OMNI 2022-2023 : TP NUMERIQUE 6

L'objectif de ce TP est de vous familiariser avec les opérateurs mathématiques Divergent, noté div, et Rotationnel, noté $\overrightarrow{rot}$. Il est absolument nécessaire d'avoir lu avant le jour du TP l'introduction ci-dessous **(compter 10-15 minutes de lecture)**.

I INTRODUCTION AUX OPERATEURS DIVERGENTS ET ROTATIONNELS

I.1 OPERATEUR DIVERGENTS

I.1.1 RAPPEL : DEFINITION D'UNE SURFACE FERMEE

Une surface fermée est une surface qui délimite un volume. Une boîte est un bon exemple de surface fermée (voir la figure 1). Lorsque cette surface est plongée dans un champ vectoriel, il est possible de calculer le flux de ce champ à travers elle ; il s'agit de la somme des flux traversant toutes les surfaces qui la constitue. Il faut cependant au préalable définir une convention qui permette de contrôler le signe du résultat. Pour une surface fermée, on choisit généralement la normale sortante pour orienter les surfaces. Avec cette convention, les lignes de champ entrant dans la surface fermée définissent un flux négatif, tandis que les lignes de champ sortant de la boîte définissent un flux positif.

Le flux φ sortant du cube est :

$$\varphi = \oiint_S d\varphi = \sum_{i=1}^{i=6} \iint_{S_i} d\varphi_i = \sum_{i=1}^{i=6} \iint_{S_i} \overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{dS_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{i=6} \iint_{S_i} (\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{n_i})dS_i$$

Avec $\vec{a}$ le champ au niveau de chaque surface S_i de normale $\overrightarrow{n_i}$

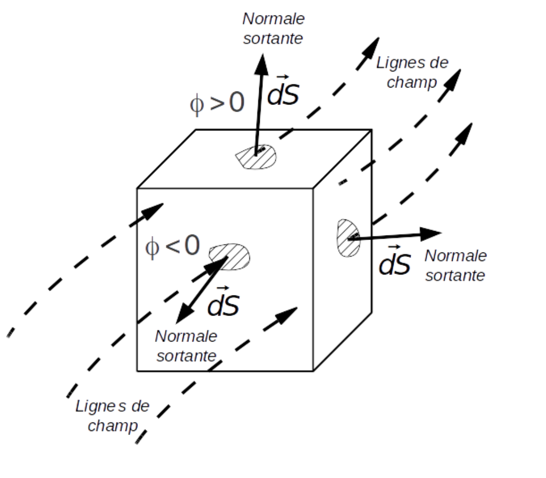


FIGURE 1: FLUX A TRAVERS UNE SURFACE FERMEE (ICI UN CUBE)

I.1.2 Flux a travers un volume elementaire

Imaginons maintenant une surface fermée construite à partir d'arêtes de longueur infinitésimale (cf Figure 2), orientées le long de chacun des axes d'un repère cartésien (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$). L'arête orientée le long de $\overrightarrow{u_x}$ est de longueur dx et ainsi de suite.

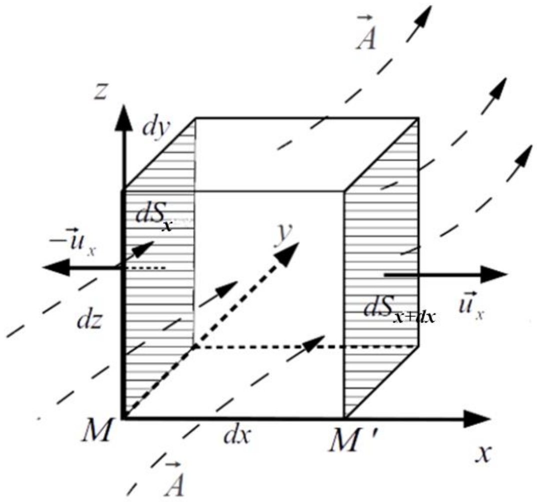


FIGURE 2 : FLUX A TRAVERS UN CUBE ELEMENTAIRE. POUR LA CLARTE, ON N'A REPRESENTE QUE dS_x ET dS_{x+dx}

Le volume du cube est donc $d\tau = dxdydz$. Il est délimité par 6 faces :

- Deux faces dS_x et dS_{x+dx} de surface $dydz$ et de normale respective -$\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_x}$
- Deux faces dS_y et dS_{y+dy} de surface $dxdz$ et de normale respective -$\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_y}$
- Deux faces dS_z et dS_{z+dz} de surface $dxdy$ et de normale respective -$\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_z}$

Le cube élémentaire est plongé dans un champ vectoriel $\vec{a} = a_x\overrightarrow{u_x} + a_y\overrightarrow{u_y} + a_z\overrightarrow{u_z}$. Le flux élémentaire de $\vec{a}$ à travers ce cube élémentaire est la somme des flux à travers ses 6 faces.

