POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Corrigé examen intra

INF2010

Sigle du cours

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
Q6	
Total	

Identification de l'étudiant(e)		
Nom :	**Prénom :**	
Signature :	**Matricule :**	**Groupe :**

Sigle et titre du cours		*Groupe*	*Trimestre*
INF2010 – Structures de données et algorithmes		**Tous**	**20141**
Professeur		***Local***	***Téléphone***
Ettore Merlo, responsable – Tarek Ould Bachir, chargé de cours		**L-1710**	**7128**
Jour	***Date***	***Durée***	***Heure***
Jeudi	**27 février 2013**	**2h00**	**14h00**

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Toute	☐ Aucune	**Les cellulaires, agendas électroniques et téléavertisseurs sont interdits.**
☒ Aucune	☐ Programmable	
☐ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

Directives particulières

Bonne chance à tous!

Important

Cet examen contient **6** questions sur un total de **19** pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de **30** **%**

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 : Tables de dispersement (20 points)

Soit une table de dispersement double Hash(x) = (H_1(x) + i H_2(x)) % N où

$x \geq 0$
H_1(x) = $\lfloor x/N \rfloor$: résultat de la division entière de x par N
H_2(x) = R – (x % R)

R et N sont des nombres premiers tels que 0 < R < N et N est la taille de la table.

1.1) **(10 points)** En vous servant du tableau ci-dessous, donnez l'état de la mémoire d'une table de taille N=13 après l'insertion, dans l'ordre, des clés suivantes (on prendra R = 7):

91, 56, 53, 133, 94.

Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Entrées			94		56			91			53	133	

Donnez le détail de vos calculs ci-après:

<u>x = 91:</u> 91/13 = 7
<u>x = 56:</u> 56/13 = 4
<u>x = 53:</u> 53/13 = 4, collision; H_2(53) = 7 - (53%7) = 3, 4+3 = 7, collision, 7+3 = 10
<u>x = 133:</u> 133/13 = 10, collision, H_2(133) = 7 - (133%7) = 7, (10+7)%13= 4, collision, 4+7 = 11
<u>x = 94:</u> 94/13=7, collision, H_2(94) = 7 - (94%7) = 4, 7+4 = 11, collision, (11+4)%13 = 2

1.2) **(6 points)** Pour chacun des cas énumérés ci-après, discutez brièvement, mais de manière argumentée, la qualité d'uniformité de dispersion de la fonction de hachage. Pour chaque cas, on supposera *x* uniformément réparti sur l'intervalle de référence.

a) $0 \leq x < N$

Dans ce cas, $H_1(x)$ retourne toujours 0. C'est le pire cas pour l'uniformité de la dispersion (très mauvaise donc).

b) $0 \leq x < N(N-1)/2$

Dans ce cas, $H_1(x)$ retourne une valeur entre 0 et (N-1)/1, de sorte que la moitié des destinations ne sont pas ciblées: mauvaise uniformité.

c) $0 \leq x < N^2$

Dans ce cas, $H_1(x)$ retourne une valeur uniformément répartie sur l'intervalle allant de 0 à N-1. Cas idéal pour cette fonction.

d) $0 \leq x < N^3$

Les valeurs dans l'intervalle $[0, N^2)$ seront uniformément réparties sur l'intervalle. Idem pour $[N^2, 2N^2)$, $[2N^2, 3N^2)$, ...$[(N-1)N^2, N^3)$. Ainsi, dans ce cas, $H_1(x)$ retourne une valeur uniformément répartie sur l'intervalle allant de 0 à N-1. Cas idéal pour cette fonction.

e) $0 \leq x < 2^{31}$, $N = 3^{10}$

$2^{31} = 2\,147\,483\,648$, $3^{10} = 53\,049$. $(3^{10})^2 = 3\,486\,784\,401 > 2^{31}$. Les valeurs ne seront par conséquent pas uniformément réparties sur l'intervalle: mauvaise uniformité.

f) $0 \leq x < 2^{31}$, $N = 3^9$

$3^9 = 19\,683$. $(3^9)^2 = 387\,420\,489 < 2^{31} \approx 5.54(39)^2$. Les valeurs ne seront par conséquent pas uniformément réparties sur l'intervalle (une moitié de l'intervalle recevera 5/11e des valeurs, l'autre moitié 6/11 des valeurs): pas très bonne uniformité.

1.3) **(4 points)** De façon générale, que peut-on dire du choix de la fonction $H_1(x)$ comme fonction de dispersement primaire de ce hachage double ?

C'est un mauvais choix de fonction. Elle ne produit une répartition uniforme que dans des cas spécifiques et rares.

Question 2 : Tris en $n \log(n)$ (20 points)

On désire étudier **la version de l'algorithme *Quick Sort* donnée à l'Annexe 1** pour trier le vecteur ci-après. On considère une valeur *cut-off* de 8. Attention, cette version diffère quelque peu de celle vue en cours. Notamment: Elle fait appel à *Merge Sort* plutôt qu'à *Insertion Sort* pour trier les petits vecteurs; Elle n'utilise pas *median3* pour déterminer le pivot.

Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Valeurs	16	14	12	10	2	6	4	8	7	13	11	9	15	5	3	1

2.1) (**2 points**) Donnez l'état du vecteur après la mise à l'écart du pivot lors de la première récursion de QuickSort :

Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Valeurs	16	14	12	10	2	6	4	**1**	7	13	11	9	15	5	3	**8**

2.2) (**5 points**) Donnez l'état du vecteur après l'exécution du partitionnement de la première récursion :

Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Valeurs	3	5	7	1	2	6	4	**8**	12	13	11	9	15	14	16	10

2.3) **(2 points)** Au total, quel est le nombre de fois que la fonction récursive `quicksort` aura été appelée pour exécuter le tri ? Pour éviter tout ambiguïté, la signature de la fonction est reproduite ci-après.

Signature de la fonction considérée :

```
private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
void quicksort( AnyType [ ] a, AnyType tmpArray, int left, int right )
```

Votre réponse: 3

2.3) **(2 points)** Au total, quel est le nombre de fois que la fonction récursive `qsmergesort` aura été appelée pour exécuter le tri ? Pour éviter tout ambiguïté, la signature de la fonction est reproduite ci-après.

Signature de la fonction considérée :

```
private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
void qsmergesort( AnyType [ ] a, AnyType tmpArray, int left, int right )
```

Votre réponse: 28

2.4) **(2 points)** Quelle est la plus petite taille de vecteur sur laquelle la fonction récursive `qsmergesort` aura été appelée pour exécuter le tri ?

Votre réponse: 1

2.5) **(2 points)** Quelle est la plus grande taille de vecteur sur laquelle la fonction récursive `qsmergesort` aura été appelée pour exécuter le tri ?

