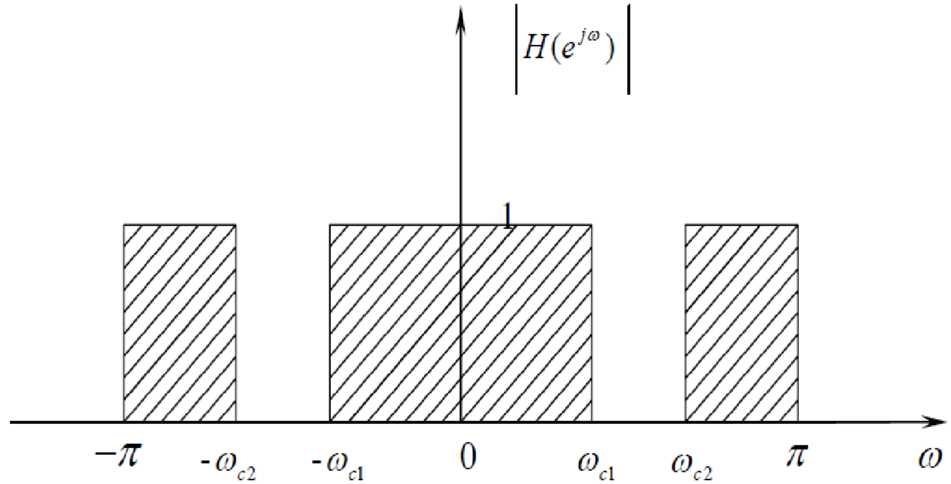
$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}$$

Giới thiệu chung

- Các mạch lọc số lý tưởng:
- Bộ lọc chắn dải:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_{c2} \\ -\omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c1} \\ \omega_{c2} \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \text{với } \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}\right]$$

Giới thiệu chung

➢ Các mạch lọc số thực tế:

Các bộ lọc số thực tế được đặc trưng bởi các tham số kỹ thuật trong miền tần số liên tục ω có bốn tham số chính là :

δ_1 : độ gợn sóng ở dải thông

δ_2 : độ gợn sóng ở dải chắn .

ω_p : tần số giới hạn (biên tần) dải thông .

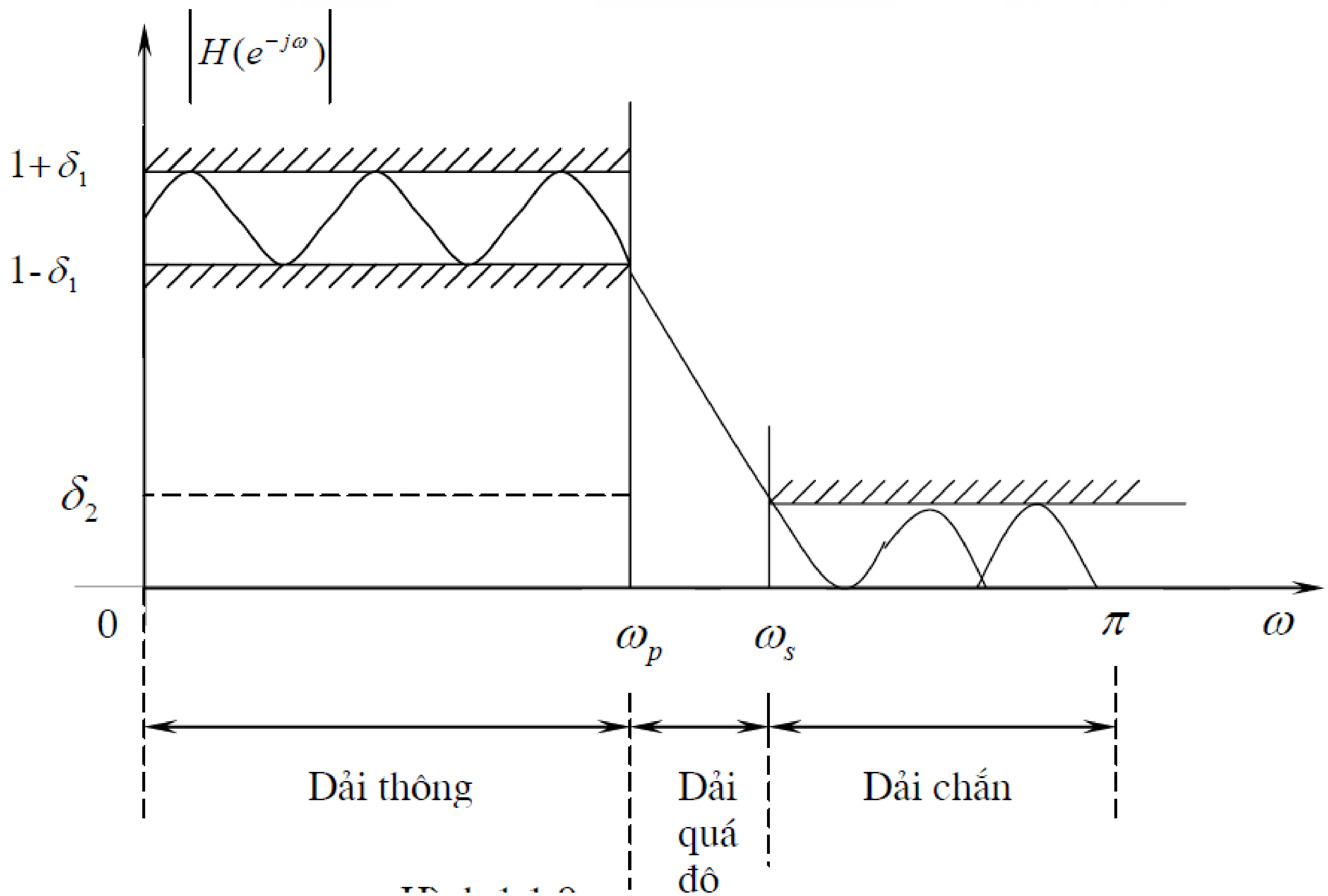
ω_s : tần số giới hạn (biên tần) dải chắn .

Ngoài ra còn tham số phụ là :

$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$: bề rộng dải quá độ .

Giới thiệu chung

➢ Các mạch lọc số thực tế:



Giới thiệu chung

➢ Phân loại mạch lọc số:

Để tổng hợp bộ lọc số xuất phát từ mạch lọc số lý tưởng . Đặc tính tần số $H(e^{j\omega})$ khi đó đáp ứng xung của mạch lọc lý tưởng h(n) có dạng sinx/x do vậy nó có chiều dài vô hạn .

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=\infty}^{\infty} h(m).x(n-m)$$

$$L[h(n)] = [0, \infty]$$

$$\sum_{m=\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Từ các quan hệ này cho thấy rằng chiều dài của đáp ứng xung là rất quan trọng Do đó , có thể phân loại các hệ thống theo chiều dài của đáp ứng xung h(n) hai loại như sau .

Giới thiệu chung

➢ Phân loại mạch lọc số:

<u>Loai thứ nhất</u> : Hệ thống được đặc trưng bởi đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn . Nó được gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (Tiếng Anh là Finite - Impulse Responseviết tắt là FIR) tức là h(n) chỉ khác không trong một khoảng có chiều dài hữu hạn N (từ 0 đến N-1).

<u>Loai thứ hai :</u> Hệ thống được đặc trưng bởi đáp ứng xung có chiều dài vô hạn . Hệ thống được gọi là hệ thống có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn (Tiếng Anh infinte – Impulse Response viết tắt là IIR) , tức là h(n) khác không trong một khoảng vô hạn .

Chương 3 Tổng hợp các bộ lọc số đáp ứng xung hữu hạn

- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Đặc tính tần số của Pha (đặc tính pha)

Giả sử h(n) là đáp ứng xung của bộ lọc FIR xác định bởi các mẫu .n=0,1...N-1 tức là

$$L\left[h(n)\right] = \left[0, N-1\right] = N$$

Hàm truyền đạt như sau .

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + \ldots + h(N-1)z^{-(N-1)}$$

Đáp ứng tần số .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n + j\left[-\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n\right]$$

Hoặc

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)}$$

trong đó

$$\theta(\omega) = \arg\left[H(e^{j\omega})\right]$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Đặc tính tần số của Pha (đặc tính pha)

Mà ta dã biết đáp ứng tần số H($e^{j\omega}$) tuần hoàn với chu kỳ 2π tức là :

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2k\pi)})$$

Mặt khác nếu h(n) là thực thì theo tính chất biến đổi fourier đối với tín hiệu rời rạc có .

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{-j\omega})\right|$$

$$\arg\left[H(e^{j\omega})\right] = -\arg\left[H(e^{j\omega})\right]$$

hoặc

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

$\left|H(e^{j\omega})\right|$: là hàm chẵn đối xứng

$\theta(\omega)$: là hàm lẻ phản đối xứng .

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:

Để tổng hợp được bộ lọc FIR thì điều kiện cần là hệ thống phải tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định .

Một hệ thống được gọi là ổn định, nếu và chỉ nếu với dãy đầu vào giới hạn, có dãy đầu ra giới hạn, tức là với:

$$|x(n)| < \infty \text{ với n bất kỳ}$$

$$|y(n)| < \infty \text{ với n bất kỳ}$$

Tuy nhiên để tổng hợp bộ lọc FIR thì những điều kiện ràng buộc trên chưa đủ. Do vậy phải xét thêm điều kiện ràng buộc nữa về pha. Đây là điều kiện tuyến tính và đặc tính tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ được biểu diễn dưới dạng sau:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

Thời gian lan truyền của tín hiệu τ được tính như sau:

$$\tau = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

Vậy trong trường hợp này $\tau = -\alpha$.

Như vậy hằng số α sẽ biểu diễn thời gian truyền tín hiệu τ.

Từ biểu thức : $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**

Trường hợp 1: $\beta = 0$:

$$\Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \ (-\pi \le \omega \le \pi).$$

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega})\, e^{-j\omega\alpha}$$

$$= A(e^{j\omega})\left[\cos\alpha\omega - j\sin\alpha\omega\right]$$

Ngoài ra $H(e^{j\omega})$ có thể tính theo FT $[h(n)]$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n + j\left[-\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n\right]$$

$$A(e^{j\omega})\cos\omega\alpha = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n$$

$$A(e^{j\omega})\sin\alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n}$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**

$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$

$$\Rightarrow \text{tg}\alpha\omega = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n)\sin\omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n)\cos\omega n}$$

Đến đây α xuất hiện hai trường hợp: $\alpha = 0$ và $\alpha \neq 0$.

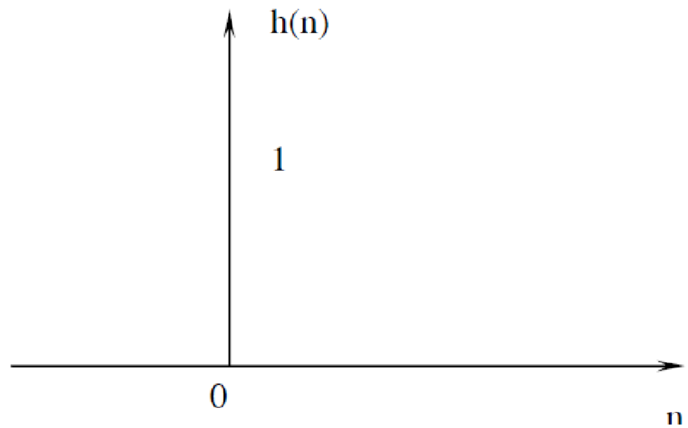
Xét với : $\alpha = 0 \Rightarrow \text{tg}0 = 0$

$\Rightarrow h(n) = 0$ với mọi $n \neq 0$ và $h(0) \neq 0$.

$$h(n) = \begin{cases} \neq 0 & \text{với } n = 0 \\ 0 & \text{với n còn lại} \end{cases}$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**



Trong trường hợp này không ứng dụng được cho mạch lọc nên dừng không xét.

Xét với : $\alpha \neq 0$.

$$\frac{\sin \alpha\omega}{\cos \alpha\omega} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos \omega n}$$

$$\sin\alpha\omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n = \cos\omega\alpha \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:

Có thể viết lại quan hệ này dưới dạng sau:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\,[\cos\omega n.\sin\alpha\omega - \sin\omega n.\cos\alpha\omega] = 0$$

vậy ta có :

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\alpha - n)\omega] = 0$$

Từ phương trình trên có một nghiệm duy nhất là.

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$h(n) = h(N\text{-}1\text{-}n) \qquad 0 \le n \le N\text{-}1$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD1:**

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ có $N = 7$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 4$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Giải :

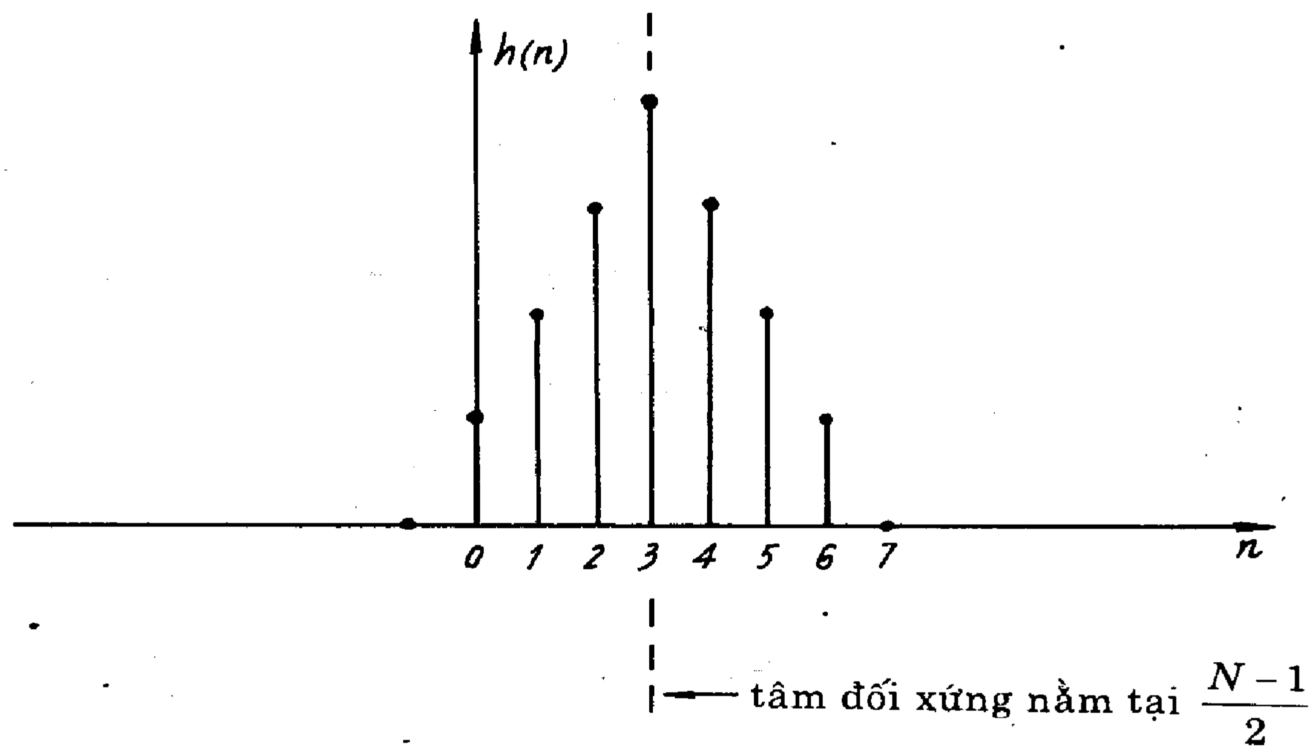
$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = h(6-n)$$

Vậy $h(0) = h(6)$, $h(1) = h(5)$, $h(2) = h(4)$ và $h(3)$.

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD1:**



Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

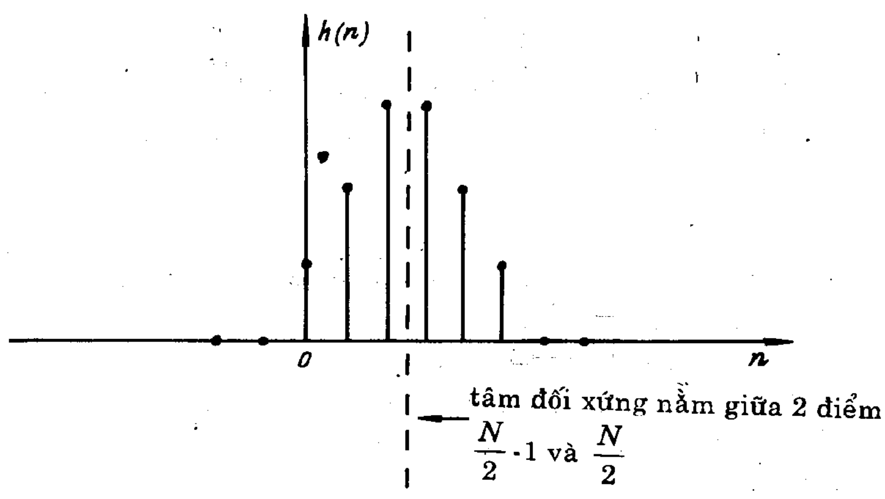
- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD2:** Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha(\omega)$ có $N = 6$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2{,}5$$

$$h(n) = h(5 - n)$$

Vậy $h(0) = h(5), h(1) = h(4), h(2) = h(3).$



Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:

- Đối với một giá trị N chỉ có một giá trị α đảm bảo pha tuyến tính .

