3. a) SJECIŠTE ZRAKE I TROKUTA

- sjecište $\triangle abc$ i zrake pogleda $e+td$ možemo formulirati kao rješavanje sustava jednadžbi uz pomoć baricentričnih koordinata $\alpha+\beta+\gamma=1$:
$$e+td=\alpha a+\beta b+\gamma c=a+\beta(b-a)+\gamma(c-a)$$

- raspisivanjem po koord. dobijemo sustav:

$$\begin{bmatrix} x_a-x_b & x_a-x_c & x_d \\ y_a-y_b & y_a-y_c & y_d \\ z_a-z_b & z_a-z_c & z_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_a-x_e \\ y_a-y_e \\ z_a-z_e\end{bmatrix}$$

- možemo zapisati kao 3×3 sustav $Ax=b$:

$$A=\begin{bmatrix} x_a-x_b & x_a-x_c & x_d \\ y_a-y_b & y_a-y_c & y_d \\ z_a-z_b & z_a-z_c & z_d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}\beta\\ \gamma\\ t\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix} x_a-x_e \\ y_a-y_e \\ z_a-z_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i\\ j\\ k\end{bmatrix}$$

- Cramerovim pravilom riješimo sustav:

$$\beta=\frac{\det[b\,A_2\,A_3]}{\det A},\quad \gamma=\frac{\det[A_1\,b\,A_3]}{\det A},\quad t=\frac{\det[A_1\,A_2\,b]}{\det A}$$

- raspisano:

$$\beta=\frac{j(ei-hf)+k(gf-di)+l(dh-eg)}{a(ei-hf)+b(gf-di)+c(dh-eg)}$$

$$\gamma=\frac{i(ak-jb)+h(jc-al)+g(bl-kc)}{a(ei-hf)+b(gf-di)+c(dh-eg)}$$

$$t=-\frac{f(ak-jb)+e(jc-al)+d(bl-kc)}{a(ei-hf)+b(gf-di)+c(dh-eg)}$$

- ako $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$ i $t>0$, onda zraka siječe trokut u točki $p=e+td$
- normala na $\triangle abc$: $n=(b-a)\times(c-a)$

SJECIŠTE ZRAKE I SFERE

- $S(c,R)$ sfera u centru $c=(x_c,y_c,z_c)$ radijusa R ima jed.:
$$(p-c)(p-c)-R^2=0$$

- koristeći def. za p:

$(e+td-c)(e+td-c)-R^2=0$ dobivamo:

$$(d\cdot d)t^2+2d(e-c)t+(e-c)(e-c)-R^2=0$$

- riješimo kv. jed.:

$$t_{1,2}=\frac{-d\cdot(e-c)\pm\sqrt{(d\cdot(e-c))^2-(d\cdot d)((e-c)(e-c)-R^2)}}{d\cdot d}$$

- ukoliko diskriminanta ≥ 0, zraka siječe sferu
- normala u točki p sfere: $n=2(p-c)$

b)

- za zraku $e+\lambda d$: $e=(e_1,e_2,e_3)$

$d=(d_1,d_2,d_3)$

- za površ. cilindra: $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{s^2}=1$ $\quad 0\leq z\leq h$

- projiciramo zraku $e+\lambda d$ na xy ravninu:

$e_{xy}=(e_1,e_2)$

$d_{xy}=(d_1,d_2)$

- rješavanjem parametarskih jed. odredimo točku sjecišta projekcije zrake s eliptičnom površ.; parametarske jed projekcije zrake su:

$x=e_1+\lambda d_1$ $\quad\lambda\rightarrow$ nepoznata varijabla

$y=e_2+\lambda d_2$

- zamjenimo x i y u jed. eliptične površ. i riješimo za λ

$$\frac{(e_1+\lambda d_1)^2}{r^2}+\frac{(e_2+\lambda d_2)^2}{s^2}=1$$

↳ rj. ove jed. za λ reći će nam siječe li se zraka s eliptičnim cilindrom ili ne

ako $\exists$ real poz. rj. za λ, zraka se siječe s cilindrom, u suprotnom zraka ne siječe cilindar

- na kraju potrebno još provjeriti da je λ u rasponu $[0,\infty\rangle$ da bismo provjerili je li točka sjecišta unutar zadanog raspona z, tj. $0\leq z\leq h$