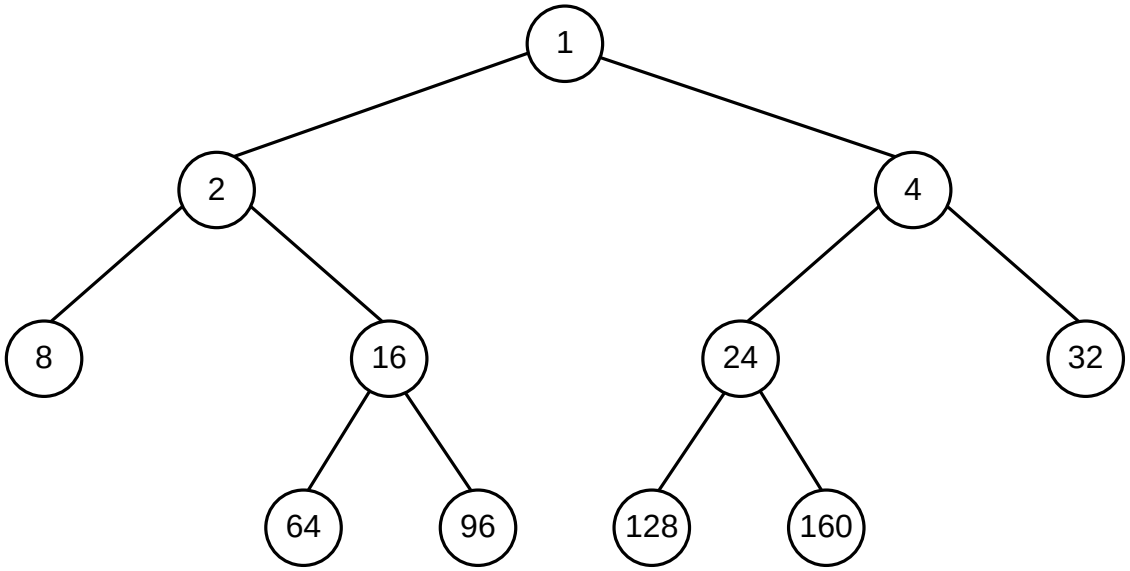
Votre réponse: 8

2.6) (**5 points**) Reproduisez le vecteur correspondant à la question (2.5) en positionnant ses éléments à leur place (entre les indices `left` et `right` inclusivement) :

Index	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Valeurs									12	13	11	9	15	14	16	10

Question 3 : Parcours d'arbres (12 points)

Considérez l'arbre binaire suivant:



3.1) (**3 points**) Donner le résultat de l'affichage de l'arbre binaire si il est parcouru en pré-ordre. Séparez les éléments par des virgules.

1, 2, 8, 16, 64, 96, 4, 24, 128, 160, 32

3.2) (**3 points**) Donner le résultat de l'affichage de l'arbre binaire si il est parcouru en post-ordre. Séparez les éléments par des virgules.

8, 64, 96, 16, 2, 128, 160, 24, 32, 4, 1

3.3) (**3 points**) Donner le résultat de l'affichage de l'arbre binaire si il est parcouru en en ordre. Séparez les éléments par des virgules.

8, 2, 64, 16, 96, 1, 128, 24, 160, 4, 32

3.4) (**3 points**) Donner le résultat de l'affichage de l'arbre binaire si il est parcouru par niveaux. Séparez les éléments par des virgules.

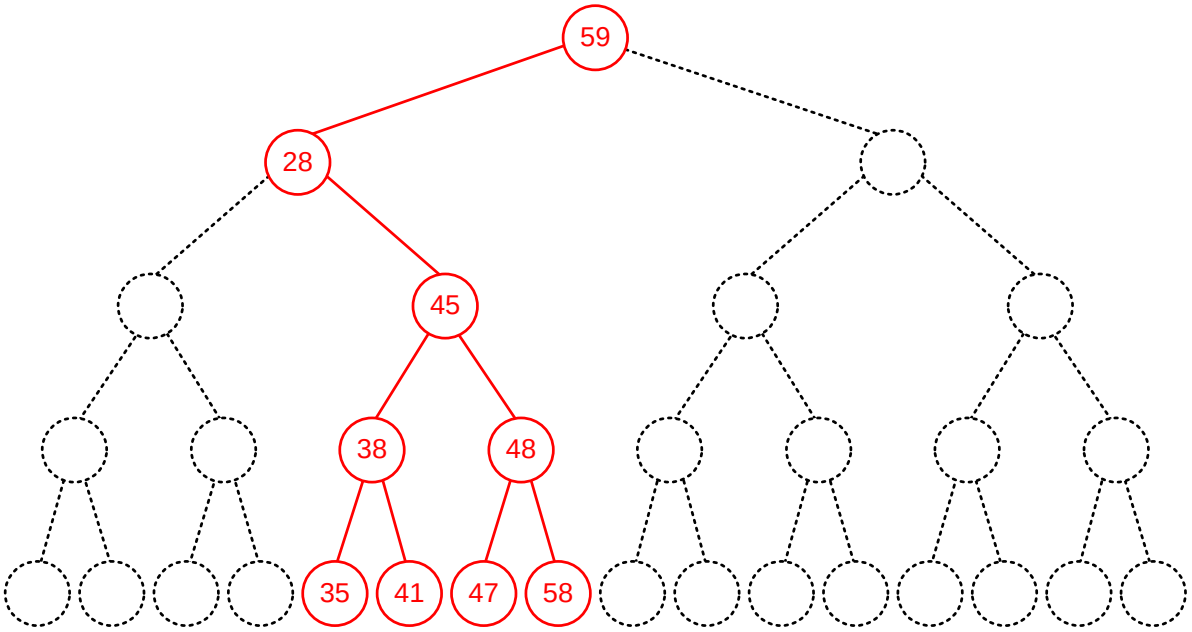
1, 2, 4, 8, 16, 24, 32, 64, 96, 128, 160

Question 4 : Arbres binaire de recherche (12 points)

4.1) **(4 points)** Si l'affichage par niveaux de l'arbre binaire de recherche donne :

59, 28, 45, 38, 48, 35, 41, 47, 58

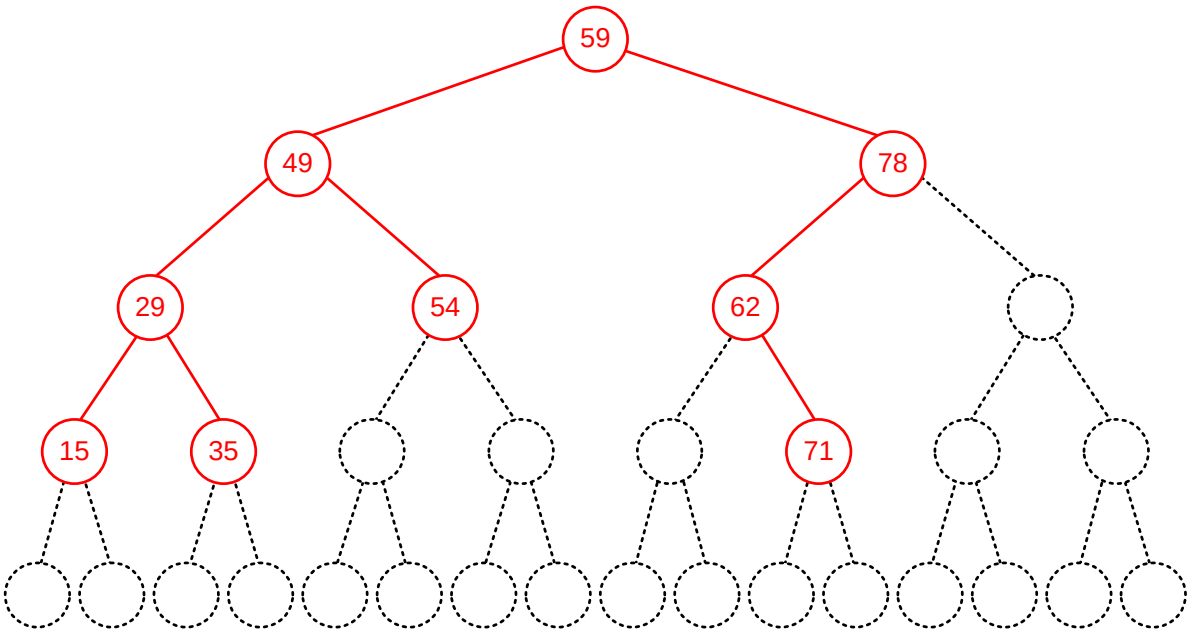
Donnez la représentation graphique de l'arbre.