- Đối với giá trị α này , đáp ưng xung h(n) là đối xứng .

- Nếu N lẻ thì α là một số nguyên tâm đối xứng của đáp ứng xung trùng với mẫu $\dfrac{N-1}{2}$.

- Nếu N chẩn thì α là một số không nguyên và tâm đối xứng của đáp ứng xung nằm giữa hai mẫu $\dfrac{N-1}{2}$ và $\dfrac{N}{2}$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**

Trường hợp 2: $\beta \neq 0$.

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega})\, e^{j(\beta-\alpha\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[\beta+(\alpha-n)\omega] = 0$$

Nghiệm duy nhất của phương trình có dạng .

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n) \qquad 0 \le n \le N-1$$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD1:**

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$, có $N = 7$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Giải :

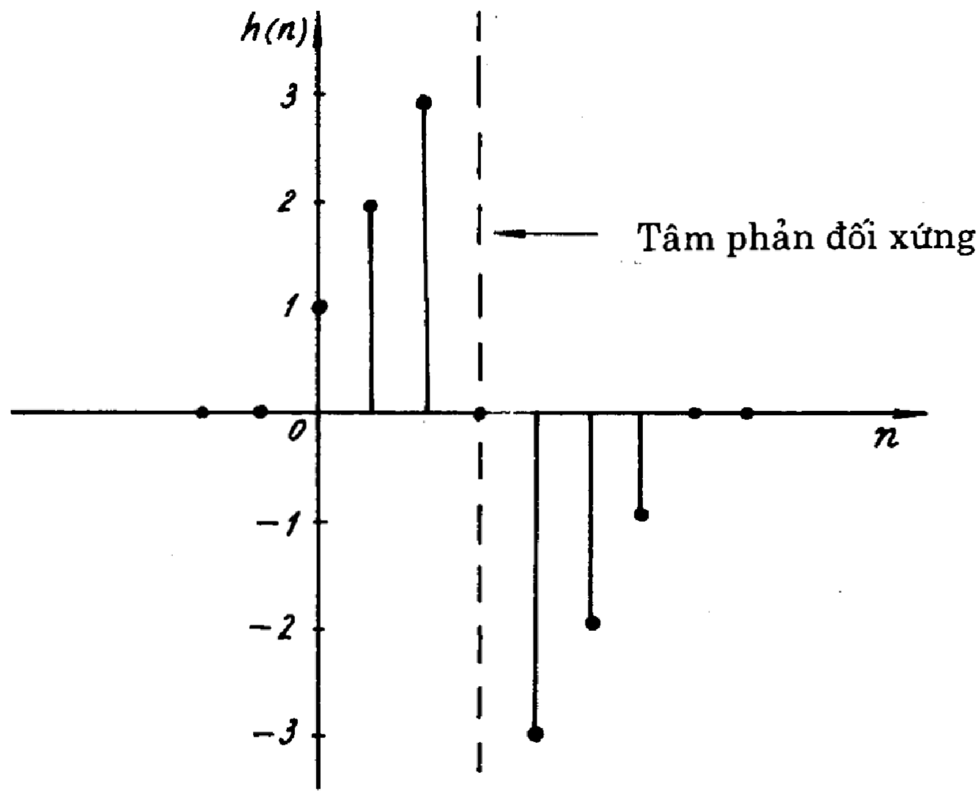
$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = -h(6-n)$$

Vậy $h(0) = -h(6)$, $h(1) = -h(5)$, $h(2) = -h(4)$ và $h(3) = -h(3) = 0$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD1:**



Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD2:**

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ có $N = 6$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Giải :

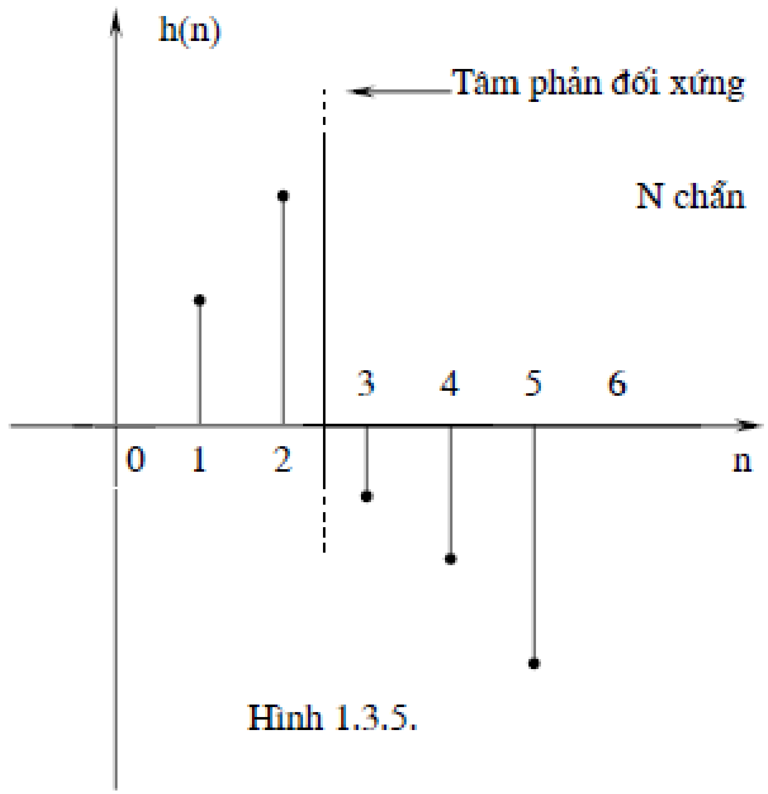
$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2{,}5$$

$$h(n) = -h(5-n)$$

Vậy $h(0) = -h(5)$, $h(1) = -h(4)$, $h(2) = -h(3)$

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:**
- **VD2:**



Hình 1.3.5.

Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ Điều kiện pha tuyến tính của bộ lọc FIR:

Từ kết quả tính toán đối với bộ lọc FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ có thể phân bộ lọc thành 4 loại như sau :

Bộ lọc số loại một (h(n) đối xứng N lẻ).

Bộ lọc số loại hai (h(n) đối xứng N chẵn).

Bộ lọc số loại ba (h(n) phản đối xứng N lẻ).

Bộ lọc số loại bốn (h(n)phản đối xứng N lẻ).

Cả bốn loại bộ lọc trên đây cho phép xác định đáp ứng tần số sao cho thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc .

Chương 3 Tổng hợp các bộ lọc số đáp ứng xung hữu hạn

- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Bộ lọc loại một . (N lẻ h(n) đối xứng)

$$\beta = 0: \quad \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \qquad (-\pi \le \omega \le \pi).$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega}$$

Do tính đối xứng của h(n) nên có thể biểu diễn $H(e^{j\omega})$ như sau .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đặt n = N -1-m. Viết lại phương trình dưới dạng .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Từ tính chất h(n) = h(N-1-n)

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos\omega n\right] e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

$$\Rightarrow a(0) = h(\frac{N-1}{2} - 0)$$

$$a(n) = 2h(\frac{N-1}{2} - n) \qquad 1 \le n \le \frac{N-1}{2}$$

Từ biểu thức :

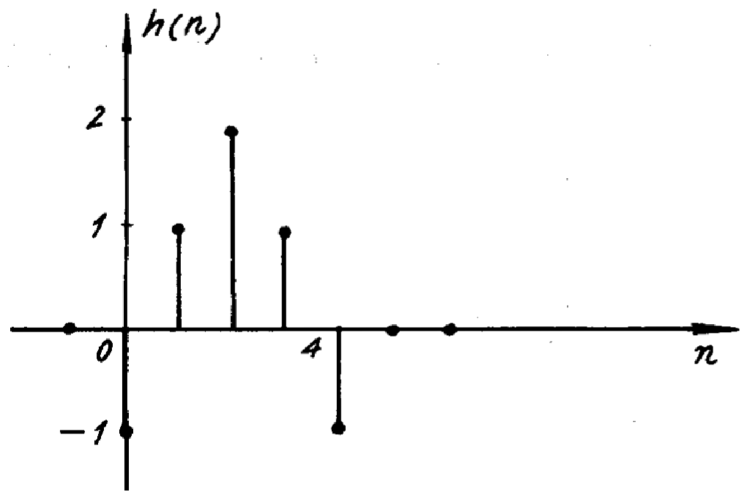
$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos\omega n$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}.$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **VD:** Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số FIR pha tuyến tính như trên hình

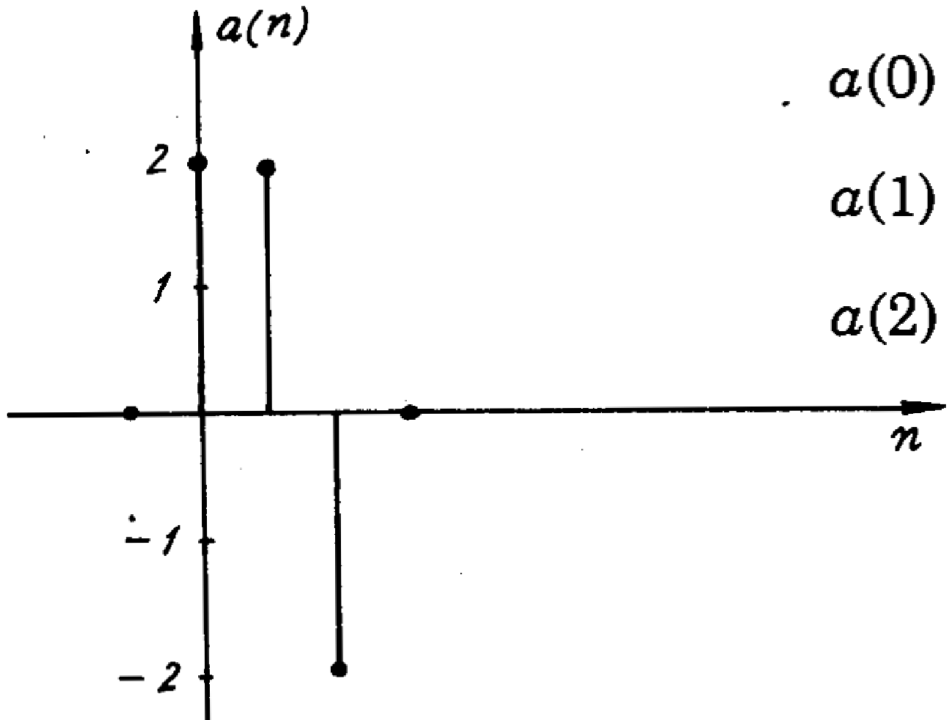


Hãy tìm $a(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $\left|H(e^{j\omega})\right|$.

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **VD:**

$$N = 5 \, , N - 1 = 4$$



$$a(0) = h(2 - 0) = h(2) = 2$$

$$a(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = 2$$

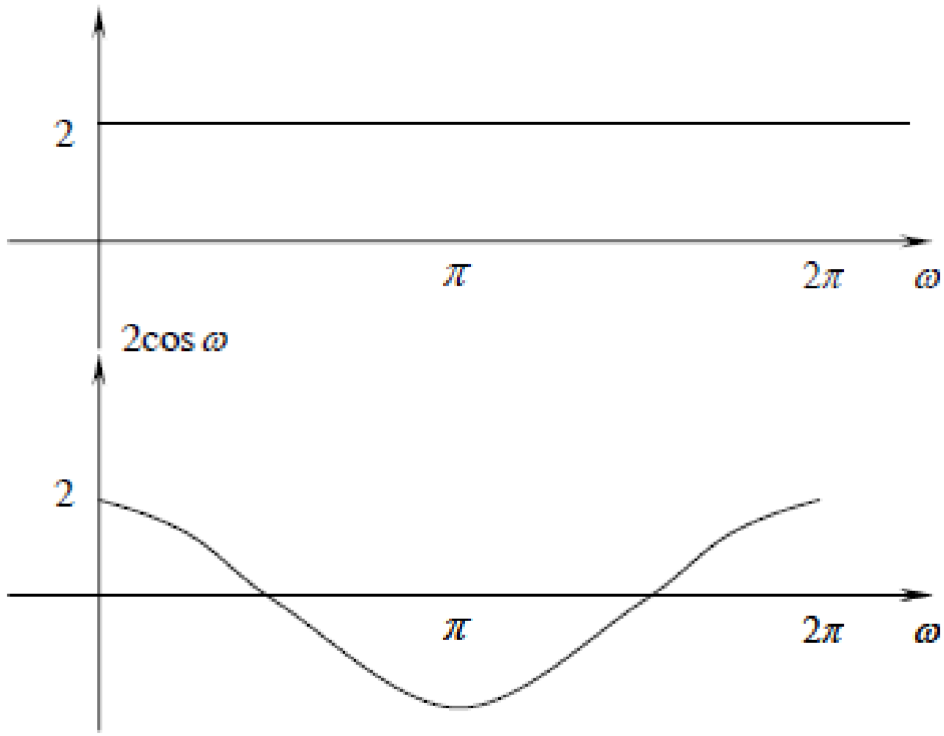
$$a(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = -2$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

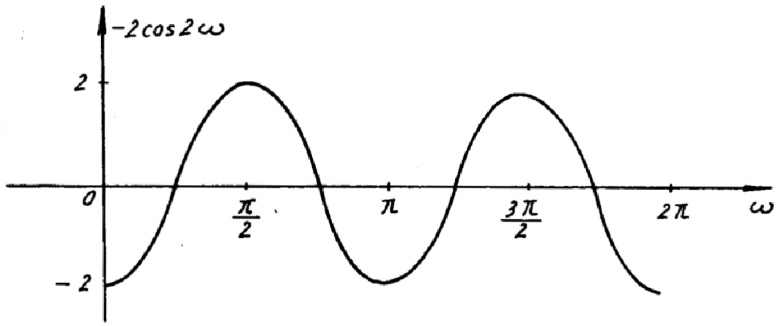
➢ **VD:**

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{2} a(n)\cos\omega n = a(0)\cos 0 + a(1)\cos\omega + a(2)\cos 2\omega = 2 + 2\cos\omega - 2\cos 2\omega$$

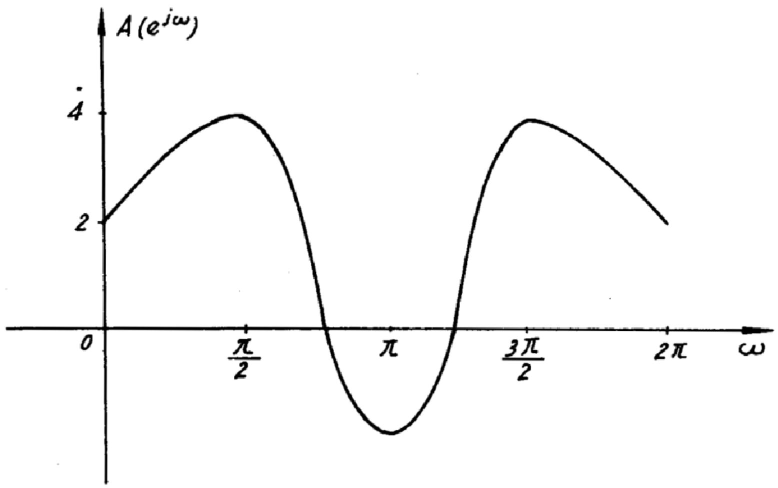
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$



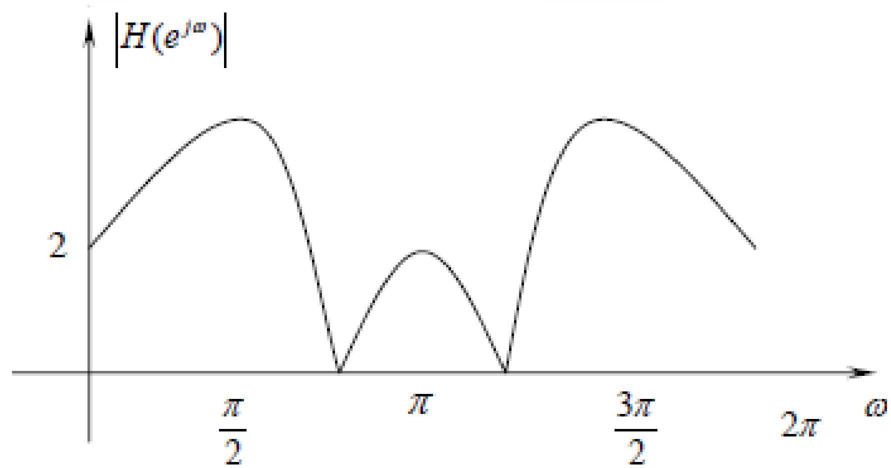
- **VD:**



$-2\cos 2\omega$
2
0
-2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ω



$A(e^{j\omega})$
4
2
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ω



$|H(e^{j\omega})|$
2
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
ω

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Bộ lọc loại hai . (N chẵn h(n) đối xứng).

$$\beta = 0: \quad \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \qquad (-\pi \le \omega \le \pi).$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega}$$

Do N chẵn nên có thể biểu diễn $H(e^{j\omega})$ như sau .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đặt n = N -1-m. Viết lại phương trình dưới dạng .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Từ tính chất h(n) = h(N - 1 - n)

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega(n-\frac{1}{2})\right]\right] e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

$$b(n) = 2h(\frac{N}{2}-n) \qquad 1 \le n \le \frac{N-1}{2}$$

Từ biểu thức :

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega}$$

$$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega(n-\frac{1}{2})\right]$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}.$$

Như vậy tại tần số $\omega = \pi$ thì $\cos\left[\omega(n-\frac{1}{2})\right] = \cos\left[\pi(n-\frac{1}{2})\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\right]$

(2n-1) lẻ với mọi n .