Calculons celui passant à travers dS_x et dS_{x+dx} :
Pour dS_x on a :

$$d\varphi_x = \vec{a}(x,y,z).(dydz)\left(-\overrightarrow{u_x}\right) = -a_x(x,y,z)dydz$$

Et pour dS_{x+dx} :

$$\mathrm{d}\varphi_{x+dx} = \vec{a}(x+dx,y,z).(dydz)\left(\overrightarrow{u_x}\right) = a_x(x+dx,y,z)dydz$$

La somme de ces deux flux $\mathrm{d}\Phi_x$ est

$$\mathrm{d}\Phi_x = \mathrm{d}\varphi_{x+dx} + d\varphi_x = \left(a_x(x+dx,y,z) - a_x(x,y,z)\right)dydz \cong \frac{\partial a_x}{\partial x}dxdydz$$

Le flux total à travers le cube élémentaire est donc

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z \cong \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

On définit ainsi l'opérateur divergent , $div\vec{a}$

$$\boldsymbol{div\vec{a}} = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$$

Tel que $$d\Phi = div(\vec{a})dxdydz = div(\vec{a})d\tau$$

L'operateur divergent s'applique donc à <u>un champ vectoriel</u> et retourne <u>un champ scalaire.</u> La divergence représente le flux qui sort (ou entre s'il est négatif) d'un volume infinitésimal construit autour d'un point donné de l'espace, <u>par unité de volume</u>.

Remarque : On pourrait faire le même travail en coordonnée cylindrique ou sphérique, mais il faudrait alors pour cela considérer respectivement un volume $rdrd\theta dz$, ou un volume $drrd\theta rsin\theta d\varphi$…ce qui donne donc des formules pour le divergent différentes de celles obtenues précédemment en coordonnées cartésiennes. On trouve ainsi :

En coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$:

$$\boldsymbol{div\vec{a}} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Et en coordonnée sphériques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$:

$$\boldsymbol{div\vec{a}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial(sin(\theta)a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

Remarque : la divergence div($\vec{a}$) d'un champ $\vec{a}$ est parfois notée $\nabla \cdot \vec{a}$. Cela correspond à effectuer « un produit scalaire » entre l'opérateur gradient (aussi appelé 'del') dans le système de coordonnées choisi et du champ.

I.1.2 THEOREME D'OSTROGRADSKY (OU THEOREME DE LA DIVERGENCE)

Que se passe-t-il si le volume n'est pas infinitésimal ? Comment calculer le flux Φ à travers ce volume ? On peut découper ce volume en une infinité de volumes infinitésimaux $d\tau$. D'après le paragraphe précédent, les flux élémentaires à travers ces volumes valent :

$$d\Phi = \mathrm{d}iv\vec{a}d\tau$$

Mais les flux des faces communes à deux volumes élémentaires adjacents s'annulent deux à deux, puisque les normales sortantes sont opposées (cf. Figure 3). Seule l'enveloppe extérieure du volume aura un flux non nul. Quand on ajoute les contributions de chaque volume élémentaire $d\tau$, il ne reste donc que le flux à travers la surface fermée définissant le volume.

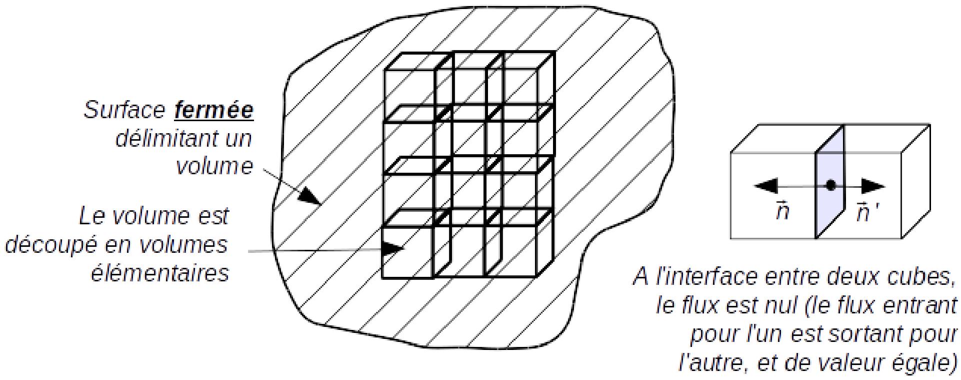


FIGURE 3 : DECOUPAGE D'UN VOLUME EN VOLUMES ELEMENTAIRES

On en déduit donc que **le flux à travers une surface fermée quelconque est égal à l'intégrale de la divergence sur le volume que définit cette surface.**