4.2) **(4 points)** Si l'affichage pré-ordre de l'arbre binaire de recherche donne :

59, 49, 29, 15, 35, 54, 78, 62, 71

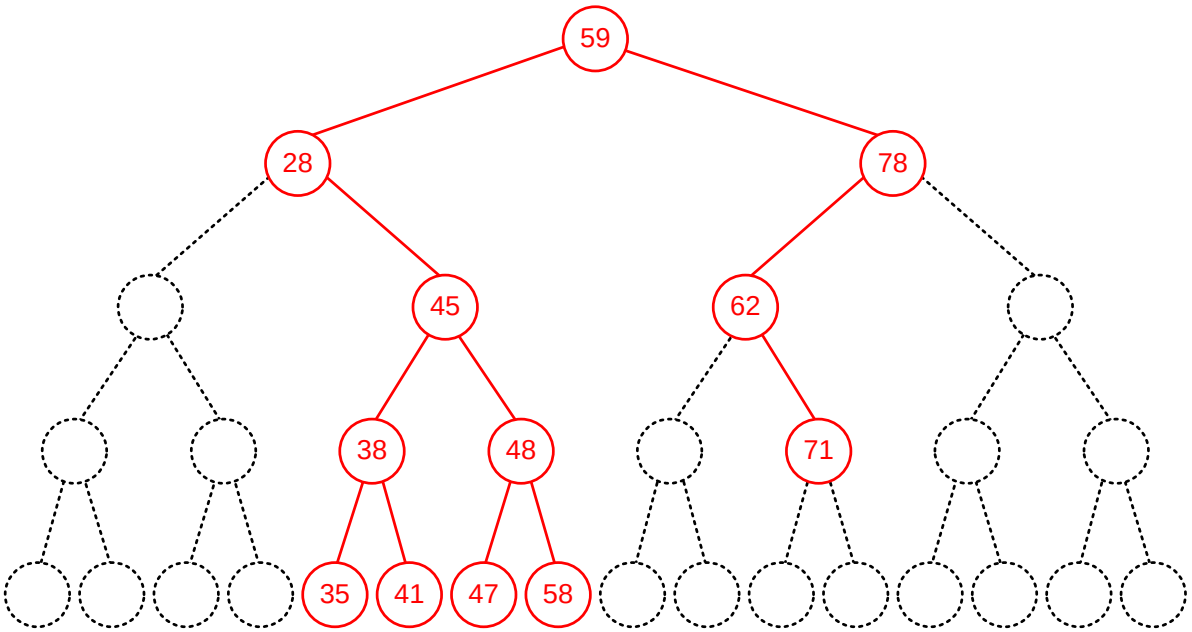
Donnez la représentation graphique de l'arbre.



4.3) **(4 points)** Si l'affichage post-ordre de l'arbre binaire de recherche donne :

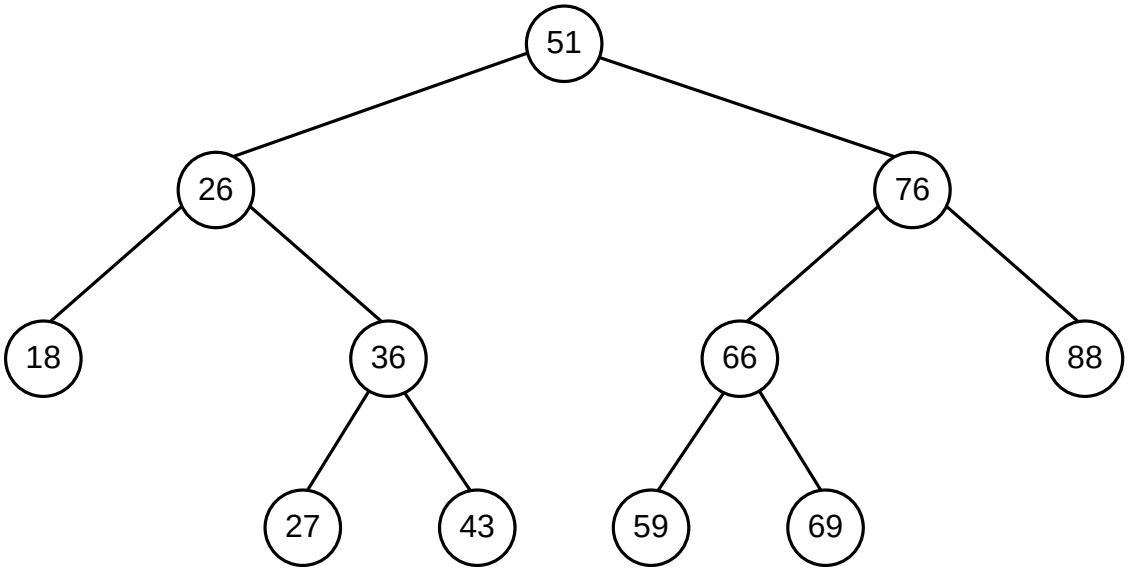
35, 41, 38, 47, 58, 48, 45, 28, 71, 62, 78, 59

Donnez la représentation graphique de l'arbre.

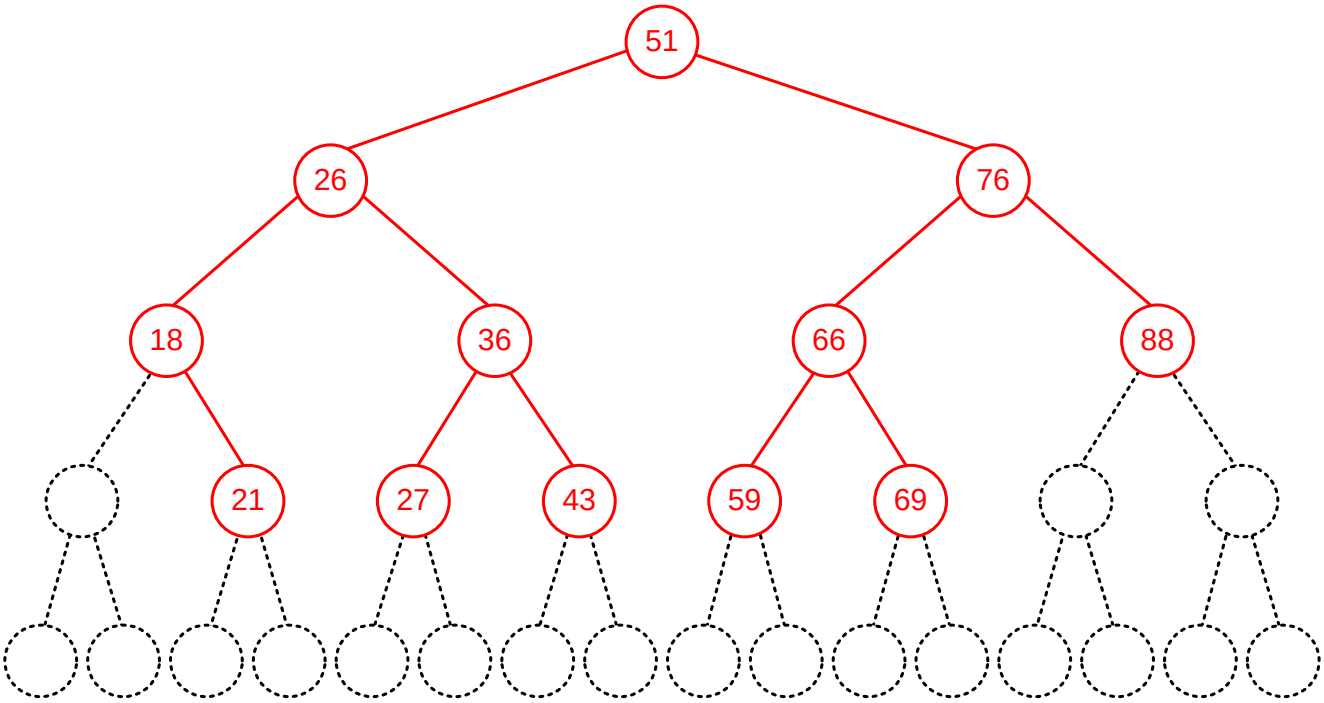


Question 5 : Arbre binaire de recherche de type AVL (15 points)