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

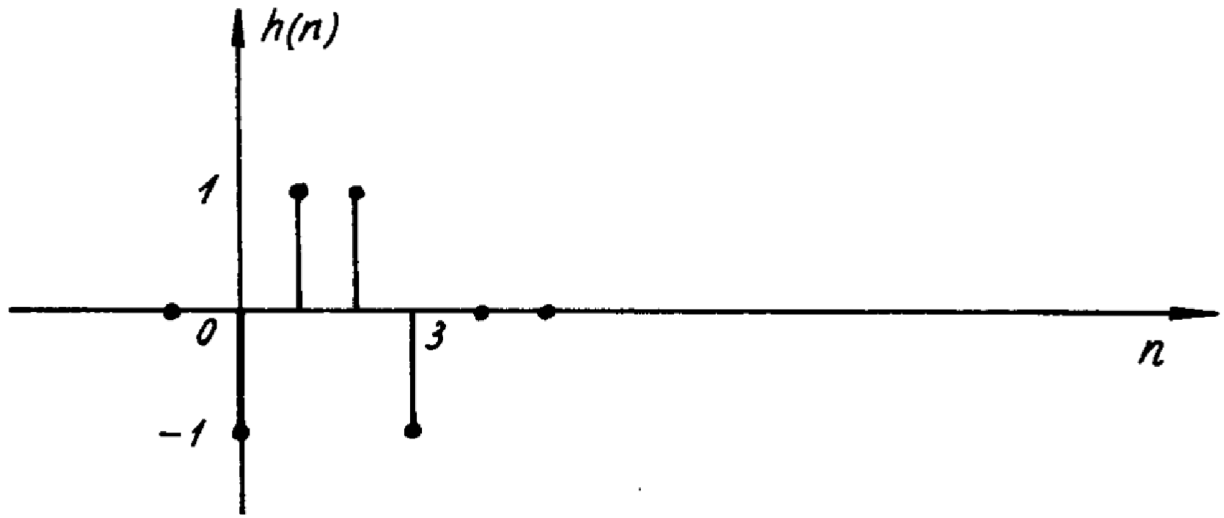
vậy :

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}(2n-1)\right] = 0 \quad \text{với mọi n}$$

$\Rightarrow A(e^{j\omega}) = 0$ với bất kỳ b(n) nào (hoặc là bất kỳ h(n) nào) do vậy các bộ lọc loại này không thể sử dụng để tổng hợp bộ lọc có đáp ứng tần số khác không tại $\omega = \pi$. Hình vẽ 1.3.7 minh hoạ cho đặc tính tần số của bộ lọc FIR loại hai với các giá trị của đáp ứng xung h(n) cụ thể .

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:** Cho đáp ứng xung của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính như trên hình



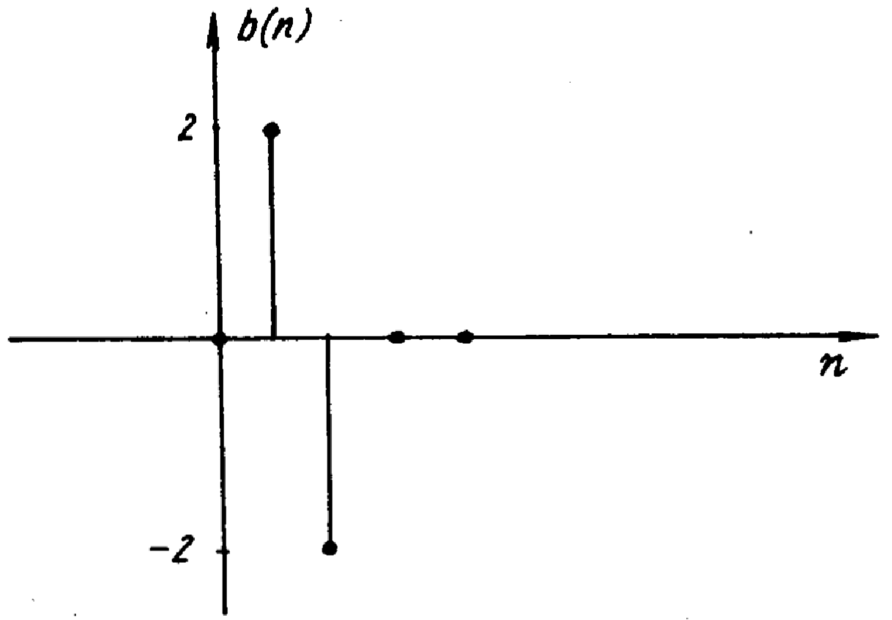
Hãy tìm $b(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $\left|H(e^{j\omega})\right|$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:**

$$N = 4,\ \frac{N}{2} = 2$$

$$b(1) = 2h(2-1) = 2h(1) = 2$$
$$b(2) = 2h(2-2) = 2h(0) = -2$$



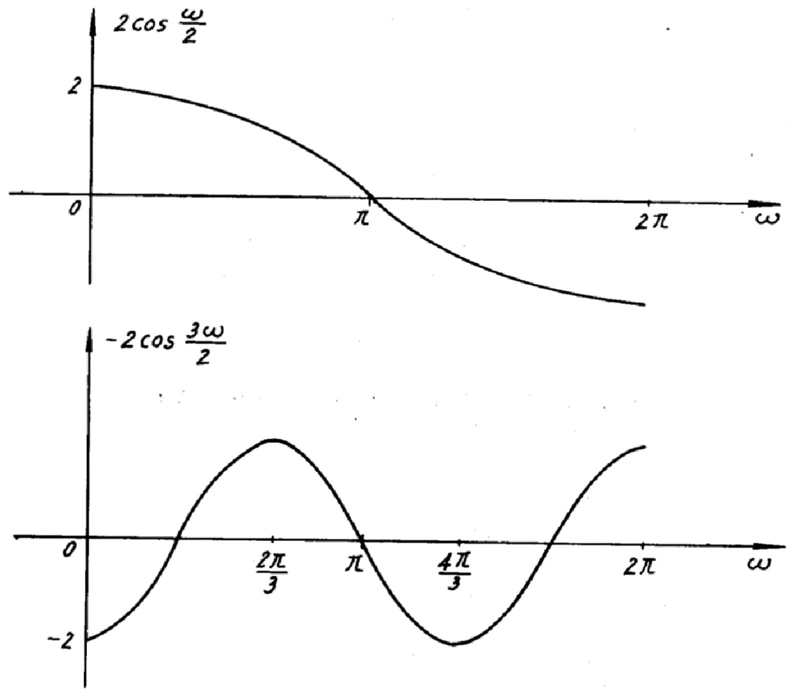
Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:**

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{2} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] = b(1)\cos\left[\omega\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] + b(2)\cos\left[\omega\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]$$

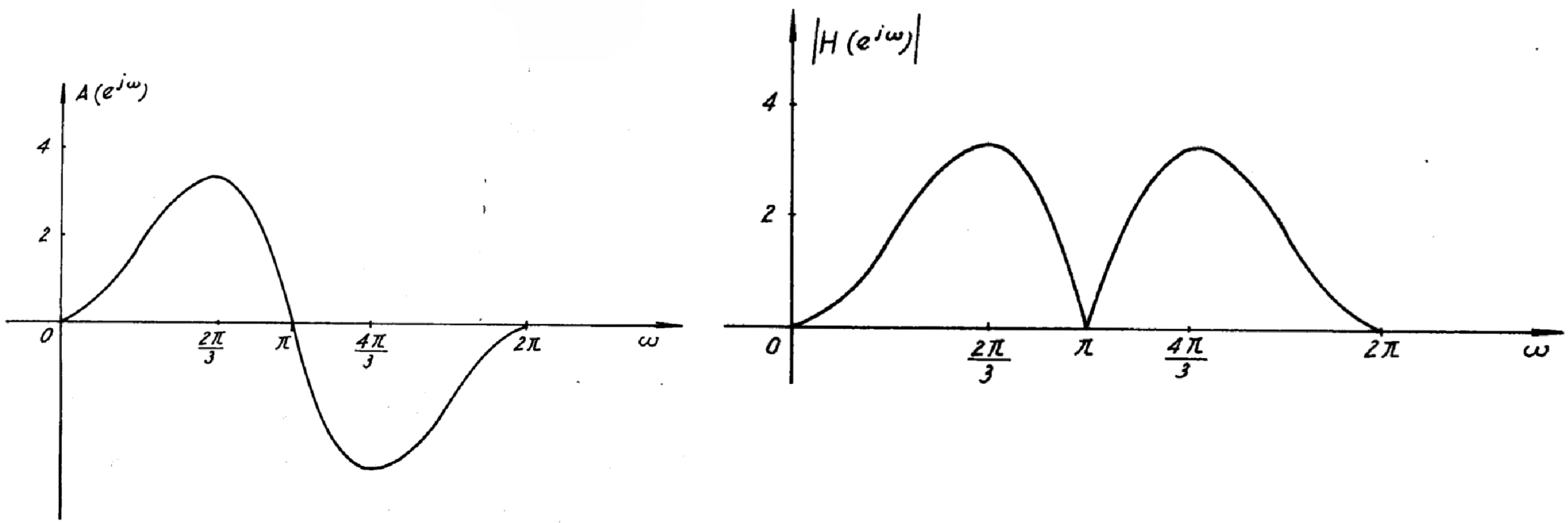
$$= 2\cos\frac{\omega}{2} - 2\cos 3\frac{\omega}{2}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$



Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **VD:**



Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Bô loc loai ba: N lẻ h(n) phản đối xứng.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

N lẻ nên biểu diễn $H(e^{j\omega})$ như sau .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h(\frac{N-1}{2})e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Trong trường hợp này $h(\frac{N-1}{2}) = 0$ vậy viết lại $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Đặt n = N -1-m. Viết lại phương trình dưới dạng .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin\omega n\right] e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

ở đây:

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) \qquad 1 \le n \le \frac{N-1}{2}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

So sánh với biểu thức:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right)e^{j(\beta-\alpha\,\omega)}$$

ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin\omega n$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

Nhận xét :

- Với $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ thì

$$\sin\omega n = \sin 0n = 0 \qquad \text{với mọi } n$$

$$\sin\omega n = \sin\pi n = 0 \qquad \text{với mọi } n$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:** Cho đáp ứng xung của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính như trên hình

  Hãy tìm $c(n)$, $A(e^{j\omega})$ $\left|H(e^{j\omega})\right|$

$$N = 5$$

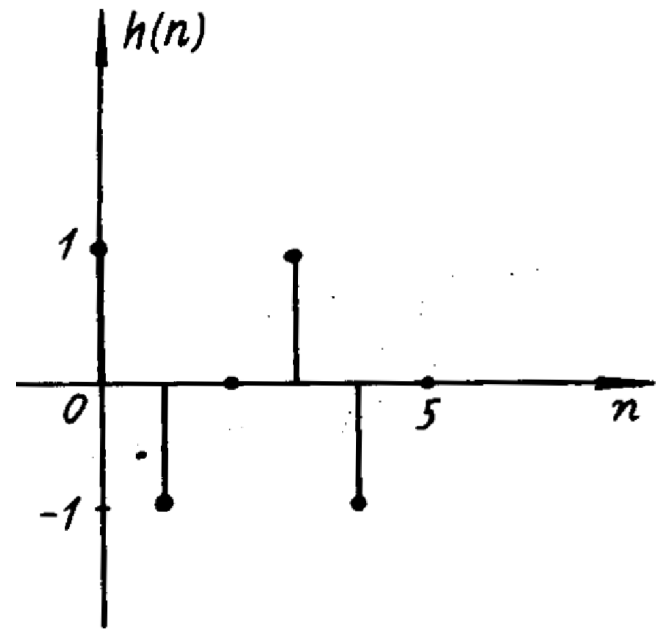
$$\frac{N-1}{2} = \alpha = 2$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$c(n) = 2h(2-n) \qquad 1 \le n \le 2$$

$$c(1) = 2h(2-1) = 2h(1) = -2$$

$$c(2) = 2h(2-2) = 2h(0) = 2$$

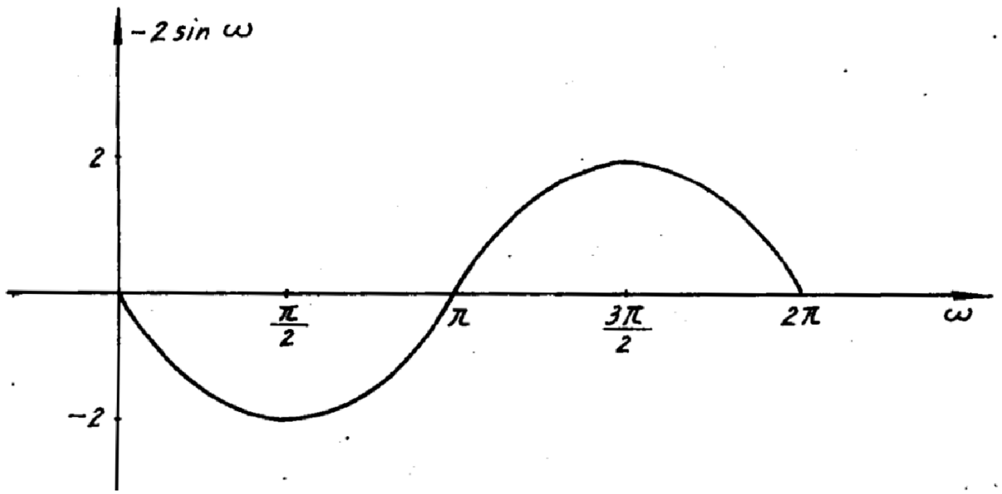


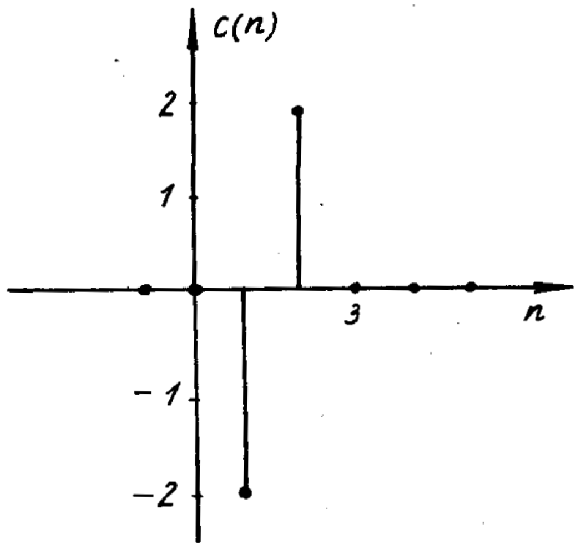
Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:**

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{2} c(n)\sin\omega n = c(1)\sin\omega + c(2)\sin 2\omega = -2\sin\omega + 2\sin 2\omega$$

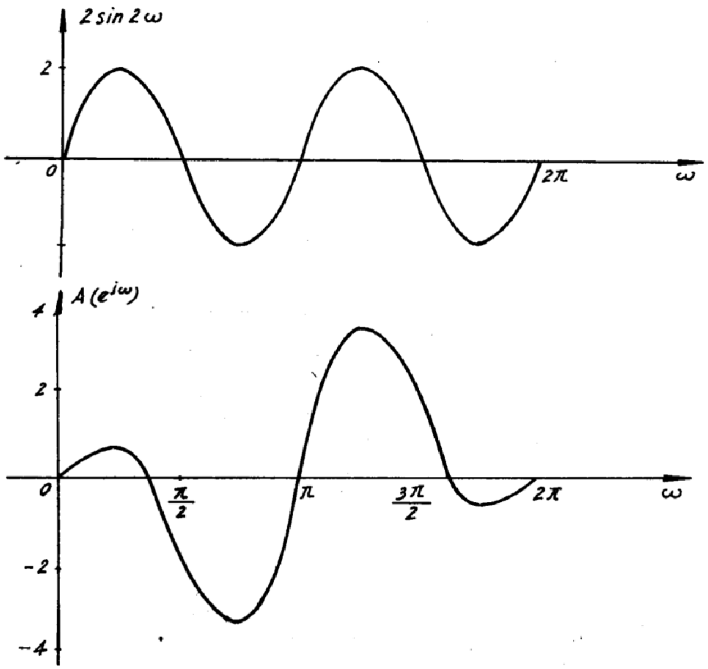
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$

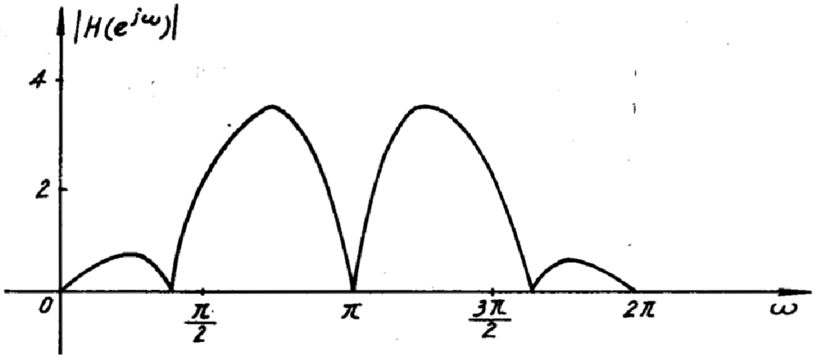




Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:**





Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

<u>Bộ loc loai bốn</u>. (N chẵn h(n) phản đối xứng).