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi} = \iiint_{volume} \boldsymbol{d\Phi} = \iiint_{volume} \boldsymbol{div\vec{a}d\tau} = \oiint_{surface} \boldsymbol{\vec{a}.\overrightarrow{dS}}}$$

I.2 Operateur rotationnel

1.2.1 *Calcul d'une circulation le long d'une boucle elementaire*

Dans un repère cartésien (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$) construisons un contour élémentaire tétragonal (ABCD) à partir des vecteurs constitutifs du repère, et dont les branches sont de longueur dx pour les éléments orientés le long de $\overrightarrow{u_x}$ et dy pour les éléments orientés le long de $\overrightarrow{u_y}$ (voir Figure 4). On considère que le contour (ABCD) est orienté dans le sens A→B→C→D→A. $\vec{n}$ est la normale à la surface définie par ce contour fermé, orientée selon la règle du tire-bouchon (ici $\vec{n} = \overrightarrow{u_z}$). Plongeons ce contour dans un champ de vecteurs $\vec{a}$ dont on connaît la valeur au point M.

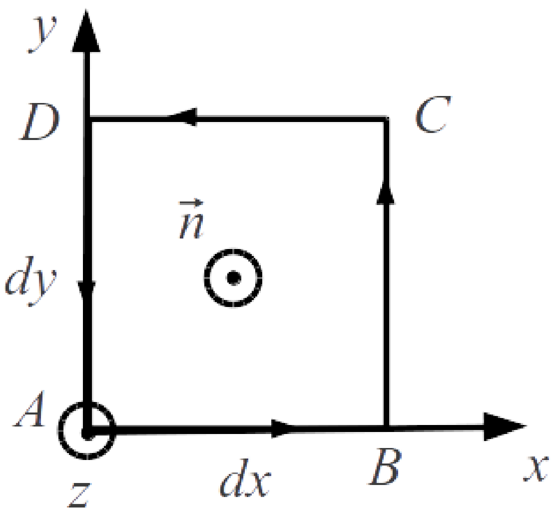


FIGURE 4 : CONTOUR ELEMENTAIRE UTILISE POUR FAIRE APPARAITRE LA DEFINITION DU ROTATIONNEL

La circulation élémentaire de ce champ de vecteur autour du contour (ABCD) dC_z s'écrit :

$$dC_z = dC_{AB} + dC_{BC} + dC_{CD} + dC_{DA}$$

Avec :

$$dC_{AB} = a_x(x,y,z)dx, \quad dC_{BC} = a_y(x+dx,y,z)dy,$$
$$\text{Et } dC_{CD} = -a_x(x,y+dy,z)dx, \quad dC_{DA} = -a_y(x,y,z)dy$$

D'où:

$$dC_z = a_x(x,y,z)dx - a_x(x,y+dy,z)dx + a_y(x+dx,y,z)dy - a_y(x,y,z)dy$$

Sachant que

$$a_x(x,y,z)dx - a_x(x,y+dy,z)dx \cong -\frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy$$

Et

$$a_y(x+dx,y,z)dy - a_y(x,y,z)dy \cong \frac{\partial a_y}{\partial x}dxdy$$

On a au final

$$dC_z \cong \frac{\partial a_y}{\partial x}dxdy - \frac{\partial a_x}{\partial y}dxdy$$

Ce qui s'écrit encore

$$dC_z \cong \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dS_z$$

1.2.2 DEFINITION DU ROTATIONNEL

Comme dans la section précédente, on peut calculer la circulation le long de contour élémentaire fermé et orienté dans les plans yOz et xOz (cf. figure 5)