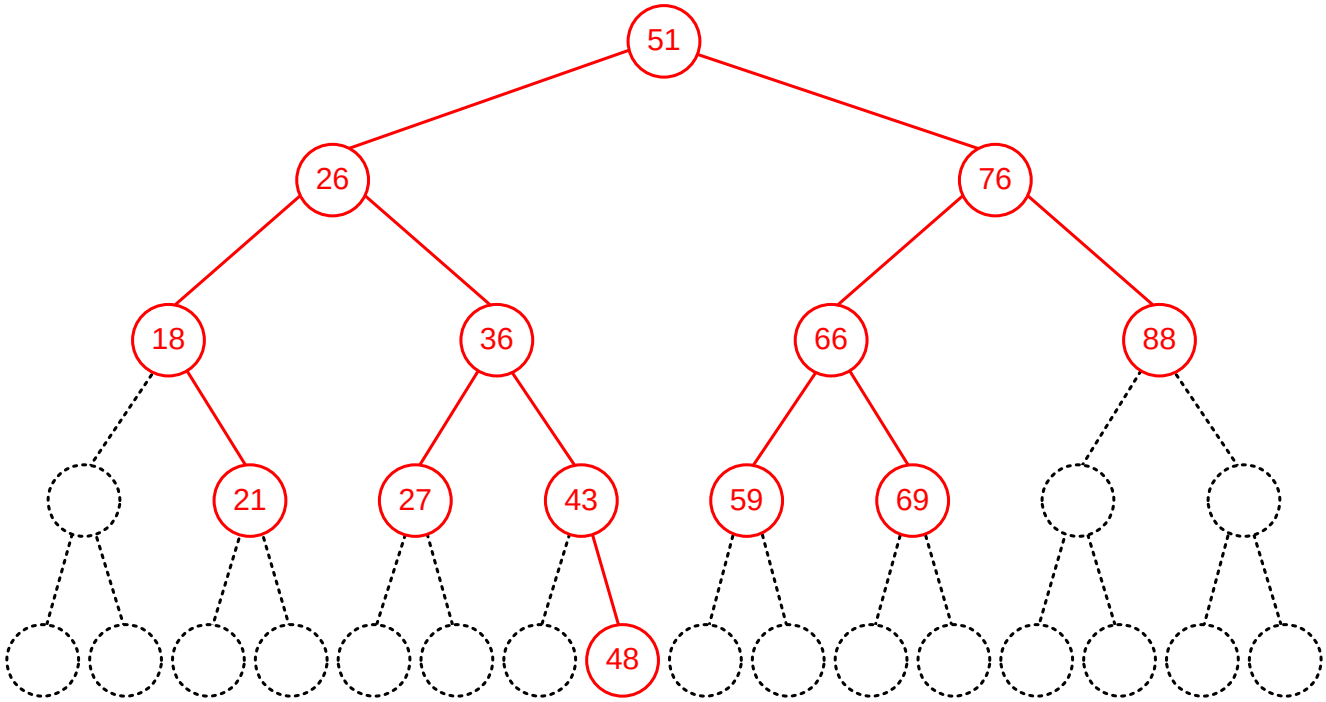
En partant de l'arbre AVL suivant :