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})\, e^{-j\alpha\omega}$$

Do N chẵn nên có thể biểu diễn $H(e^{j\omega})$ như sau .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đặt n = N -1-m. Viết lại phương trình dưới dạng .

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^{0} h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

Đổi chiều của tổng và đổi ký hiệu về n ở thành phần thứ hai ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

Áp dụng tính chất phản đối xứng của $h(n)$ là

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \left\{\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \qquad 1 \le n \le \frac{N}{2}$$

So sánh với biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

ta có:

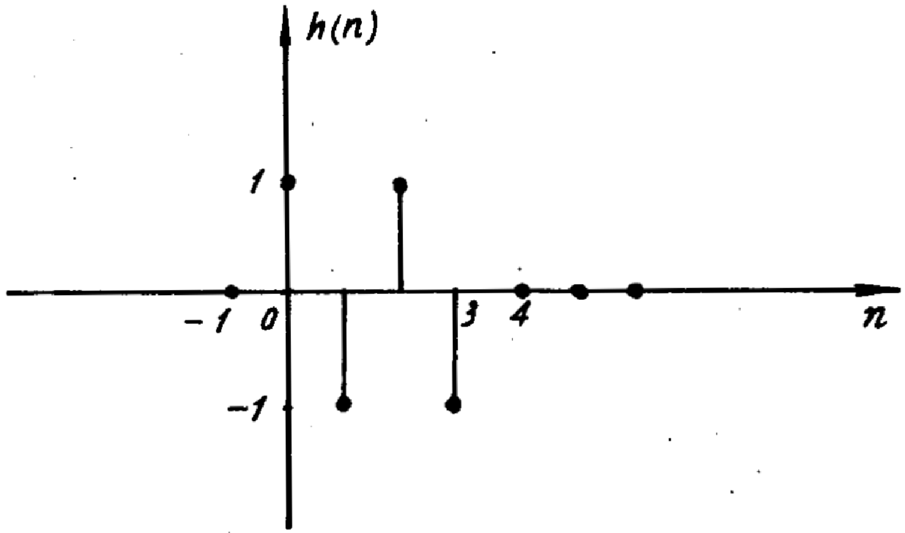
$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:** Cho đáp ứng xung của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính như trên hình



Hãy tìm $d(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $\left|H(e^{j\omega})\right|$

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

- **VD:**

$$N = 4$$

$$\frac{N-1}{2} = \alpha = 2{,}5$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$d(n) = 2h(2 - n) \qquad 1 \le n \le 2$$

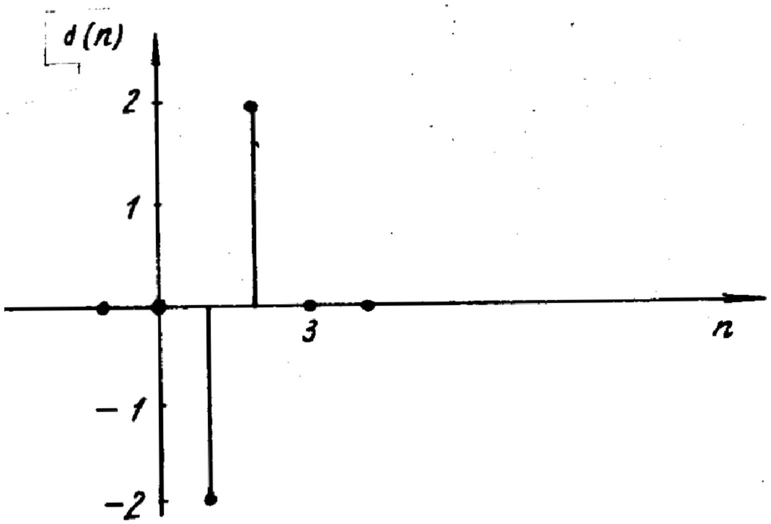
$$d(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = -2$$

$$d(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = 2$$

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

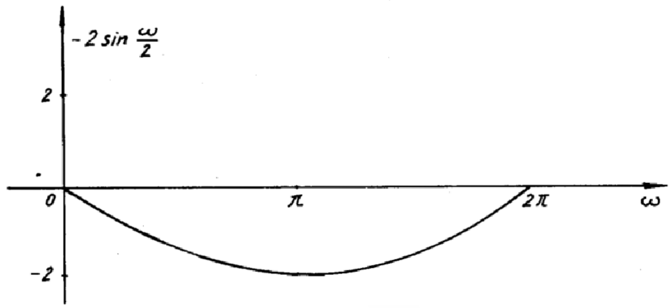
$$= d(1)\sin\frac{\omega}{2} + d(2)\sin\frac{3\omega}{2} = -2\sin\frac{\omega}{2} + 2\sin\frac{3\omega}{2}$$

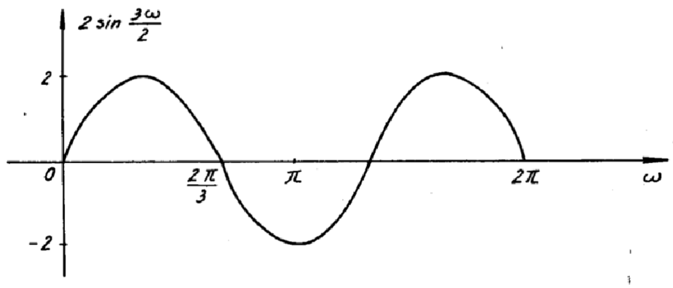
$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|A(e^{j\omega})\right|$$

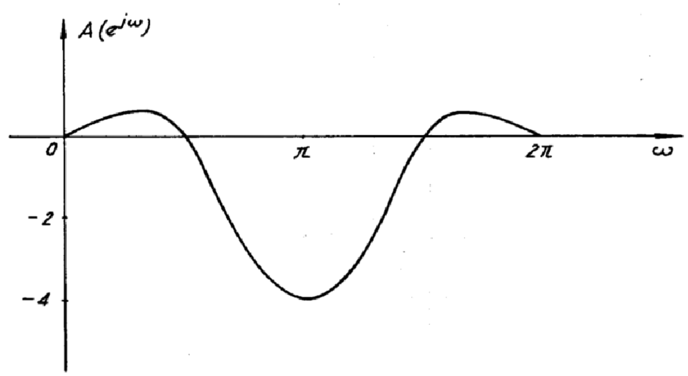


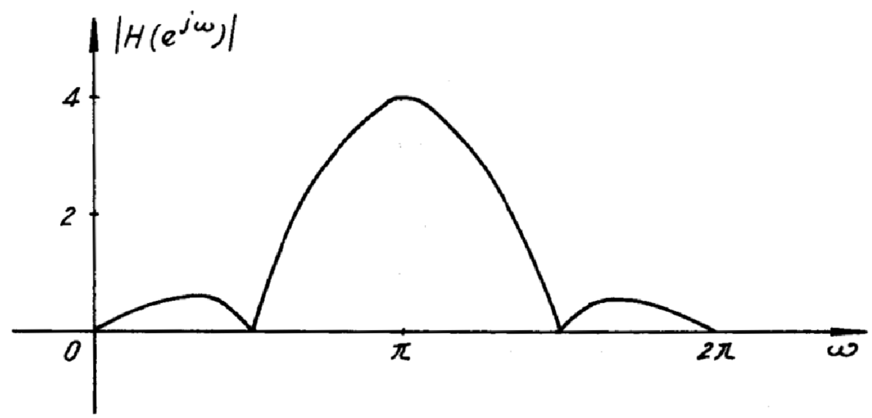
Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

➢ **VD:**









Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

SET, Hanoi University of Science and Technology

	$h(n)$ đối xứng $h(n) = h(N-1-n)$	$h(n)$ phản đối xứng $h(n) = -h(N-1-n)$
N lẻ	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos\omega n$ $a(o) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ $a(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) & 1 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ đối xứng trong khoảng tần số $0 \le \omega \le 2\pi$ $\lvert H(e^{j\omega})\rvert = \lvert A(e^{j\omega})\rvert$ là đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$ (Bộ lọc *FIR* loại 1)	$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin\omega n$ $c(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) & 1 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \le \omega \le 2\pi$ $\lvert H(e^{j\omega})\rvert = \lvert A(e^{j\omega})\rvert$ là đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ (Bộ lọc *FIR* loại 3)

Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính

N chẵn	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$ $b(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N}{2}-n\right) & 1 \le n \le \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \le \omega \le 2\pi$ $\lvert H(e^{j\omega})\rvert = \lvert A(e^{j\omega})\rvert$ là đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = \pi$ (Bộ lọc *FIR* loại 2)	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$ $d(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N}{2}-n\right) & 1 \le n \le \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ đối xứng trong khoảng tần số $0 \le \omega \le 2\pi$ $\lvert H(e^{j\omega})\rvert = \lvert A(e^{j\omega})\rvert$ là đối xứng trong khoảng $0 \le \omega \le 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = \pi$ (Bộ lọc *FIR* loại 4)

Chương 3 Tổng hợp các bộ lọc số đáp ứng xung hữu hạn

- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR

$$H(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)Z^{-n}=h(0)+h(1)Z^{-1}+h(2)Z^{-2}+\ldots+h(N-1-2)Z^{-(N-1-2)}+$$

$$+h(N-1-1)Z^{-(N-1-1)}+h(N-1)Z^{-(N-1)}$$

Nhưng nếu $h(n)$ đối xứng hoặc phản đối xứng, tức là

$$h(n)=h(N-1-n)$$

hoặc

$$h(n)=-h(N-1-n)$$

Trước hết chúng ta xét nếu $h(n)$ đối xứng thì ta có thể viết $H(Z)$ ở dạng sau đây :

$$H(Z)=h(0)+h(1)Z^{-1}+h(2)Z^{-2}+\ldots+h(2)Z^{-(N-3)}+h(1)Z^{-(N-2)}+h(0)Z^{-(N-1)}$$

Tiếp tục biến đổi chúng ta thu được kết quả sau:

$$H(Z^{-1})=Z^{N-1}H(Z)\qquad \text{với } h(n) \text{ đối xứng}$$

Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR

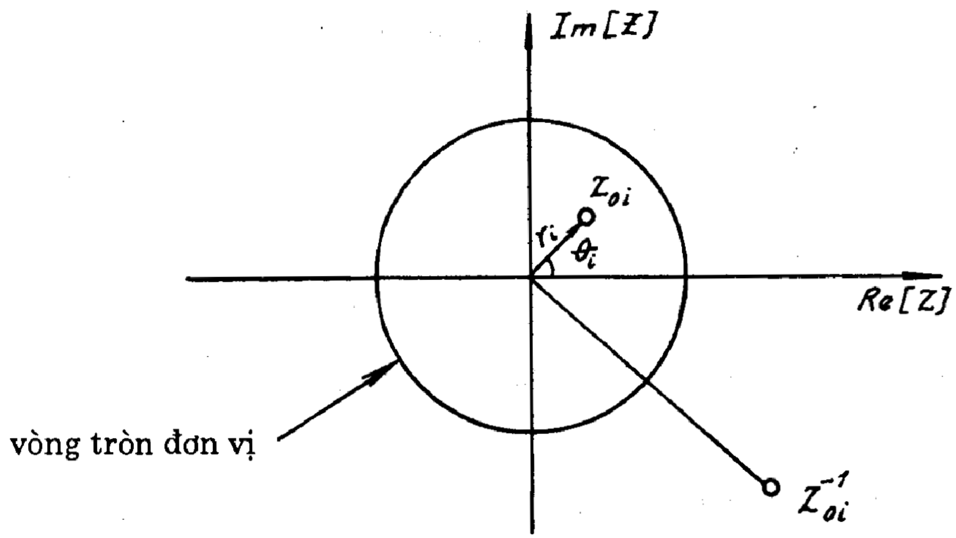
$H(Z^{-1}) = -Z^{N-1} H(Z)$ với $h(n)$ phản đối xứng

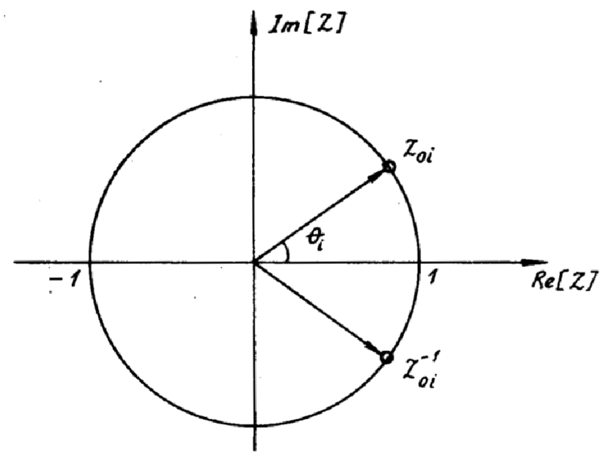
$H(Z^{-1}) = \pm Z^{N-1} H(Z)$

Bây giờ chúng ta xét từng trường hợp cụ thể của vị trí các điểm không. Có 4 trường hợp:

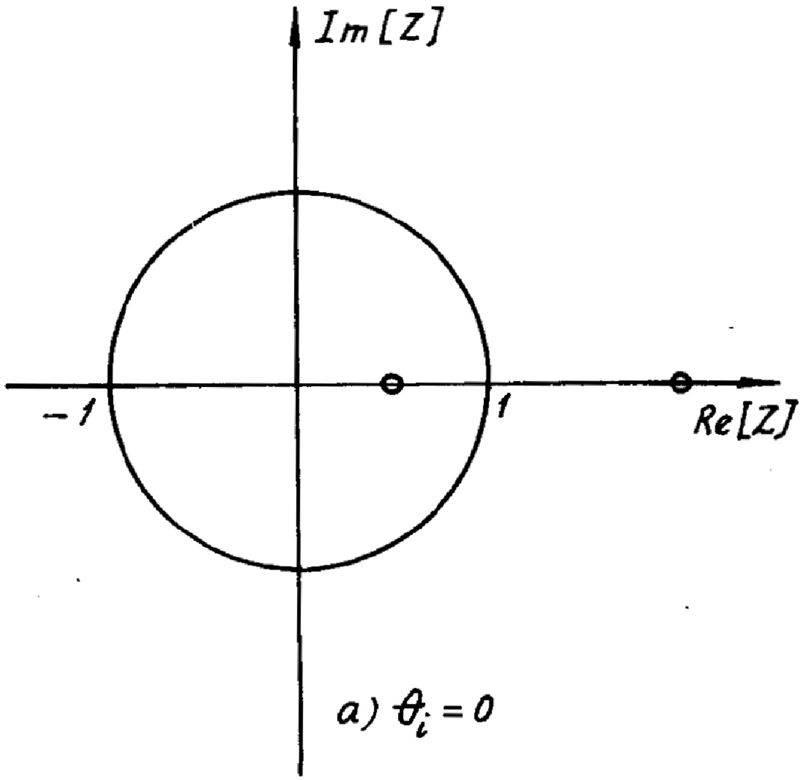
- Điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không thực không nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị.