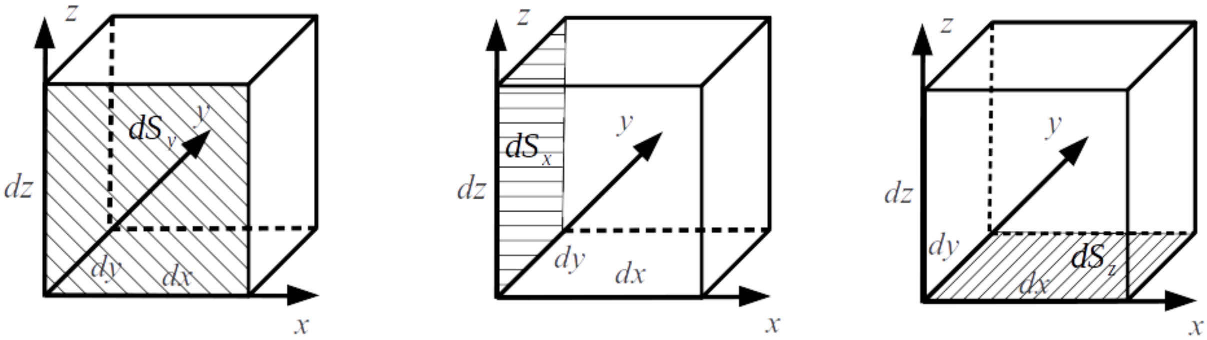


FIGURE 5: CALCUL DE LA CIRCULATION LE LONG DE TOUS LES CONTOURS ELEMENTAIRES POSSIBLES DANS UN REPERE CARTESIEN

On trouve ainsi

$$dC_x \cong \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)dS_x \text{ et } dC_y \cong \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)dS_y$$

Les composantes selon x, y et z du rotationnel du champ $\vec{a}$, noté $\overrightarrow{rot}\,(\vec{a})$, sont respectivement dC_x/dS_x, dC_y/dS_y et dC_z/dS_z.

Ainsi, en coordonnées cartésiennes,

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{u_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z}}$$

Et ainsi,
$dC_x = \overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{u_x}dS_x$, $dC_y = \overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{u_y}dS_y$, et $dC_z = \overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{u_z}dS_z$

Si on imagine maintenant un contour élémentaire quelconque, délimitant une surface élémentaire dS, laquelle se projette en surface élémentaires dS_x, dS_yet dS_z respectivement sur les plans (yOz), (xOz) et (xOy) (cf. Figure 6), on peut décomposer la circulation le long de ce contour en circulations élémentaires dans chacun de ces plans, et dC peut s'écrire :

$$dC = dC_x + dC_y + dC_z = \overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{dS}$$

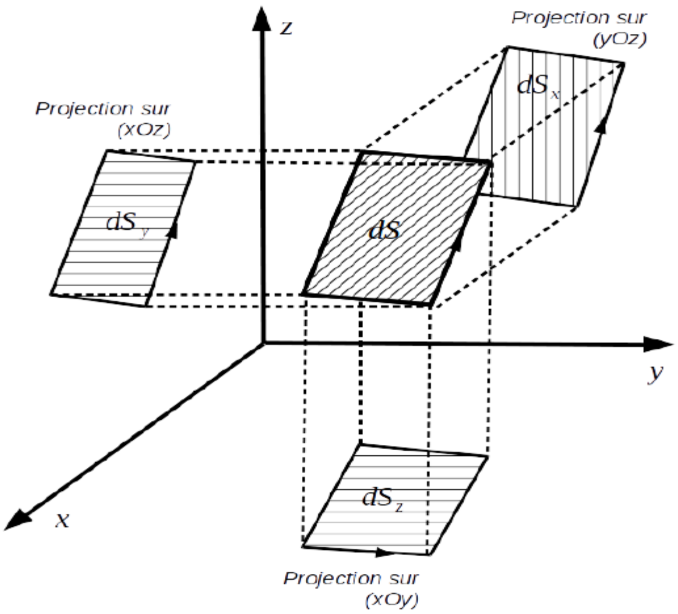
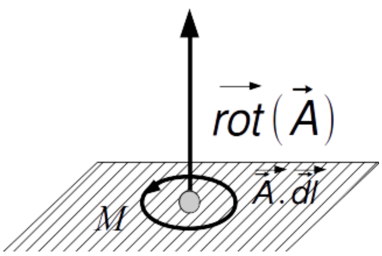


FIGURE 6: CIRCULATION LE LONG D'UN CONTOUR ELEMENTAIRE QUELCONQUE : C'ST LA SOMME DES CIRCULATIONS LE LONG DES CONTOURS PROJETES DANS LES PLANS XOY, XOZ ET YOZ

Le rotationnel en un point M est un vecteur perpendiculaire à la surface dS définie par le contour fermé élémentaire construit autour de M, dont la norme est la circulation par unité de surface le long de ce contour. L'orientation du rotationnel est obtenue en appliquant la règle du tire-bouchon au contour fermé.



Une démonstration très similaire permettrait de trouver l'expression du rotationnel,

en coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z})$ **:**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a_z}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{r a_\theta}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{a_r}}{\partial \boldsymbol{z}} - \frac{\partial \boldsymbol{a_z}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r a_\theta})}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \boldsymbol{a_r}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_\varphi}}$$

et en coordonnée sphériques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$ **:**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}^2\mathbf{sin}(\boldsymbol{\theta})}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r}\mathbf{sin}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{a_\varphi})}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial(\boldsymbol{r a_\theta})}{\partial \boldsymbol{\varphi}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}\mathbf{sin}(\boldsymbol{\theta})}\left(\frac{\partial \boldsymbol{a_r}}{\partial \boldsymbol{\varphi}} - \frac{\partial(\boldsymbol{r sin}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{a_\varphi})}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\partial(\boldsymbol{r a_\theta})}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \boldsymbol{a_r}}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{u_\varphi}}$$

Remarque : le rotationnel $\overrightarrow{rot}(\vec{a})$ d'un champ $\vec{a}$ est parfois notée $\nabla \times \vec{a}$. Cela correspond à effectuer « un produit vectoriel» entre l'opérateur gradient (aussi appelé 'del' ou 'nabla') dans le système de coordonnées choisi et le champ.

1.2.3 Theoreme de Stokes :

Cherchons maintenant la circulation d'un champ $\vec{a}$ le long d'un contour fermé quelconque, délimitant une surface S (cf. figure 7). On peut décomposer S en surfaces élémentaires dS définissant elles-mêmes des contours élémentaires.

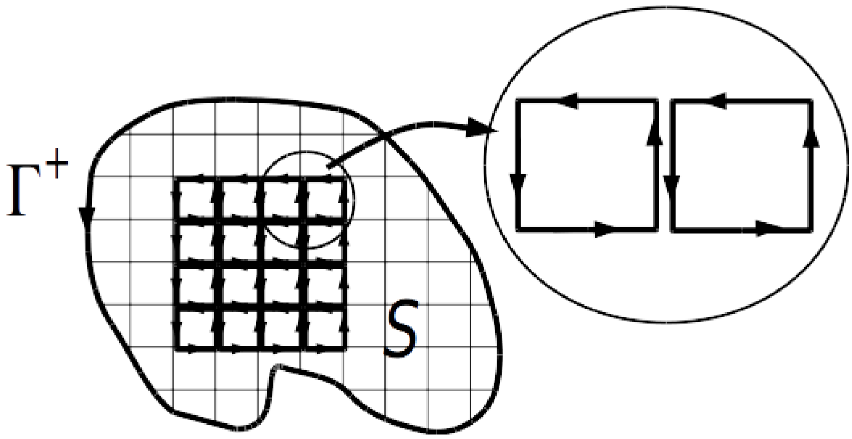


FIGURE 7: CIRCULATION LE LONG D'UN CONTOUR QUELCONQUE. ON PEUT DECOMPOSER LA SURFACE QUE DELIMITE CE CONTOUR EN SURFACE ELEMENTAIRE, QUI ELLES MEMES DEFINISSENT DES CONTOURS ELEMENTAIRES.

Nous pouvons calculer la somme des circulations le long de tous ces contours élémentaires :

Sur la branche commune à deux contours élémentaires, où la valeur du champ est identique pour les deux branches, le sens de circulation est opposé. Par conséquent, l'addition des deux contributions de circulation le long de cette branche commune aboutira à un résultat nul. Il en sera de même pour tout contour en contact avec un contour voisin. Seuls les branches sans voisin, c'est-à-dire les bords extérieurs de S, n'auront pas d'équivalent opposé et produiront une circulation non nulle.

Donc la somme des toutes les circulations élémentaires aboutit à la circulation le long du contour délimitant S. Or, d'après le paragraphe précédent, la circulation élémentaire sur un contour fermé infinitésimale de dimension infinitésimale est donnée par

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}).\overrightarrow{dS}$$

On aboutit ainsi naturellement au **Théorème de Stokes : la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour orienté fermé est égale au flux de son rotationnel à travers la surface définie par le contour fermé.**

$$\boxed{\oint_{\Gamma^+} \vec{\boldsymbol{a}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \iint_S \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{a}}).\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}}$$