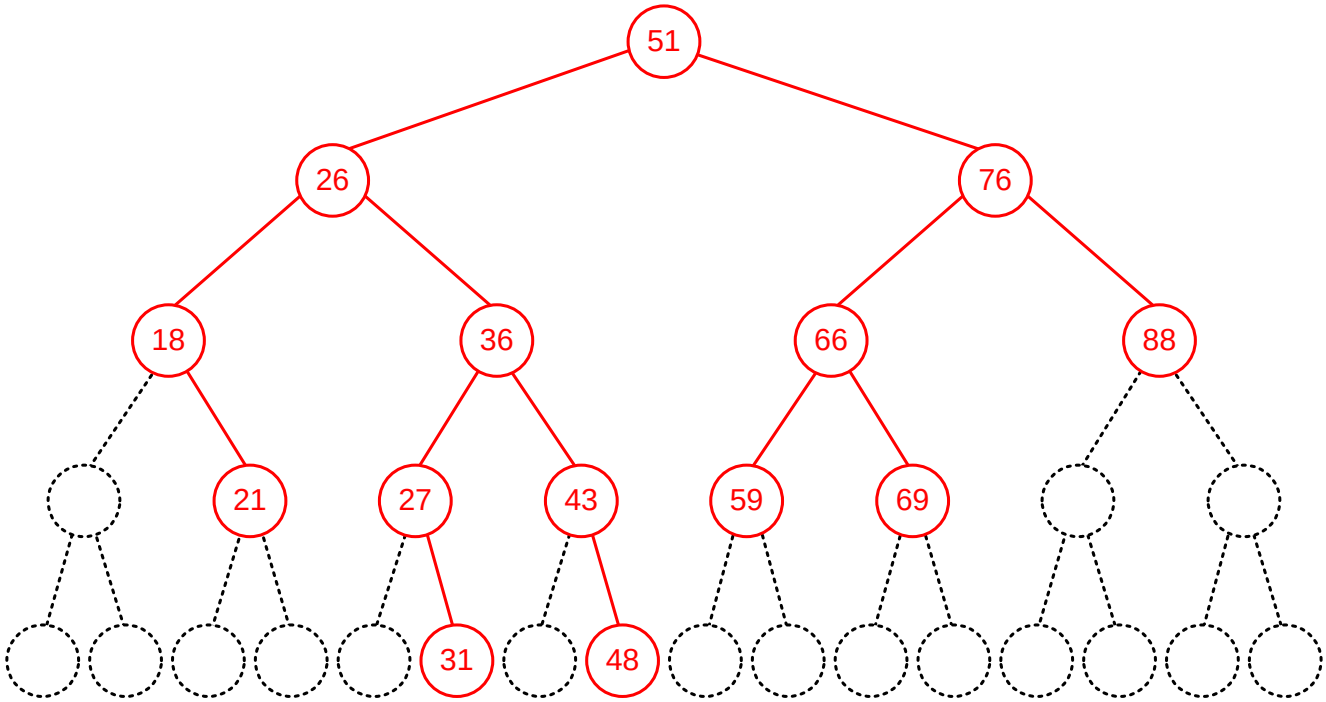
5.1) Insérez 21. **(3 points)**



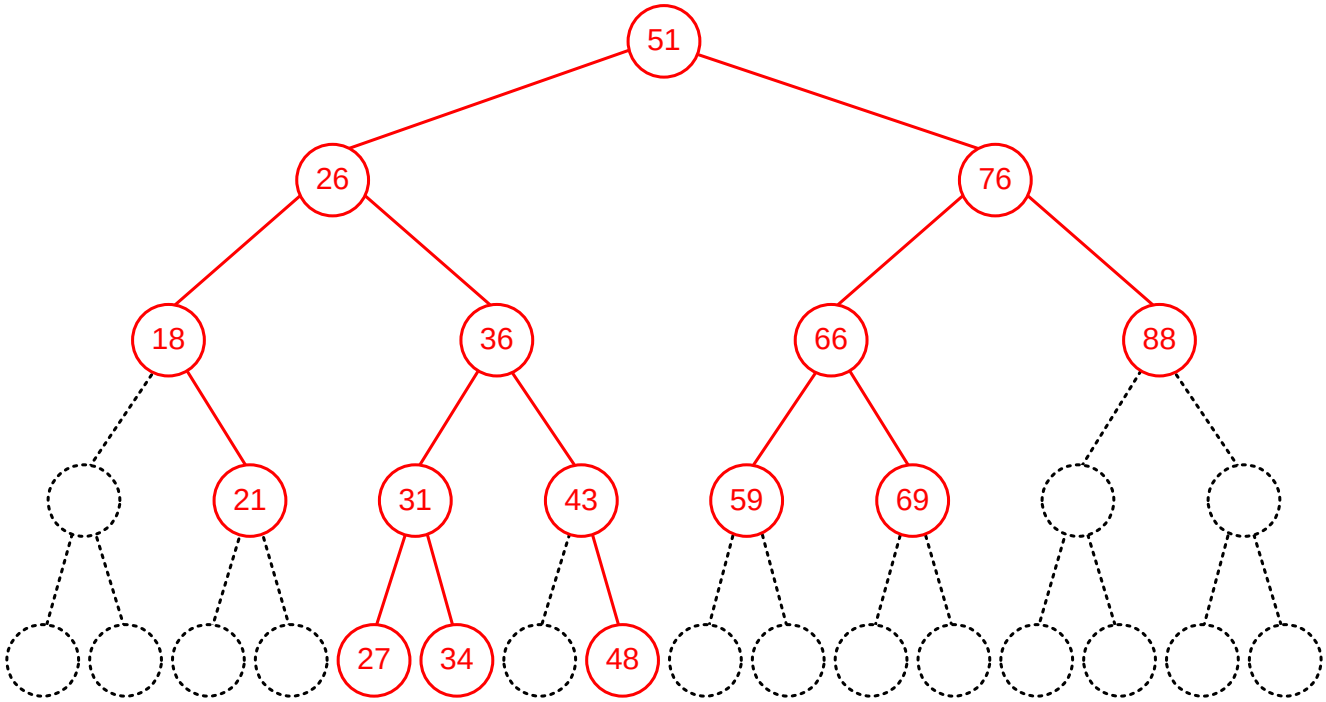
5.2) En partant du résultat de la question 5.1), insérez 48. **(3 points)**



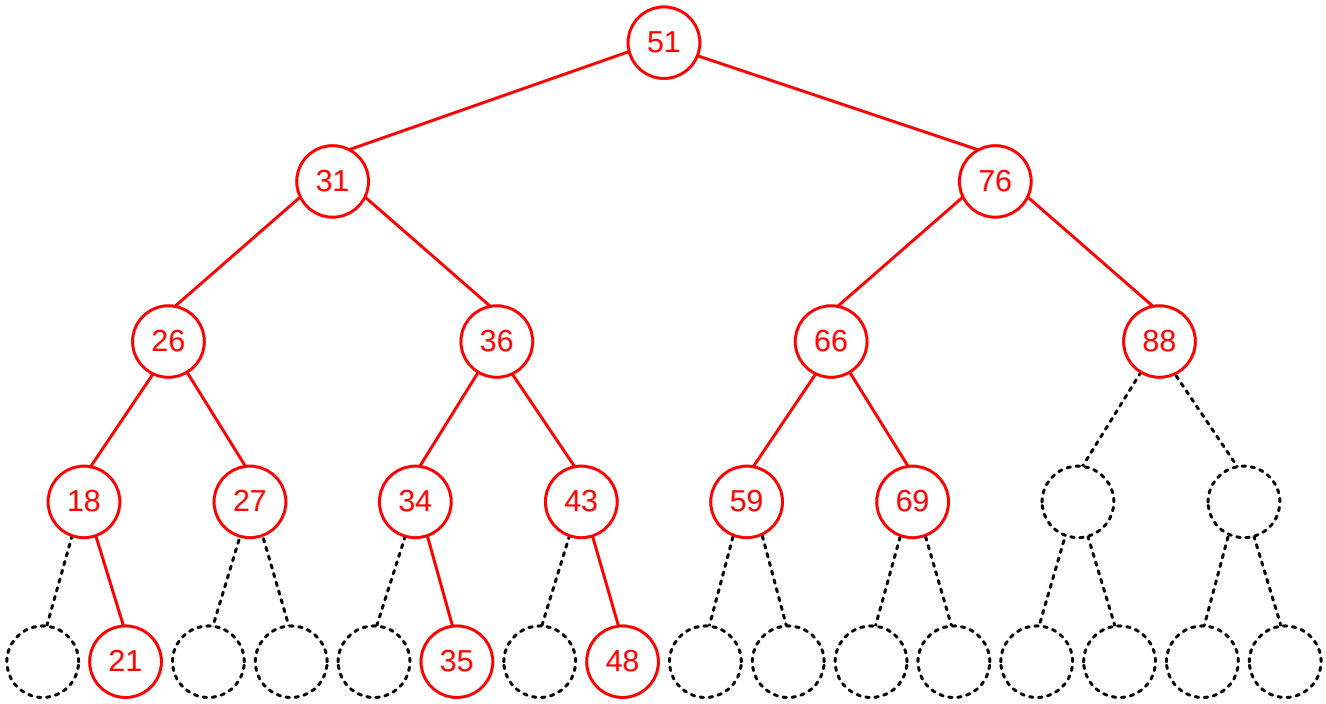
5.3) En partant du résultat de la question 5.2), insérez 31. **(3 points)**