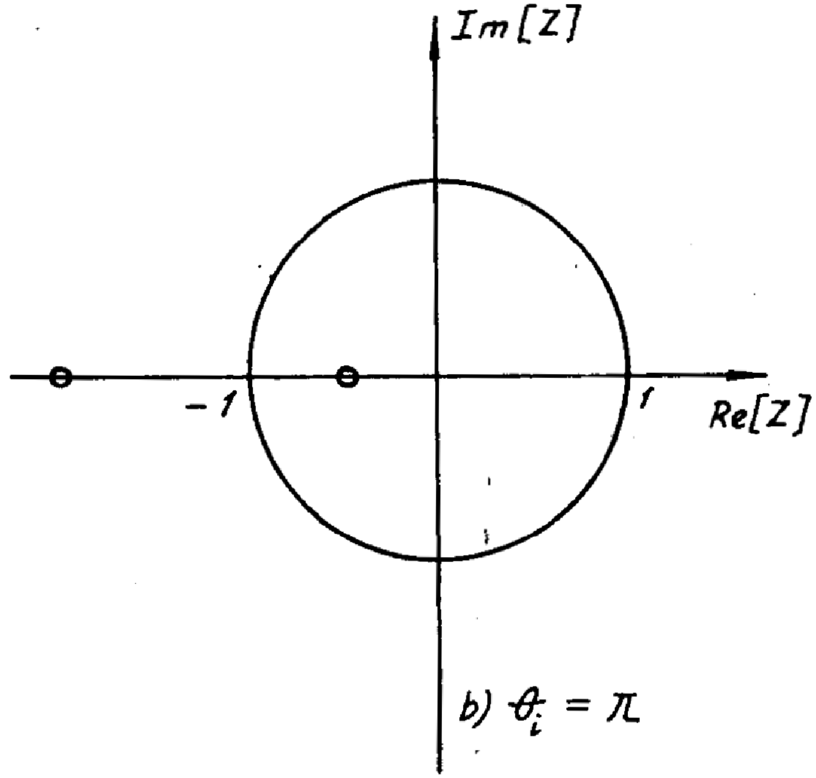
Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR



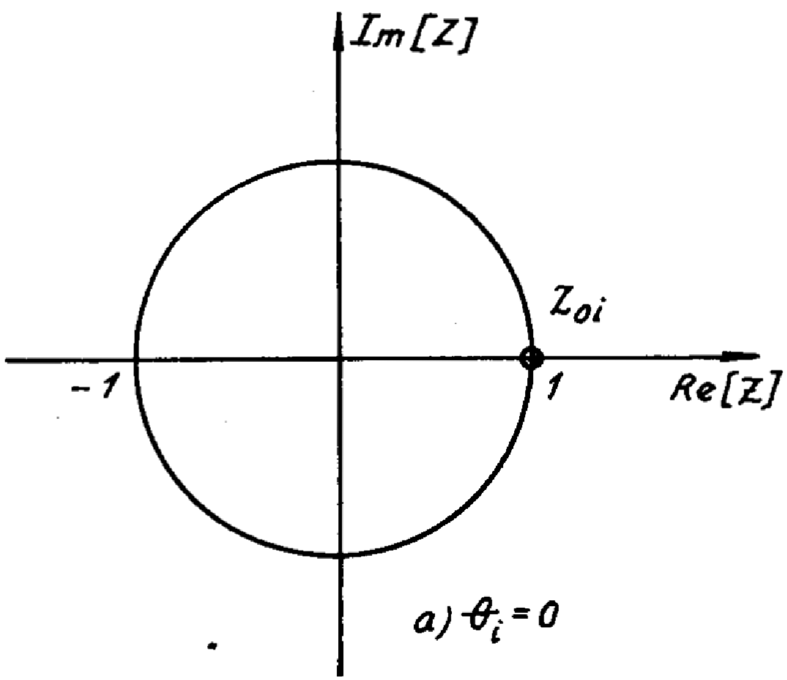


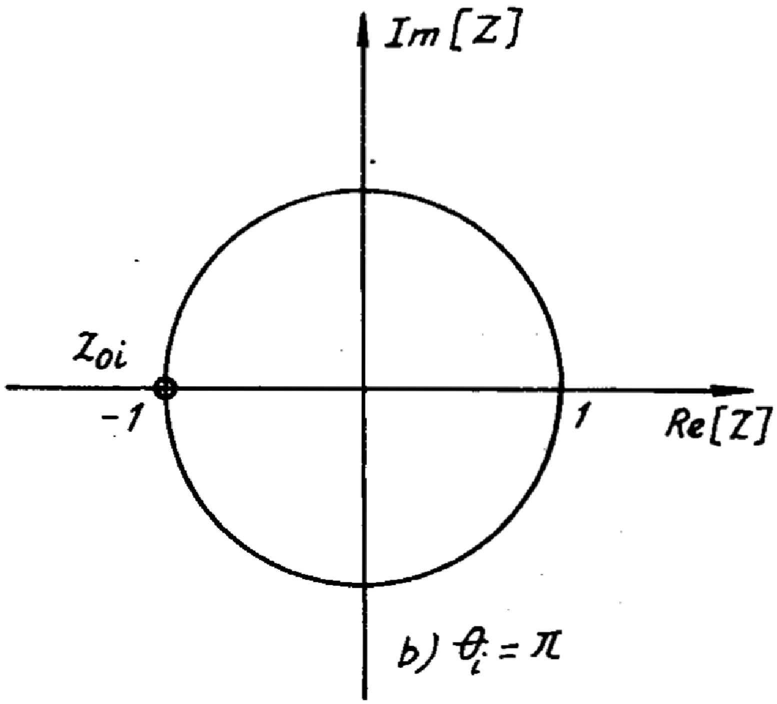
Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR





Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR





- Giới thiệu chung
- Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Đáp ứng tần số của bộ lọc FIR pha tuyến tính
- Vị trí điểm không của bộ lọc số FIR
- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
    - Phương pháp cửa sổ
    - Phương pháp lấy mẫu tần số
    - Phương pháp lặp

Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn

- Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn
  - Phương pháp cửa sổ
  - Phương pháp lấy mẫu tần số
  - Phương pháp lặp

➢ Phương pháp cửa sổ

Như đã xét ở phần đầu đặc tính tần số $H(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π trong lọc tương tự được đặc trưng trong miền tần số tương tự ω_a bằng đáp ứng tần số của nó $H_a(\omega_a)$ để thực hiện được bằng con đường số, đáp ứng tần số $H_a(\omega_a)$ này phải coi như tuần hoàn với (chu kỳ 2π).

$$H_a(\omega) \rightarrow H(e^{j\omega})$$

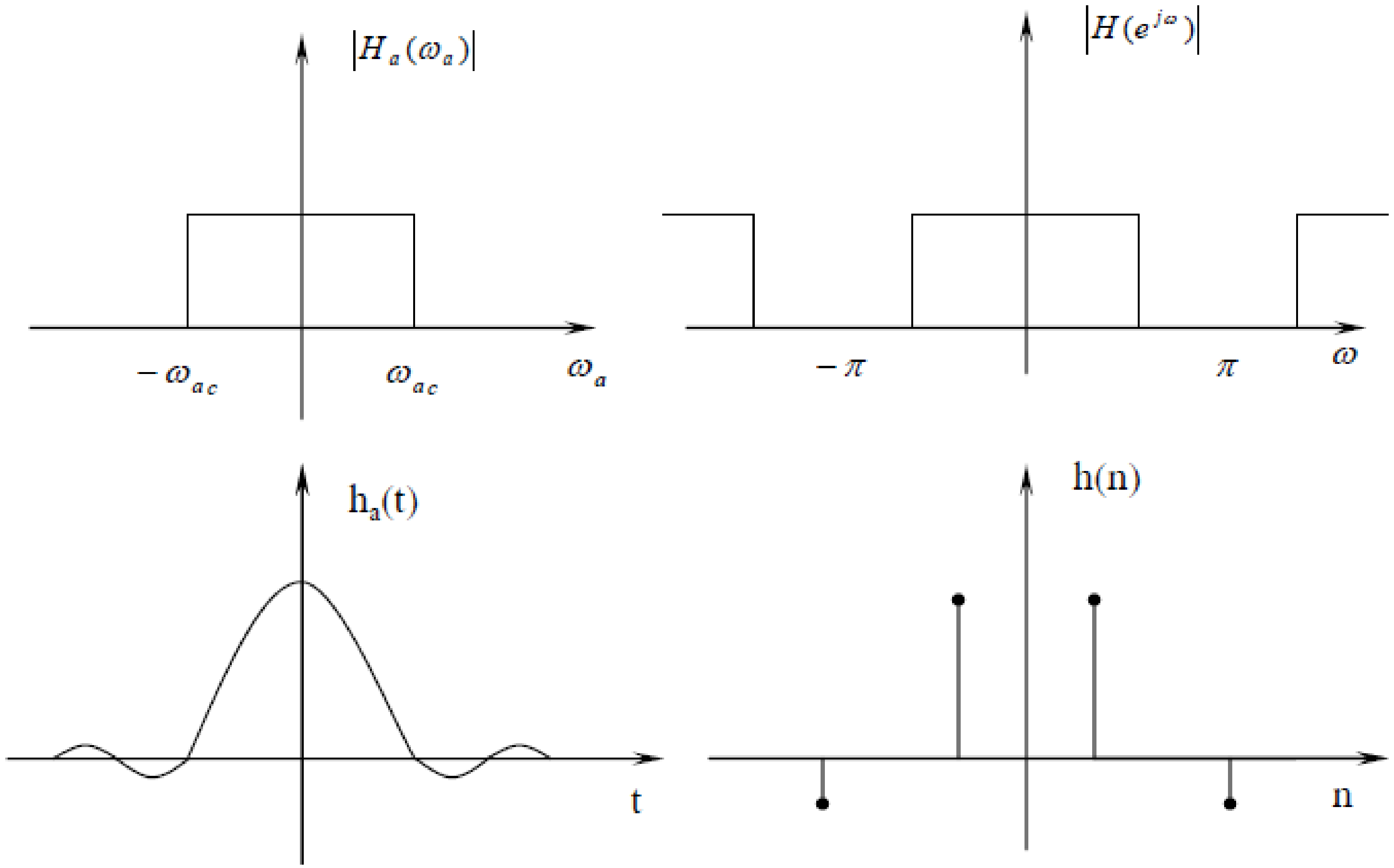
$$h_a(t) \rightarrow h(n)$$

$$H_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-j\omega_a t} \qquad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{n=-\infty}^{\infty} H_a(\omega_a)e^{j\omega_a t}\,d\omega \qquad h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{n=-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega$$

Các phương pháp thiết kế bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn

➢ Phương pháp cửa sổ



Phương pháp cửa sổ

- Các giá trị của $h(n)$ là các hệ số của khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π $H(e^{j\omega})$, vì vậy phương pháp cửa sổ còn gọi là phương pháp tổng hợp bộ lọc *FIR* nhờ khai triển Fourier.

- $h(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng, vì vậy $h(n)$ có chiều dài vô hạn nên không thể thực hiện được.

$$L[h(n)] = [-\infty , +\infty]$$

- $h(n)$ là không nhân quả, như vậy sẽ không thực hiện được về vật lý.

- Để cho đáp ứng xung $h(n)$ trở thành đáp ứng xung của bộ lọc *FIR*, chúng ta phải đưa $h(n)$ trở thành nhân quả và phải hạn chế chiều dài của nó.

- Để hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ chúng ta sử dụng các hàm cửa sổ (hoặc gọi là cửa sổ). Cửa sổ được ký hiệu như sau (trong miền n) :

$$w(n)_N \begin{cases} \neq 0 & 0 \le n \le N-1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

cửa sổ loại này là cửa sổ nhân quả.

Phương pháp cửa sổ

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

- Cho 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số: δ_1 , δ_2 , ω_p , ω_s.
- Chọn dạng cửa sổ và chiều dài N của cửa sổ, trong miền n của sổ có tâm đối xứng tại $n = \frac{N-1}{2}$, vậy trong miền tần số cửa sổ có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$.
- Chọn loại bộ lọc số lý tưởng có đáp ứng xung là $h(n)$, $h(n)$ có tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$ trong miền n, vậy trong miền ω $h(n)$ sẽ có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$.
- Nhân cửa sổ $w(n)_N$ với $h(n)$ lý tưởng để được $h_d(n)$ của bộ lọc thực tế.

$$h_d(n) = w(n)_N \,.\, h(n)$$

$$L[w(n)_N] = N$$

$$L[h(n)] = \infty$$

$$L[h_d(n)] = N$$

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

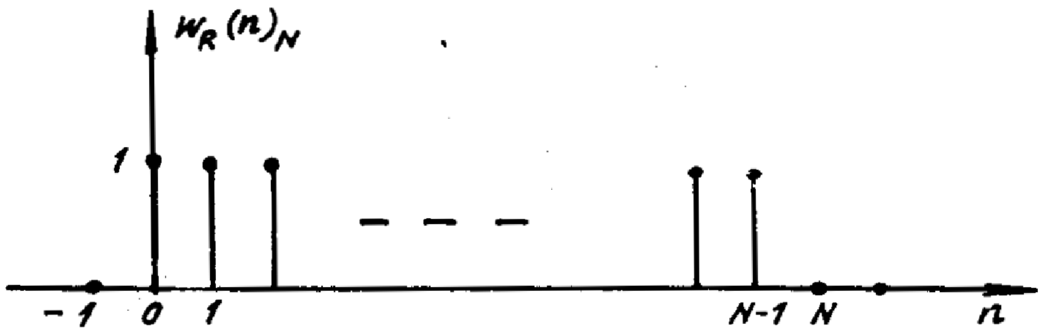
- Sau khi có $h_d(n)$ chúng ta thử lại trong miền tần số xem có thoả mãn 4 chỉ tiêu kỹ thuật đã đặt ra hay không. Nếu không thoả mãn chúng ta tăng N rồi lại lặp lại các bước trên cho đến khi nào thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật thì dừng lại. Việc thử lại trong miền tần số sẽ được thực hiện bằng tích chập trong miền tần số như sau:

$$H_d(e^{j\omega}) = W_R(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W_R(e^{j\omega'}).\,H\left(e^{j(\omega-\omega')}\right)d\omega'$$

Trong miền n cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

$$w_R(n)_N = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:



$$h_d(n) = h(n)\, w_R(n)_N$$

$$h_d(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

Nghiên cứu trong miền tần số:

$$W_R(e^{j\omega}) = FT[w_R(n)_N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_R(n)_N e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

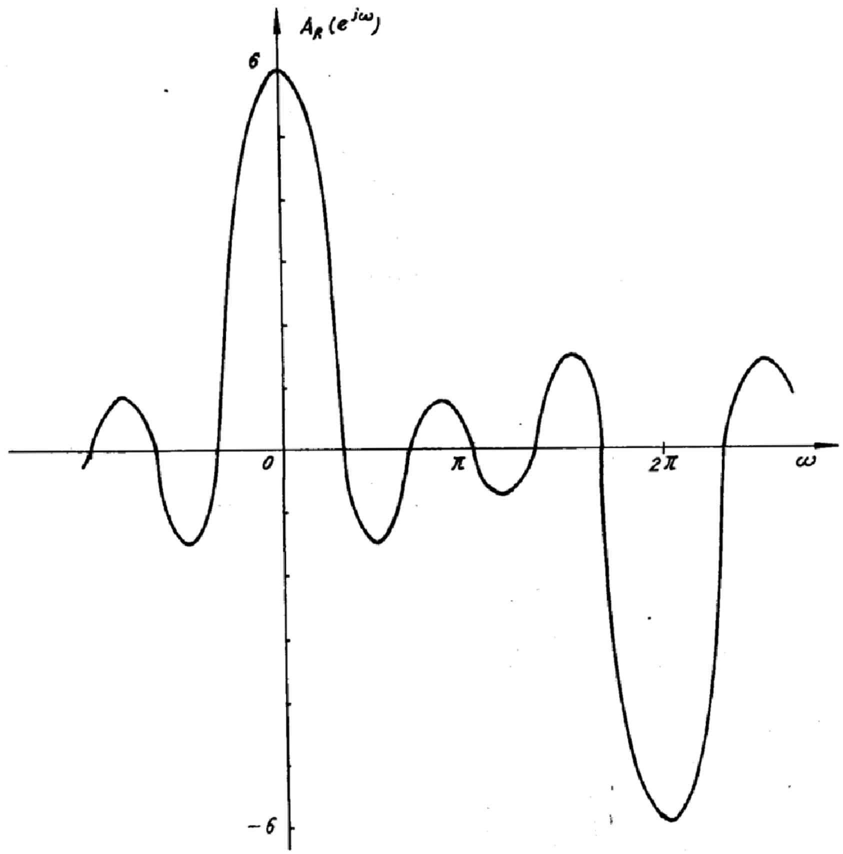
$$A_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = A_R(e^{j\omega})\, e^{j\theta(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega = -\alpha\omega$$

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

$$A_R(e^{j\omega}) = N\frac{\dfrac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\frac{\omega N}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}}$$



➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

Nhận xét :

- $W_R(e^{j\omega})$ gọi là cửa sổ phổ.

- Bề rộng của đỉnh trung tâm là $\frac{4\pi}{N}$, ký hiệu là $\Delta\Omega_R$, vậy đối với cửa sổ chữ nhật $\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N}$.

- Tỷ số giữa biên độ của đỉnh trung tâm và đỉnh thứ cấp đầu tiên được đo như sau:

$$\eta = \frac{\left|W_R(e^{j0})\right|}{\left|W_R\left(e^{j\frac{3\pi}{N}}\right)\right|} = \frac{\left|A_R\left(e^{j0}\right)\right|}{\left|A_R\left(e^{j\frac{3\pi}{N}}\right)\right|} = \frac{N}{\left|\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}\right)}\right|}$$

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

$N=6:$ $\eta=\left|\frac{6}{-\sqrt{2}}\right|\approx 4{,}285$

$N=9:$ $\eta=\left|\frac{9}{-2}\right|=4{,}5$

$N=50:$ $\eta\approx 4{,}705$

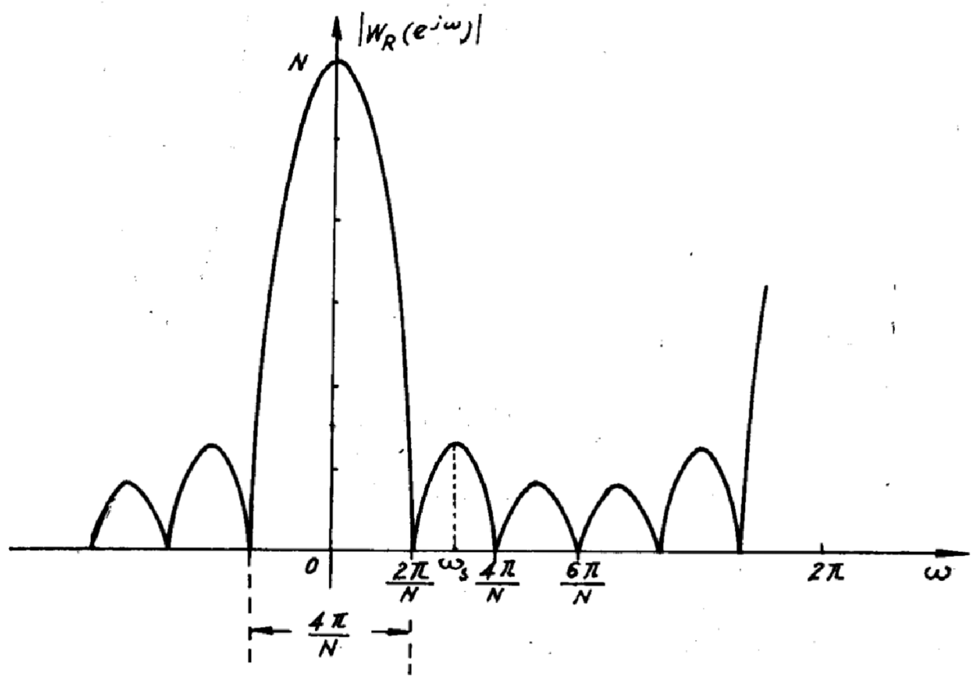
$N=100:$ $\eta\approx 4{,}711$

.

.

.

$N=\infty:$ $\eta=\frac{3\pi}{2}\approx 4{,}712$



Phương pháp cửa sổ

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

$N = 6:$ $\quad \eta = \left|\dfrac{6}{-\sqrt{2}}\right| \approx 4{,}285$

$N = 9:$ $\quad \eta = \left|\dfrac{9}{-2}\right| = 4{,}5$

$N = 50:$ $\quad \eta \approx 4{,}705$

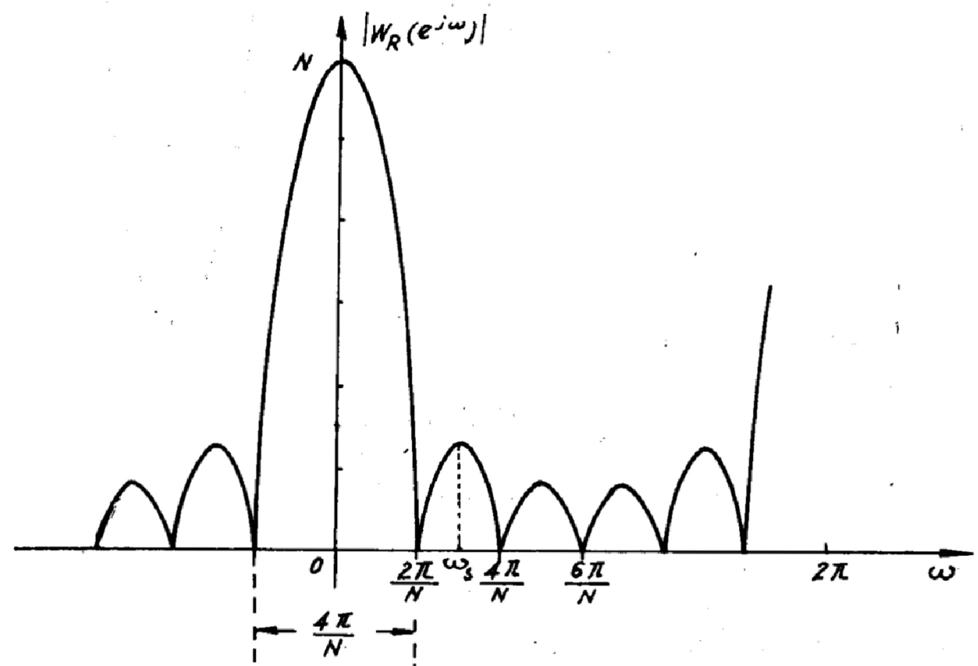
$N = 100:$ $\quad \eta \approx 4{,}711$

.

.

.

$N = \infty:$ $\quad \eta = \dfrac{3\pi}{2} \approx 4{,}712$



Vậy ta thấy rằng η thay đổi rất ít theo N, vì vậy thường lấy η là tham số đặc trưng cho cửa sổ.

Phương pháp cửa sổ

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

Trong thực tế để đặc trưng cho các cửa sổ ta dùng hai tham số như sau:

1- Bề rộng của đỉnh trung tâm $\Delta\,\Omega$.

2- Tỷ số của biên độ của đỉnh thứ cấp đầu tiên và biên độ của đỉnh trung tâm.

Trong thực tế tỷ số này thường được đánh giá theo *dB* bằng cách như sau:

$$\lambda = 20\log_{10}\eta^{-1} = 20\log_{10}\left|\frac{W(e^{j\omega_s})}{W(e^{j0})}\right|[dB]$$

ở đây ω_s là tần số ở giữa đỉnh thứ cấp đầu tiên của cửa sổ phổ $W(e^{j\omega})$.

➢ Các bước thiết kế bộ lọc số FIR loại 1:

Vậy đối với cửa sổ chữ nhật $W_R(e^{j\omega})$ thì $\omega_s = \frac{3\pi}{N}$ và ta tính λ_R trong trường hợp N >>:

$$\lambda_R = 20\log_{10}\eta_R^{-1} = 20\log_{10}\frac{1}{4{,}712} \approx -13dB$$

Như thế đối với cửa sổ chữ nhật, hai tham số đặc trưng cho cửa sổ có giá trị như sau:

$$\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N}$$

$$\lambda_R = -13dB$$

➢ VD1:

Hãy nghiên cứu các tham số của cửa sổ chữ nhật trong miền tần số ω (cửa sổ phổ) với chiều dài của cửa sổ $N = 9$.

$$W_R(e^{j\omega})_9 = A_R(e^{j\omega})_9 e^{j\theta(\omega)}$$

$$\left|W_R(e^{j\omega})_9\right| = \left|A_R(e^{j\omega})\right|_9$$

$$A_R(e^{j\omega})_9 = 9.\frac{\sin 9\frac{\omega}{2} \Big/ \frac{9\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2} \Big/ \frac{\omega}{2}}$$

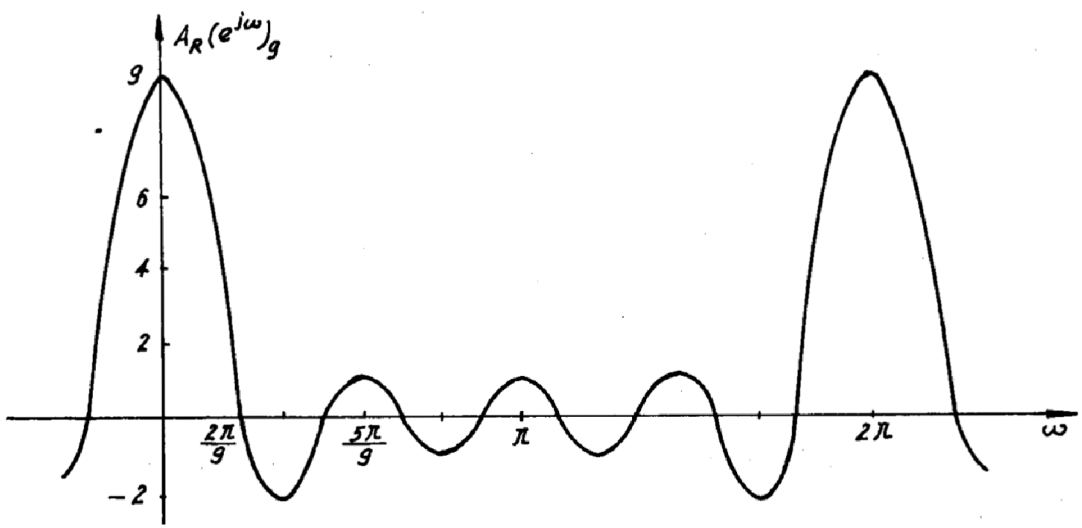
$$G_R(e^{j\omega})_9 = 20\log_{10}\left|\frac{W_R(e^{j\omega})_9}{W_R(e^{j0})_9}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{A_R(e^{j\omega})_9}{A_R(e^{j0})_9}\right| dB$$

➢ VD1:

$$\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N} = \frac{4\pi}{9}$$

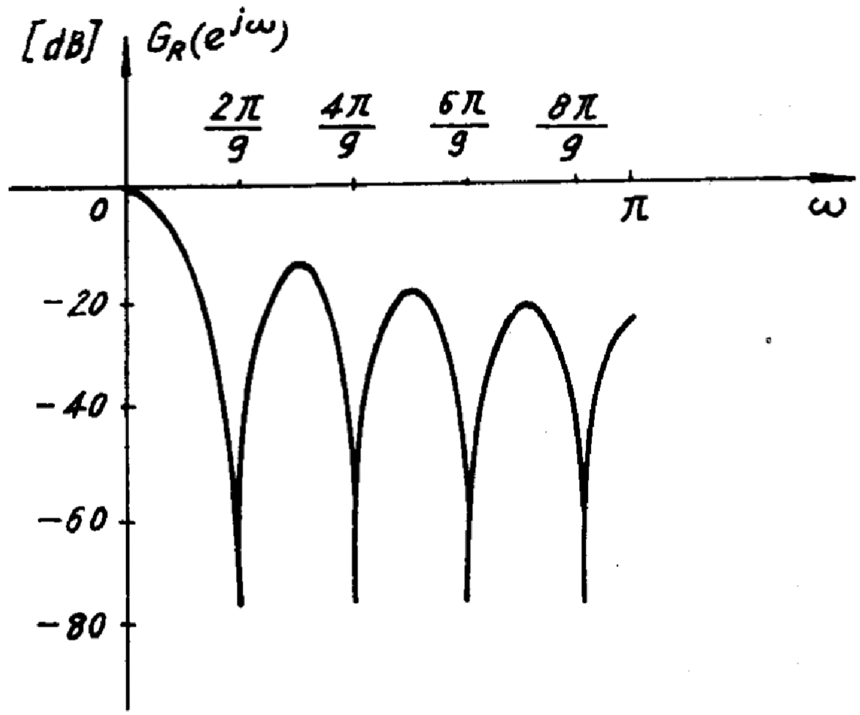
$$\eta_R \approx 4{,}712$$

Đồ thị của $A_R(e^{j\omega})_9$ và $G_R(e^{j\omega})_9$ cho trên hình



Phương pháp cửa sổ

- **VD1:**



➢ VD2:

Hãy tổng hợp bộ lọc thông thấp *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega\frac{N-1}{2}$ với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây : $\delta_1 = \delta_{10}$, $\delta_2 = \delta_{20}$, $\omega_p = \omega_{po}$, $\omega_s = \omega_{so}$.

Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Chúng ta tiến hành các bước như sau :

- Cho các chỉ tiêu kỹ thuật

$$\delta_1 = \delta_{10} \qquad \omega_p = \omega_{po}$$

$$\delta_2 = \delta_{20} \qquad \omega_s = \omega_{so}$$

Giả sử $\frac{\omega_{po} + \omega_{so}}{2} = \frac{\pi}{2} = \omega_c$

- Chọn cửa sổ chữ nhật $w_R(n)_N$ là cửa sổ nhân quả, tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$, chọn $N = 9$.

Phương pháp cửa sổ

➢ VD2:

- Chọn bộ lọc số lý tưởng thông thấp cũng có tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$ và tần số cắt là $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Vậy:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

$$\omega_c = \frac{\pi}{2}, \ N = 9$$

$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-4)}{\frac{\pi}{2}(n-4)}$$

➢ VD2:

- Nhân cửa sổ $w_R(n)_9$ với $h(n)$ lý tưởng

$$h_d(n) = w_R(n)_9 \,.\, h(n)$$

Chúng ta thu được kết quả như sau:

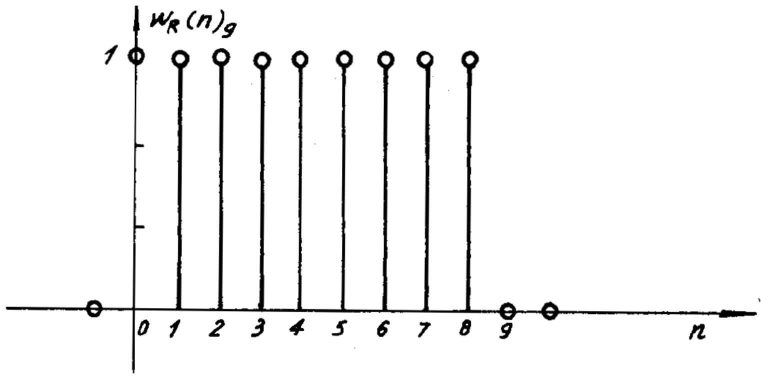
$$h_d(0) = 0 = h_d(8)$$

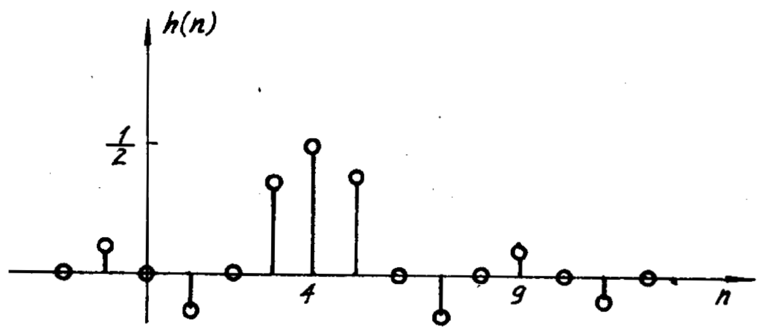
$$h_d(1) = -\frac{1}{3\pi} = h_d(7)$$

$$h_d(2) = 0 = h_d(6)$$

$$h_d(3) = \frac{1}{\pi} = h_d(5)$$

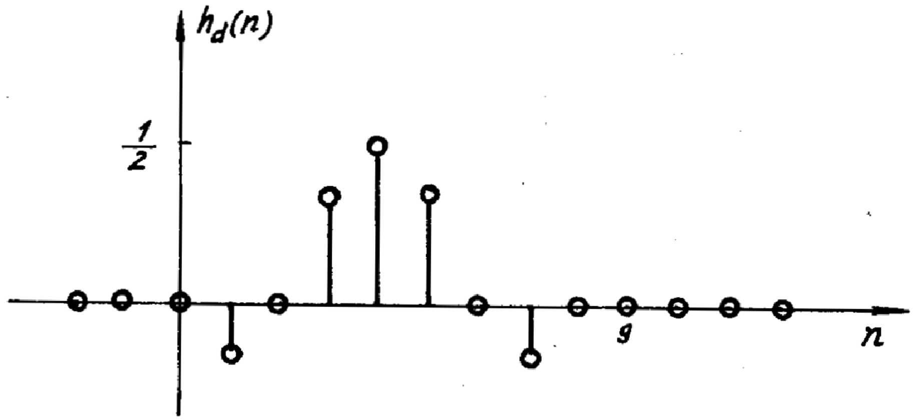
$$h_d(4) = \frac{1}{2}$$





Phương pháp cửa sổ

➢ **VD2:**



➢ VD2:

Sau đây chúng ta thử lại các hệ số $h_d(n)$ này trong miền tần số xem có thoả mãn 4 chỉ tiêu kỹ thuật hay không. Ta phải xét hiện tượng Gibbs như sau:

$$H_d(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega'})W_R\left(e^{j(\omega-\omega')}\right)d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega'\frac{N-1}{2}}\, e^{-j(\omega-\omega')\frac{N-1}{2}}\, \frac{\sin(\omega-\omega')\frac{N}{2}}{\sin\frac{(\omega-\omega')}{2}}\, d\omega' = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin(\omega-\omega')\frac{N}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega'}{2}}\,d\omega$$

$$= A_d(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

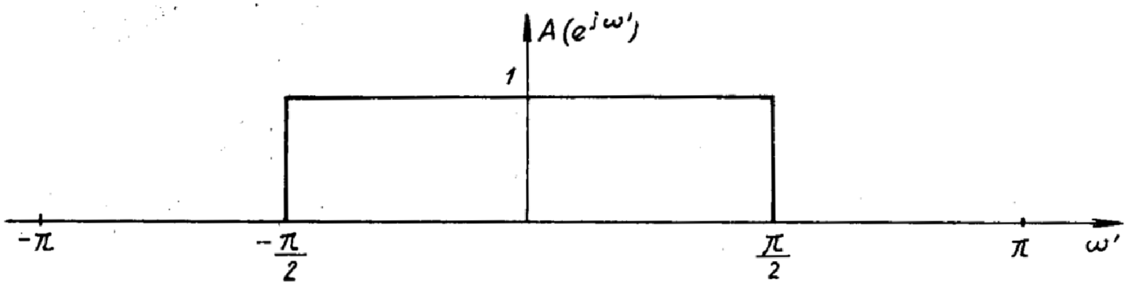
$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin(\omega-\omega')\frac{N}{2}}{\sin\frac{\omega-\omega'}{2}}\,d\omega$$

➢ VD2:

Thay $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}$ và $N = 9$ ta có:

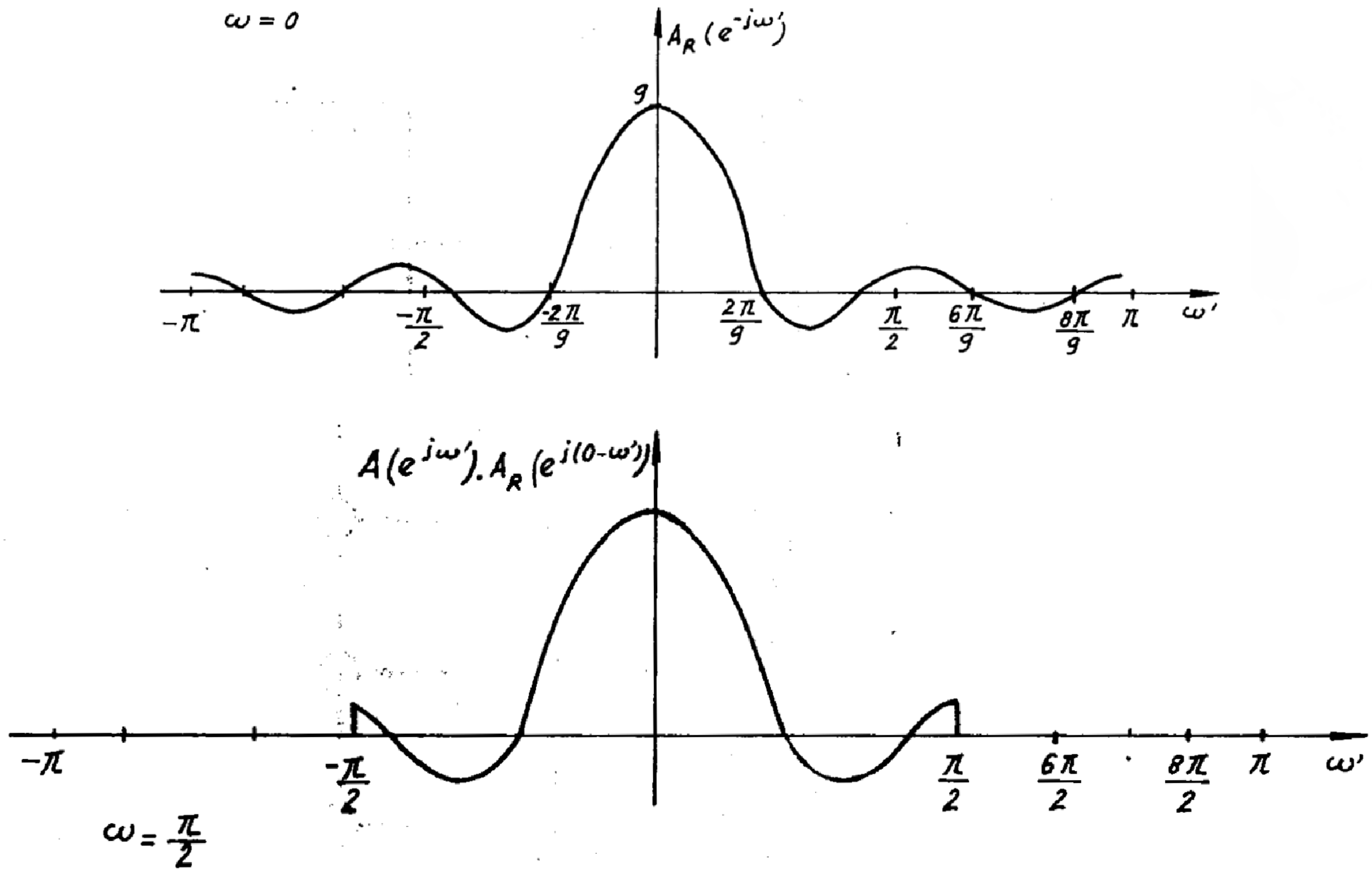
$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\omega - \omega')\dfrac{9}{2}}{\sin\dfrac{\omega - \omega'}{2}} d\omega$$

Hình 5.7.2.7 minh họa hiện tượng Gibbs trong trường hợp này.



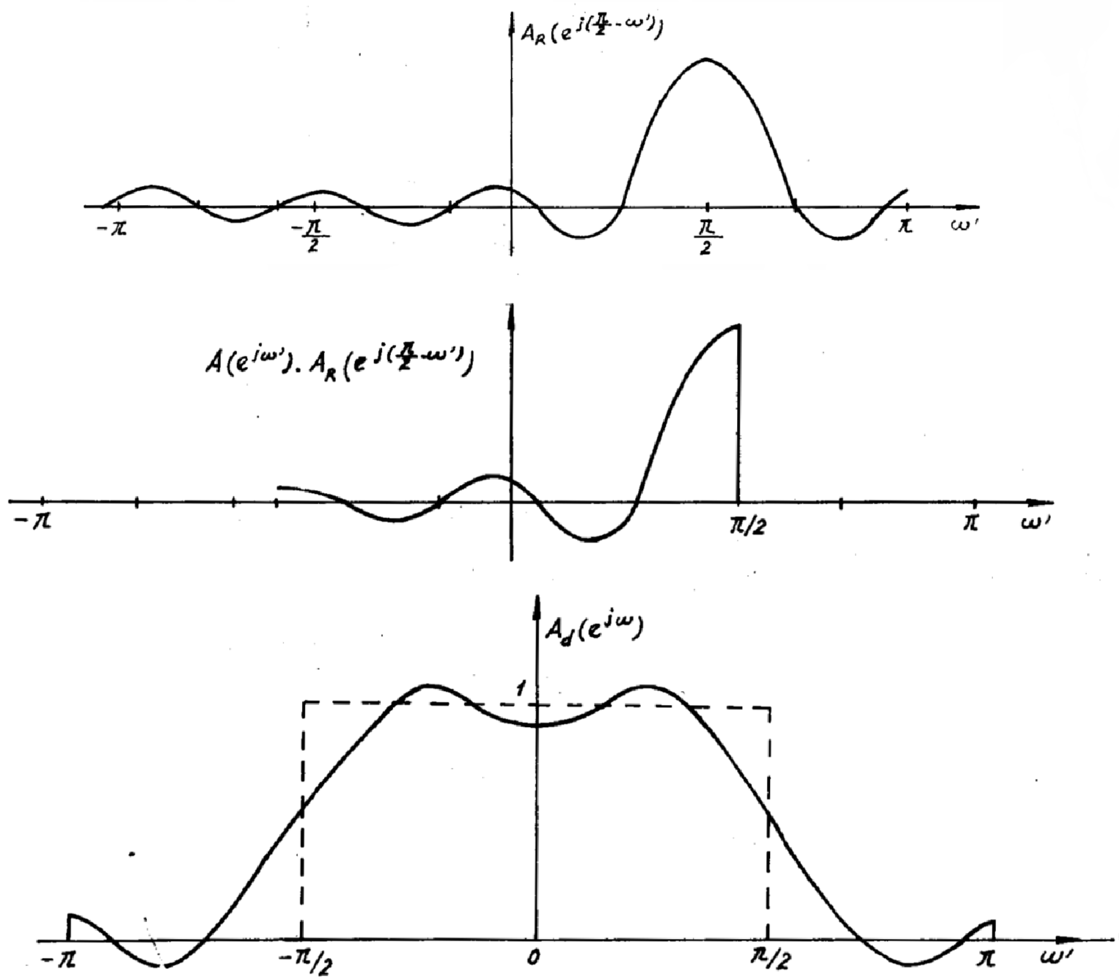
Phương pháp cửa sổ

➤ VD2:



Phương pháp cửa sổ

➢ **VD2:**



➢ VD2:

Sau khi thử lại trong miền tần số bằng cách xét hiện tượng Gibbs, nếu không thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật chúng ta phải tăng N lên, rồi lại tiếp tục thực hiện làm các bước, cho đến khi nào thoả mãn thì dừng lại.

Giả sử với $N = 9$ ta đã thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật rồi, chúng ta dừng ở đây. Hàm truyền đạt $H_d(Z)$ và phương trình sai phân để biểu diễn bộ lọc có dạng như sau:

$$H_d(Z) = \sum_{n=0}^{8} h_d(n) Z^{-n} = -\frac{1}{3\pi} Z^{-1} + \frac{1}{\pi} Z^{-3} + \frac{1}{2} Z^{-4} + \frac{1}{\pi} Z^{-5} - \frac{1}{3\pi} Z^{-7}$$

$$y(n) = -\frac{1}{3\pi} x(n-1) + \frac{1}{\pi} x(n-3) + \frac{1}{2} x(n-4) + \frac{1}{\pi} x(n-5) - \frac{1}{3\pi} x(n-7)$$

Phương pháp cửa sổ tam giác (Cửa sổ BARTLETT)

Với mục đích giảm biên độ của các đỉnh thứ cấp của cửa sổ chữ nhật $W_R(e^{j\omega})$, chúng ta chọn một cửa sổ khác có dạng tam giác cân, gọi là cửa sổ tam giác (hay cửa sổ Bartlett)

- Định nghĩa cửa sổ tam giác

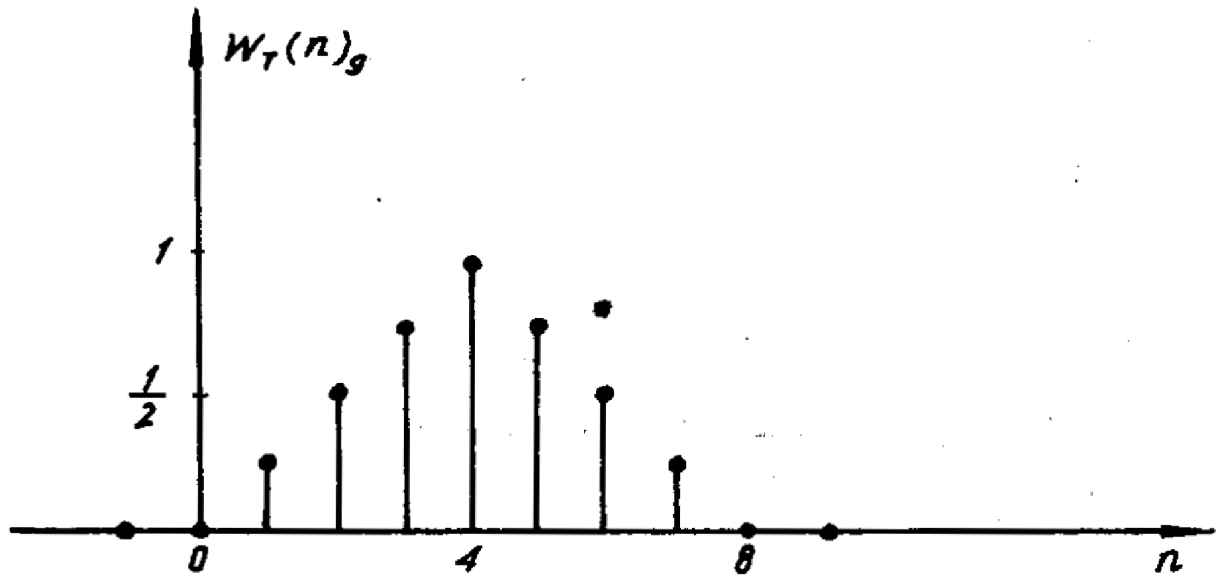
Trong miền n cửa sổ tam giác được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đồ thị của cửa sổ tam giác với $N = 9$ được cho trên hình

$$w_T(n)_9 = \begin{cases} \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 2 - \dfrac{n}{4} & 4 \le n \le 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Phương pháp cửa sổ tam giác
(Cửa sổ BARTLETT)



Vậy trong miền ω ta có:

$$W_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} \cdot e^{-j\omega} W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}}$$

Phương pháp cửa sổ tam giác
(Cửa sổ BARTLETT)

mà:

$$W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} = e^{-j\omega\frac{\frac{N-1}{2}-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega.\frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$W_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1}.e^{-j\omega\frac{\frac{N-1}{2}-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega.\frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega} e^{-j\omega\frac{\frac{N-1}{2}-1}{2}} \sin\frac{\left(\frac{\omega.\frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Phương pháp cửa sổ tam giác (Cửa sổ BARTLETT)

$$= \frac{2}{N-1} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}} \right]^2$$

$$W_T(e^{j\omega})_N = A_T(e^{j\omega})_N \, e^{j\theta(\omega)}$$

Phương pháp cửa sổ tam giác (Cửa sổ BARTLETT)

Vậy:

$$A_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]^2$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

Phương pháp cửa sổ tam giác (Cửa sổ BARTLETT)

➢ **VD:**

Hãy tổng hợp bộ lọc thông thấp *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega\dfrac{N-1}{2}$ dùng cửa sổ tam giác với $N = 9$, $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}$.

Giải :

Các bước tiến hành giống như tổng hợp bằng cửa sổ chữ nhật, trong miền n ta có:

$$h_d(n) = w_T(n)_9 \cdot h(n)$$

Phương pháp cửa sổ tam giác
(Cửa sổ BARTLETT)

➤ **VD:**

Chúng ta thu được kết quả như sau:

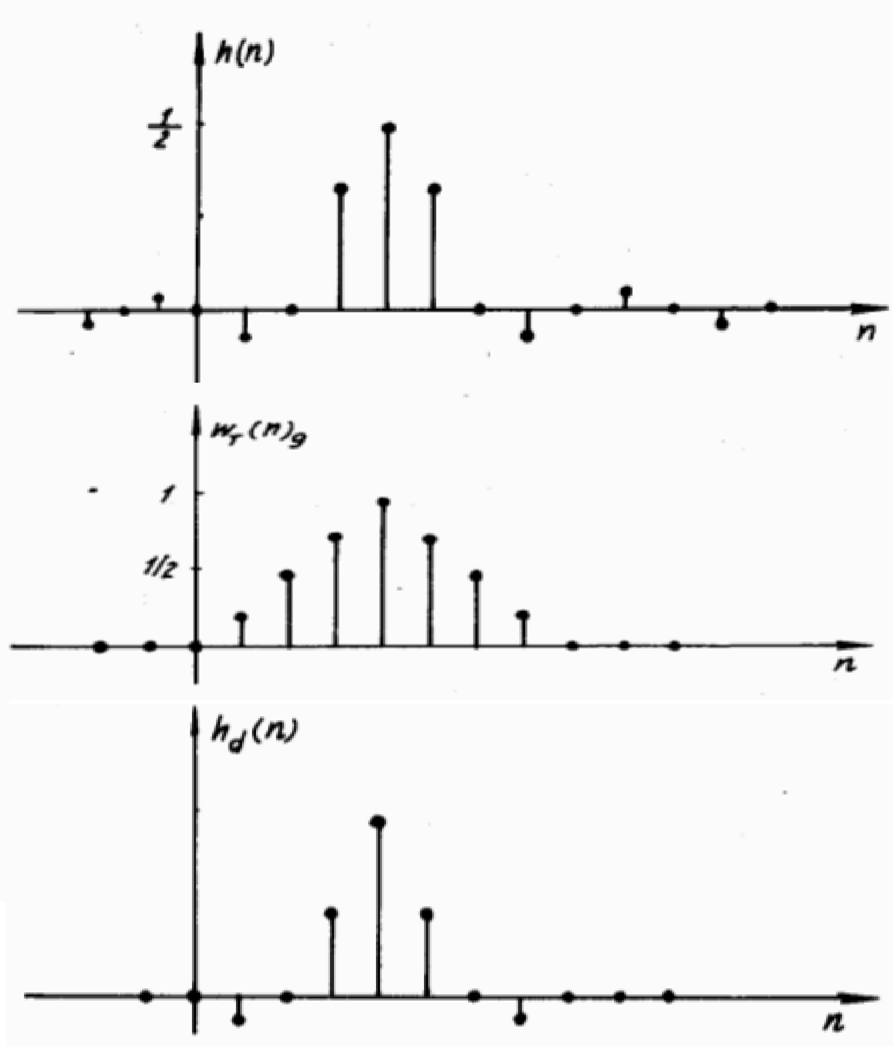
$$h_d(0) = h_d(8) = 0$$

$$h_d(1) = h_d(7) = -\frac{1}{12\pi}$$

$$h_d(2) = h_d(6) = 0$$

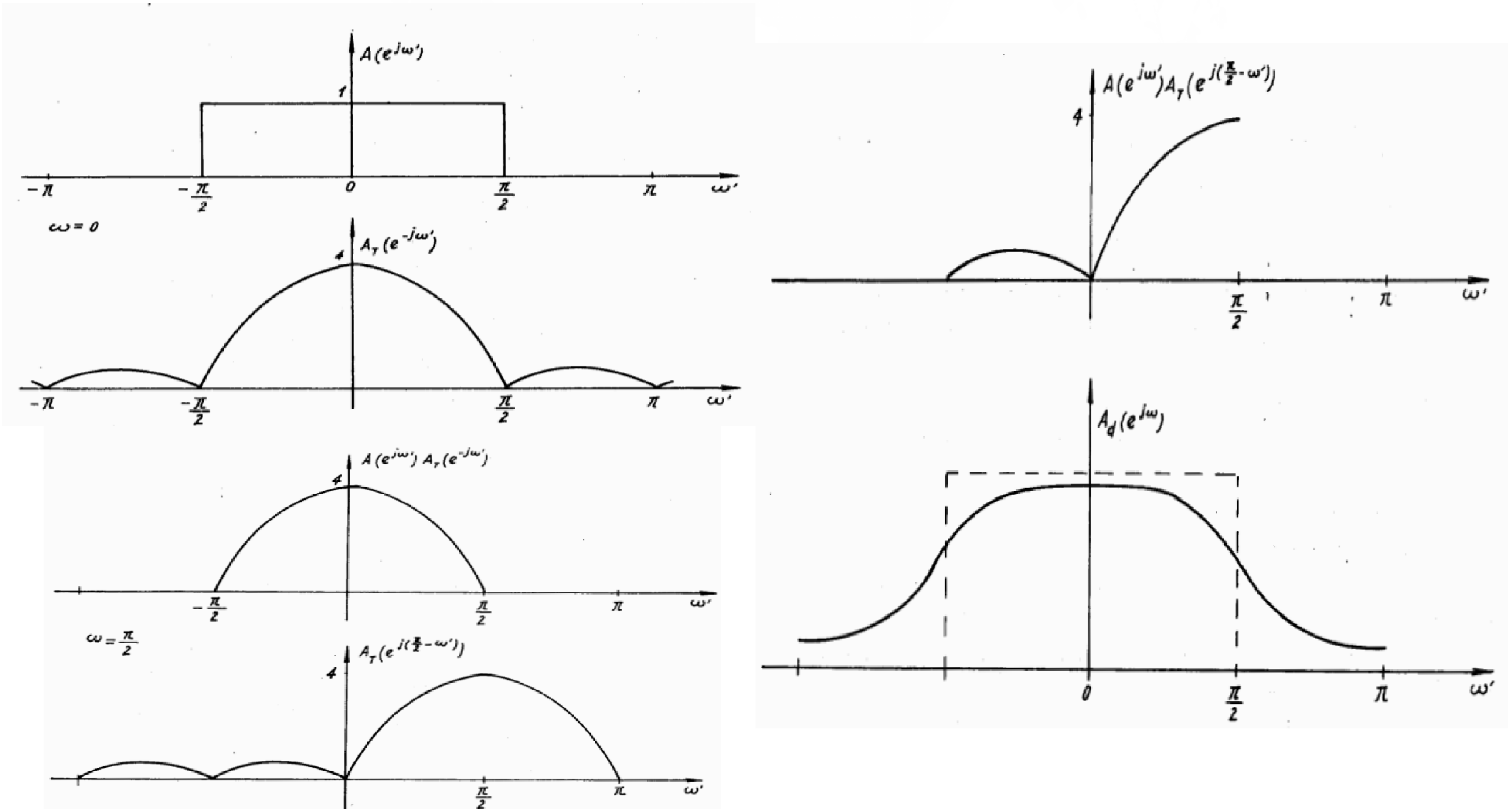
$$h_d(3) = h_d(5) = \frac{3}{4\pi}$$

$$h_d(4) = \frac{1}{2}$$



Phương pháp cửa sổ tam giác
(Cửa sổ BARTLETT)

- **VD:**



Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

- Định nghĩa cửa sổ Hanning và Hamming:

Trong miền n cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n)_N = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha)\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nếu $\alpha = 0{,}5$, ta có cửa sổ Hanning như sau:

$$w_{Han}(n)_N = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nếu $\alpha = 0{,}54$, ta có cửa sổ Hamming như sau:

$$w_{Ham}(n)_N = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

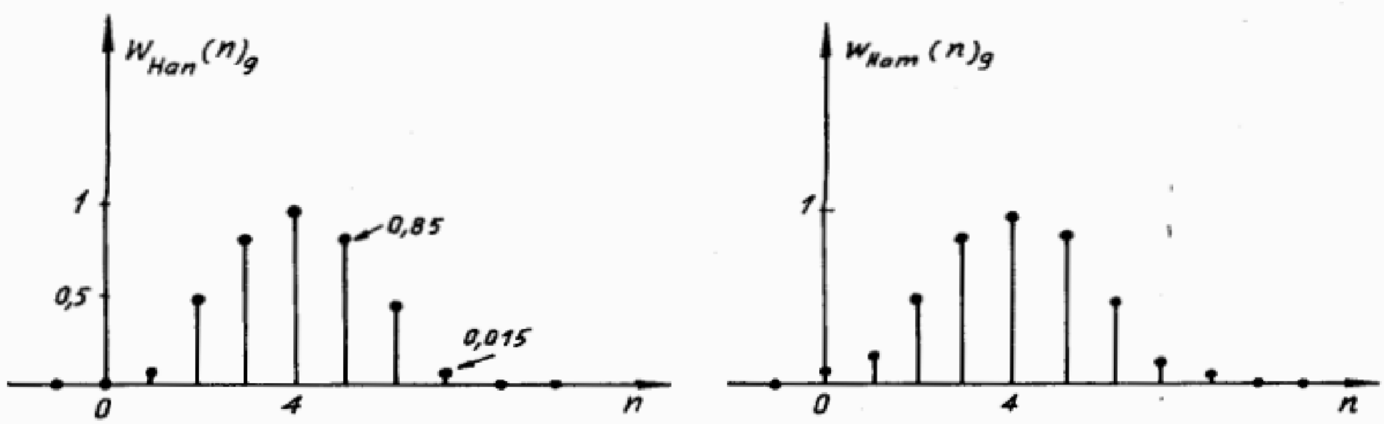
Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

- **VD:** Hãy tìm cửa sổ Hanning và Hamming với $N = 9$, sau đó vẽ đồ thị của cửa sổ:

Giải :

$$w_{Han}(n)_9 = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos\dfrac{\pi}{4}n & 0 \le n \le 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$w_{Ham}(n)_9 = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\dfrac{\pi}{4}n & 0 \le n \le 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$



Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

Nghiên cứu cửa sổ phổ trong miền ω ta thấy rằng:

Do chiều dài của $w_H(n)_N$ là N nên ta có thể viết:

$$w_H(n)_N = \left[\alpha - (1-\alpha)\cos\frac{2\pi}{N-1}n\right] w_R(n)_N$$

Vậy nếu α = 1 ta có:

$$w_H(n)_N = w_R(n)_N$$

Biến đổi tiếp ta có:

$$w_H(n)_N = \alpha w_R(n)_N - (1-\alpha) w_R(n)_N \cos\frac{2\pi}{N-1}n$$

$$= \alpha w_R(n)_N - \frac{1}{2}(1-\alpha) w_R(n)_N e^{j\frac{2\pi}{N-1}n} - \frac{1}{2}(1-\alpha) w_R(n)_N e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế:

$$FT[w_H(n)_N] = \alpha FT[w_R(n)_N] - \frac{1}{2}(1-\alpha) FT\left[w_R(n)_N e^{j\frac{2\pi}{N-1}n}\right] - \frac{1}{2}(1-\alpha) FT\left[w_R(n) e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}\right]$$

$$FT[w_H(n)_N] = W_H(e^{j\omega})_N$$

Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

Ta có:

$$W_H(e^{j\omega})_N = \alpha W_R(e^{j\omega})_N - \frac{1}{2}(1-\alpha)W_R\left[e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]_N - \frac{1}{2}(1-\alpha)W_R\left[e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]_N$$

Ta biết rằng:

$$W_R(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Vậy:

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\alpha\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} - e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}}\cdot\frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]} - \frac{1-\alpha}{2}e^{-j\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]}$$

Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

mà:

$$e^{-j\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{j\pi} = -e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$e^{-j\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{-j\pi} = -e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left[\frac{\alpha\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}-\frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}-\frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N-1}\right)}\right]$$

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_H(e^{j\omega})_N$$

$$A_H(e^{j\omega})_N = \alpha\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2}-\frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2}+\frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{N-1}\right)}$$

Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

với a =0,5 thì cửa sổ Hanning biểu diễn trong miền tần số sẽ là .

$$W_{Han}(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_{Han}(e^{j\omega})_N.$$

$$A_{Han}(e^{j\omega})_N = 0,5\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + 0,25\frac{\sin(\omega\frac{N}{2}-\frac{N\pi}{N-1})}{\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N-1})} + 0,25\frac{\sin(\omega\frac{N}{2}+\frac{N\pi}{N-1})}{\sin(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{N-1})}$$

Hai tham số đặc trưng cho cửa sổ Hanning trong miền tần số đó là.

$$\Delta\Omega_{Han} = \frac{8\pi}{N}$$

$$\lambda_{Han} = -32\text{dB}$$

Phương pháp cửa sổ Hanning và Hamming

với a =0,54 thì cửa sổ Hamming biểu diễn trong miền tần số sẽ là

$$W_{Ham}(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_{Ham}(e^{j\omega})_N.$$

$$A_{Ham}(e^{j\omega})_N = 0{,}54\,\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + 0{,}23\,\frac{\sin(\omega\frac{N}{2} - \frac{N\pi}{N-1})}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1})} + 0{,}23\,\frac{\sin(\omega\frac{N}{2} + \frac{N\pi}{N-1})}{\sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1})}$$

Hai tham số đặc trưng cho cửa sổ Hamming trong miền tần số đó là.

$$\Delta\Omega_{Ham} = \frac{8\pi}{N}$$

$$\lambda_{Ham} = -43\text{dB}$$

Phương pháp cửa sổ Blackman

Định nghĩa cửa sổ Blackman

Trong miền n cửa sổ Blackman được định nghĩa như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^m . a_m . \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} n.m\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Với điều kiện buộc:

$$\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}} a_m = 1$$

Đây chính là cửa sổ Blackman tổng quát hoá .
cửa sổ Blackman cụ thể được định nghĩa như sau

$$W_B(n)_N = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5\cos\frac{2\pi}{N-1} n + 0{,}08\cos\frac{4\pi}{N-1} n & 0 \le n \le \text{N-1} \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

Phương pháp cửa sổ Blackman

Nghiên cứu cửa sổ Blackman trong miền tần số ω $W_B(n)_N$ dạng

$$W_B(n)_N = [\,0{,}42 - 0{,}5\cos\frac{2\pi}{N-1}n + 0{,}08\cos\frac{4\pi}{N-1}n\,]\, W_R(n)_N$$

$$= 0{,}42W_R(n)_N - 0{,}5W_R(n)_N\cos\frac{2\pi}{N-1}n + 0{,}08\cos\frac{4\pi}{N-1}n$$

$$= 0{,}42W_R(n)_N - 0{,}25\, W_R(n)_N\, e^{j\frac{2\pi}{N-1}n} - 0{,}25\, W_R(n)_N\, e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n} + 0{,}04\, W_R(n)_N\, e^{j\frac{4\pi}{N-1}n}$$

$$+ 0{,}04\, W_R(n)_N\, e^{-j\frac{4\pi}{N-1}n}$$

Vậy trong miền tần số ω có .

$$W_B(e^{j\omega})_N = 0{,}42W_R(e^{j\omega}) - 0{,}25W_R\left(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N-1})}\right)_N - 0{,}25W_R\left(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N-1})}\right)_N$$

$$+ 0{,}04W_R\left(e^{j(\omega-\frac{4\pi}{N-1})}\right)_N + 0{,}04W_R\left(e^{j(\omega+\frac{4\pi}{N-1})}\right)_N$$

Phương pháp cửa sổ Blackman

Hay có thể viết :

$$W_B(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_B(e^{j\omega})$$

$$A_B(e^{j\omega}) = 0{,}42\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + 0{,}25\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]} + 0{,}25\frac{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]}$$

$$+\ 0{,}04\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{4\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega-\frac{4\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]} + 0{,}04\frac{\sin\left[\left(\omega+\frac{4\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega+\frac{4\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]}$$

Từ đây tính được hai tham số đặc trưng cho cửa sổ Blackman trong miền tần số ω như sau .

$$\Delta\Omega_B = \frac{12\pi}{N} \qquad \lambda_B = -\,57\ \text{dB}$$

Phương pháp cửa sổ Kaiser

Định nghĩa cửa sổ Kaiser

Trong miền n dạng tổng quát của cửa sổ Kaiser được định nghĩa như sau:

$$w_k(n)_N = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\beta.\dfrac{N-1}{2}.\sqrt{1-\left(\dfrac{2n}{N-1}-1\right)^2}\right]}{I_0\left[\beta.\dfrac{N-1}{2}\right]} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nếu $\beta.\left(\dfrac{N-1}{2}\right)$ càng lớn thì bề rộng của đỉnh trung tâm sẽ càng lớn.

Ở đây $I_0(x)$ là hàm Bessel biến dạng loại một bậc không.

$I_0(x)$ có thể được tính qua chuỗi hội tụ nhanh sau đây:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right]^2$$

Phương pháp lấy mẫu tần số

Chúng ta biết rằng đáp ứng xung $h_d(n)$ của bộ lọc số thực tế *FIR* có chiều dài hữu hạn N:

$$h_d(n)_N \begin{cases} \neq 0 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy ta có thể tìm biến đổi Fourier rời rạc với N điểm như sau:

$$H_d(k)_N = DFT\,[h_d(n)_N]$$
$$= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

và biến đổi Fourier rời rạc ngược như sau:

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) W_N^{-kn} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Phương pháp lấy mẫu tần số

Đối với đáp ứng tần số ta có:

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k)\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}e^{-j\left[\omega\frac{N-1}{2}+\frac{\pi}{N}k\right]}$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}.\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k)e^{-j\frac{\pi}{N}k}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}$$

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)}A_d(e^{j\omega})$$

ở đây:

$$\theta(\omega) = -\omega\frac{N-1}{2}$$

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k)e^{-j\frac{\pi}{N}k}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}$$

Phương pháp lấy mẫu tần số