5.4) En partant du résultat de la question 5.3), insérez 34. **(3 points)**

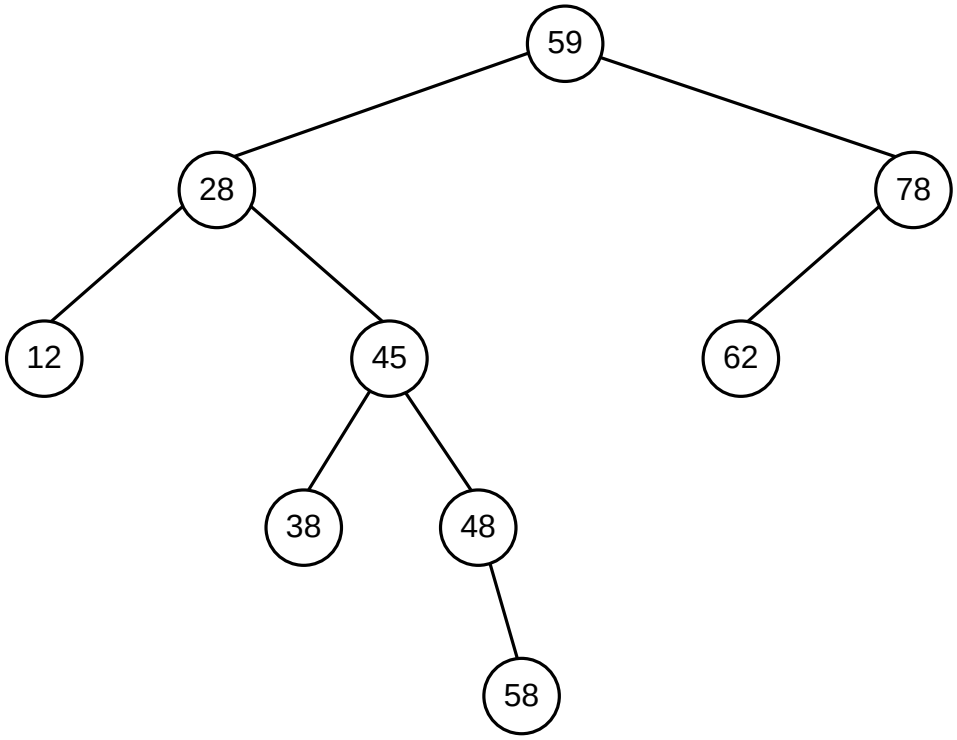


5.5) En partant du résultat de la question 5.4), insérez 35. **(3 points)**

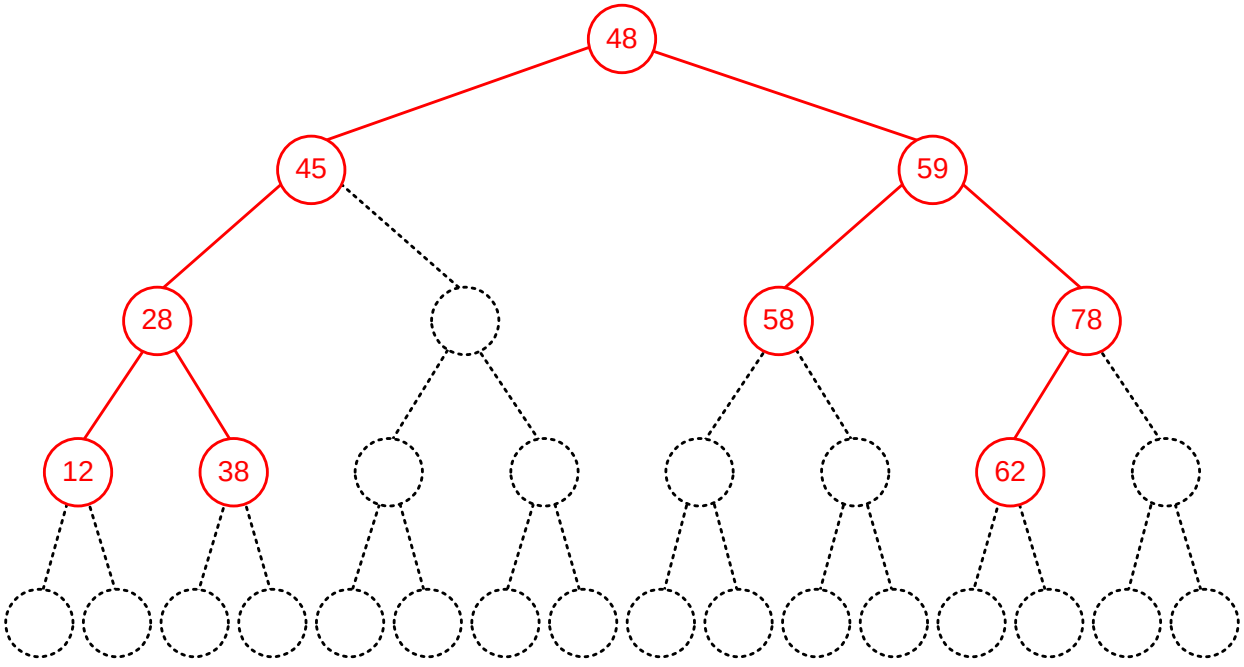


Question 6 : Arbre binaire de recherche de type Splay (21 points)

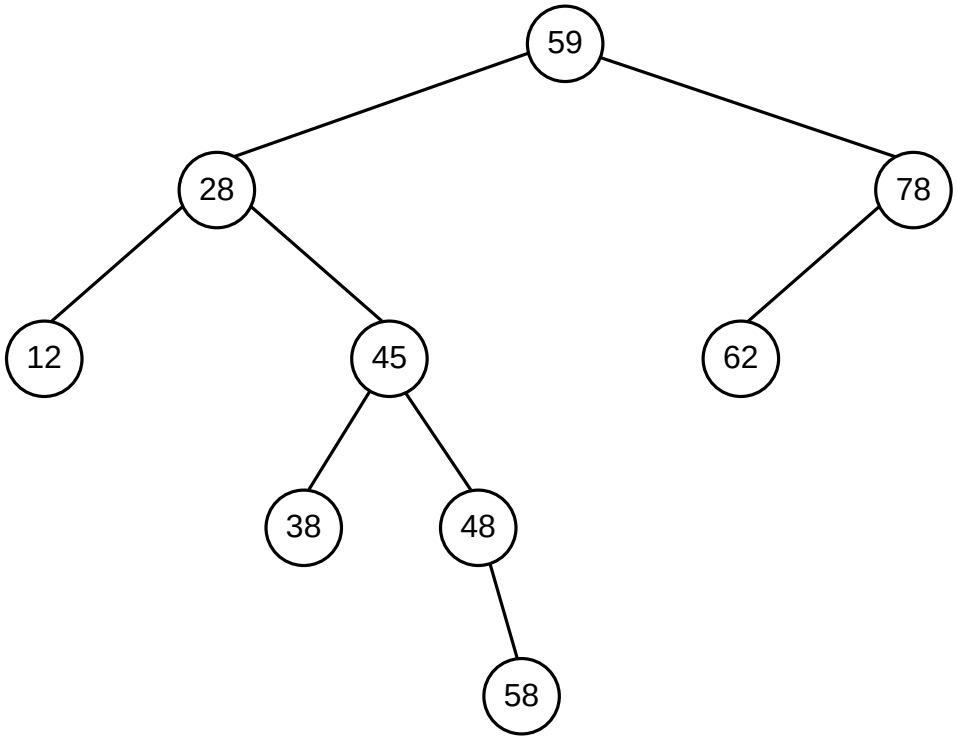
En partant de l'arbre Splay suivant :



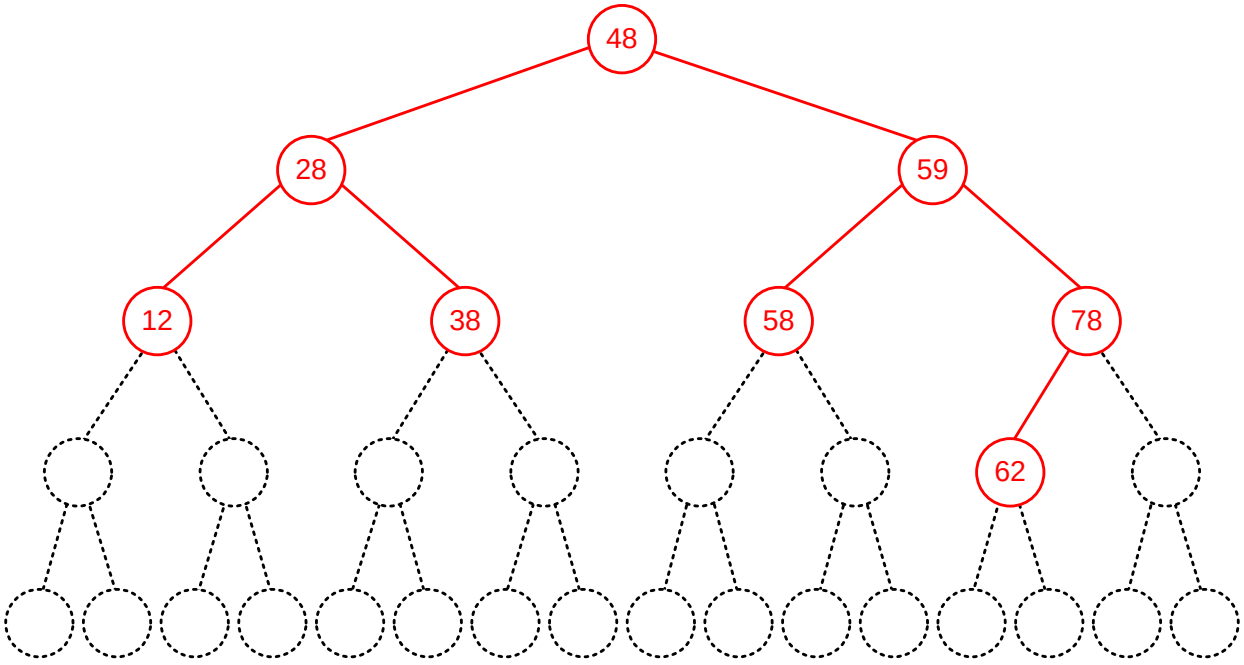
6.1) **(4 points)** Effectuez un `get(48)`.



En repartant du même arbre Splay :

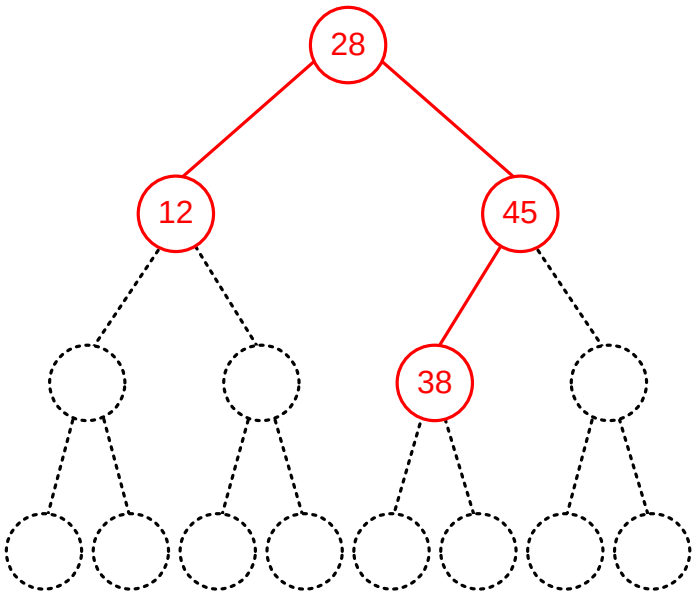


6.2) **(5 points)** Effectuez un `delete(45)`.

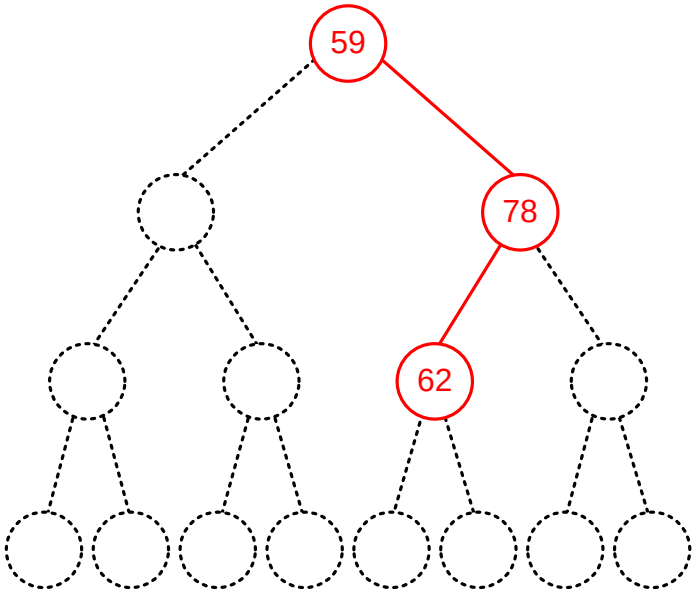


6.3) **(6 points)** Si le `get(48)` de la question 6.1) avait été exécuté par une implémentation de type top-down, quels auraient été les sous-arbres R et L juste avant que 48 ne soit placé à la racine ? **Aidez-vous des données de l'Annexe 2.**

Sous-arbre L:

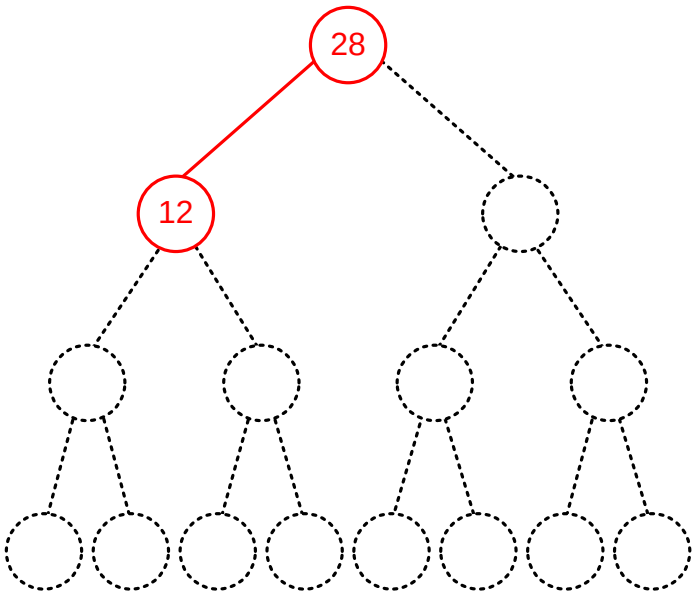


Sous-arbre R:

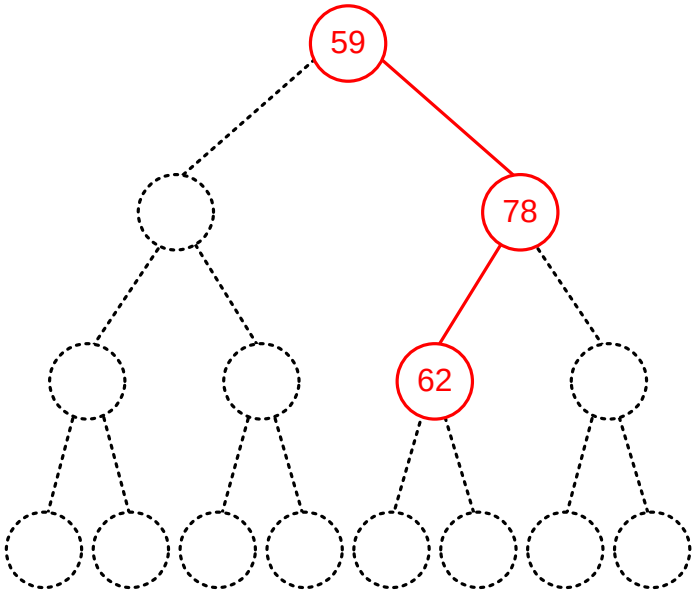


6.4) **(6 points)** Si le `delete(45)` de la question 6.2) avait été exécuté par une implémentation de type top-down, quels auraient été les sous-arbres R et L juste avant que 45 ne soit placé à la racine ? **Aidez-vous des données de l'Annexe 2.**

Sous-arbre L:



Sous-arbre R:



Annexe 1

```
public final class IntraSort
{
   /**
   * Appel interne à mergesort depuis QuickSort
   */
   private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
   void qsmergesort( AnyType [ ] a, AnyType [ ] tmpArray,
                     int left, int right )
   {
      if( left < right )
      {
         int center = ( left + right ) / 2;
         qsmergesort( a, tmpArray, left, center );
         qsmergesort( a, tmpArray, center + 1, right );
         qsmerge( a, tmpArray, left, center + 1, right );
      }
   }

   /**
   * Fusionne deux vecteurs
   */
   private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
   void qsmerge( AnyType [ ] a, AnyType [ ] tmpArray,
                 int leftPos, int rightPos, int rightEnd )
   {
      int leftEnd = rightPos - 1;
      int tmpPos = 0;
      int numElements = rightEnd - leftPos + 1;

      // Main loop
      while( leftPos <= leftEnd && rightPos <= rightEnd )
         if( a[ leftPos ].compareTo( a[ rightPos ] ) <= 0 )
            tmpArray[ tmpPos++ ] = a[ leftPos++ ];
         else
            tmpArray[ tmpPos++ ] = a[ rightPos++ ];

      while( leftPos <= leftEnd )    // Copy rest of first half
         tmpArray[ tmpPos++ ] = a[ leftPos++ ];

      while( rightPos <= rightEnd )  // Copy rest of right half
         tmpArray[ tmpPos++ ] = a[ rightPos++ ];

      // Copy tmpArray back
      for( int i = 0; i < numElements; i++, rightEnd-- )
         a[ rightEnd ] = tmpArray[ numElements-i-1 ];
   }

   private static final int CUTOFF = 8;

   /**
   * Quicksort
   */
```

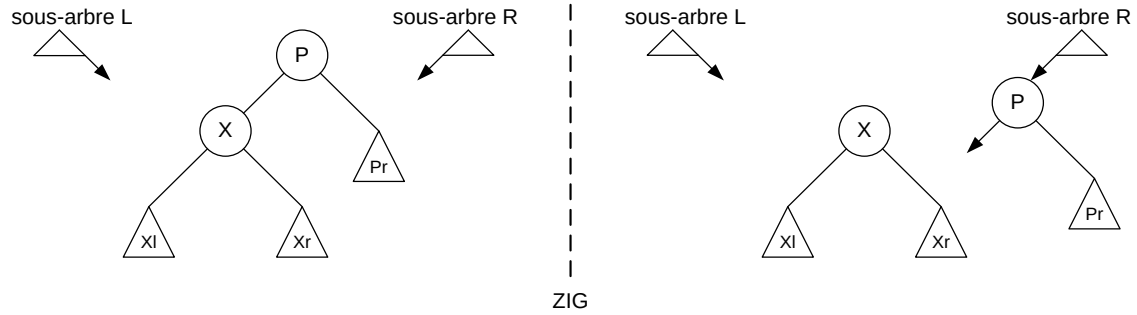
```
public static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
void quicksort( AnyType [ ] a )
{
   AnyType [ ] tmpArray = (AnyType[]) new Comparable[ CUTOFF ];
   quicksort( a, tmpArray, 0, a.length - 1 );
}

/**
* Appel interne à quicksort, utilise élément central comme pivot,
* une valeur cutoff de 8, ainsi que MergeSort pour les petits vecteurs
*/
private static <AnyType extends Comparable<? super AnyType>>
void quicksort( AnyType [ ] a, AnyType [ ] tmpArray, int left, int right )
{
   if( left + CUTOFF <= right )
   {
      int center = ( left + right ) / 2;

      AnyType pivot = a[center];
      swapReferences( a, center, right );

      // partitionnement
      int i = left-1, j = right;
      for( ; ; )
      {
         while( a[ ++i ].compareTo( pivot ) < 0 ) { }
         while( a[ --j ].compareTo( pivot ) > 0 ) { }
         if( i < j )
            swapReferences( a, i, j );
         else
            break;
      }

      swapReferences( a, i, right );
      // fin du partitionnement

      // recursion
      quicksort( a, tmpArray, left, i - 1 );
      quicksort( a, tmpArray, i + 1, right );
   }
   else
      qsmergesort( a, tmpArray, left, right );
}

/**
* Interchange (swap) deux valeurs
*/
public static <AnyType> void
swapReferences( AnyType [ ] a, int index1, int index2 )
{
   AnyType tmp = a[ index1 ];
   a[ index1 ] = a[ index2 ];
   a[ index2 ] = tmp;
}
```

```
   public static void main( String [ ] args )
   {
      Integer [ ] a = {16, 14, 12, 10,  2, 6, 4, 8,
                       7, 13, 11,  9, 15, 5, 3, 1};

      quicksort( a );

      for(Integer valeur : a)
         System.out.print(valeur + " ");

   }
}
```

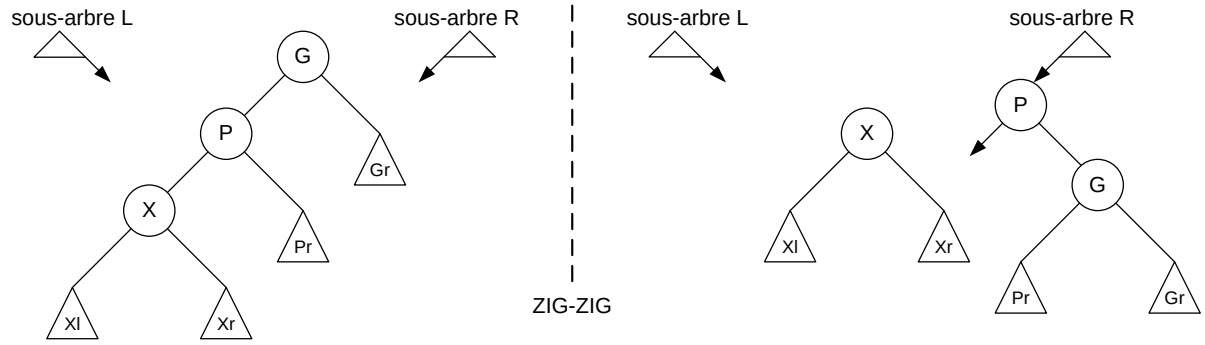
Annexe 2

Transformations TOP/DOWN utilisées dans les arbre Splay

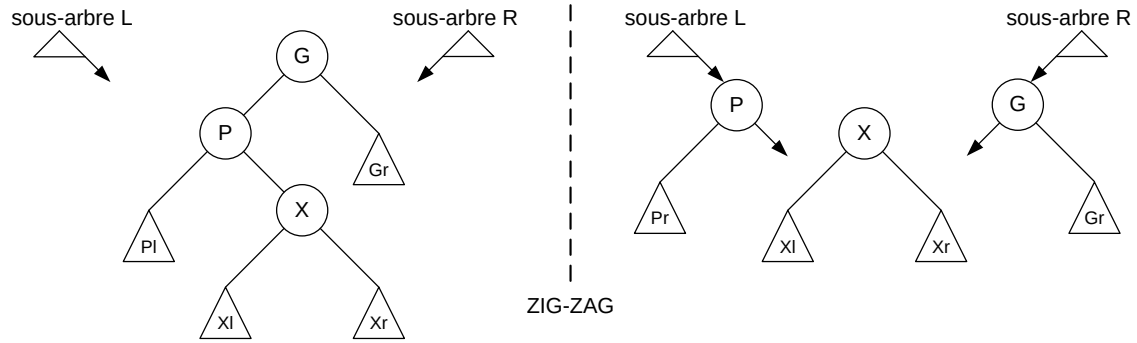
ZIG:



ZIG-ZIG



ZIG-ZAG



FIN: