武汉大学 2020-2021 学年第二学期期末考试

概率统计 B 答题卡

姓名 ____________ 学院 ____________

考生学号												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

注意事项	
	1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。 2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。 3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。 4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、(12 分) 设 A、B 为随机事件， $P(A)=a, P(A\cup B)=b$ 。

(1) 若 A 和 B 互不相容，求 $P(B)$；(2) 若 A 和 B 相互独立，求 $P(B)$ 。

二、(12 分) 甲袋中装有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中装有 2 个白球 3 个黑球。现随机地从甲袋中任取一球放入乙袋中，再随机地从乙袋中取出一球放回甲袋，最后再从甲袋中取出一球。

(1) 求最后一次从甲袋中取出的球是白球的概率；

(2) 如果最后一次从甲袋中取出的是白球，求第一次从甲袋中取出的也是白球的概率。

三、(12 分) 一半径为 1 的球内有一质点，质点在球内任意区域的概率与该区域的体积成正比。令 X 表示质点离球心的距离。

(1) 求 X 的密度函数；(2) 求 X 的期望和方差。

四、(16 分) 若随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$ 。

(1) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$； (2) 问 X 和 Y 是否独立？ (3) 求 $X+Y$ 的概率密度。

五、(12分）某产品的合格率0.9，试用中心极限定理求：

(1) 抽检400个产品，合格品超过350个的概率；

(2) 至少要抽检多少件产品，才能以99%可靠性保证抽检的产品中合格品率大于85%。（$\Phi(2.31)=0.99$）

六、(12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，

(1) 求常数 a_1,b_1,c_1,d_1（这里 $a_1b_1c_1\neq 0$），使 $Y=a_1X_1^2+b_1(2X_2-3X_3)^2+c_1(3X_4-2X_5-X_6)^2\sim\chi^2(d_1)$；

(2) 试确定 a_2,b_2,c_2,d_2,m,n，（$b_2c_2d_2\neq 0$），使得 $\dfrac{a_2\left(X_1^2+b_2(3X_2-X_3)^2\right)}{c_2(3X_4-X_5-X_6)^2+d_2(2X_7-3X_8)^2}\sim F(m,n)$。

七、(12分）已知 X 的概率密度为 $X\sim f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\theta^3}{2x^4} & |x|>\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本。试求参数 θ 的矩法估计量和最大似然估计量，并判别它们的无偏性。

八、(12分）机器包装食盐，假设每袋盐的净重服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，机器正常工作时，平均每袋重量 μ 为500克，标准差 σ 不超过10克。某天开工后，为检查机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，样本均值 $\bar{x}=508$ 克，样本标准差 $s=12$ 克。试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，这天包装机工作是否正常。

（$\Phi(1.96)=0.975, t_{0.025}(8)=2.306$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$）

武汉大学 2020-2021 学年第二学期期末考试

概率统计 B 答题卡

姓名 ________ 学院 ________

考	生	学	号								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

注意事项

1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（12 分）设 A、B 为随机事件，$P(A)=a, P(A\cup B)=b$。
（1）若 A 和 B 互不相容，求 $P(B)$；（2）若 A 和 B 相互独立，求 $P(B)$。

解：(1) 若 A.B互不相容，即 $A\cap B=\varphi$，此时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$

$\therefore P(B)=b-a$.

(2) 若 A.B独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\therefore b=a+P(B)-aP(B)$ $\quad \therefore P(B)=\dfrac{b-a}{1-a}$.

$b=a+(1-a)P(B)$

二、（12 分）甲袋中装有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中装有 2 个白球 3 个黑球。现随机地从甲袋中任取一球放入乙袋中，再随机地从乙袋中取出一球放回甲袋，最后再从甲袋中取出一球。

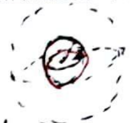
（1）求最后一次从甲袋中取出的球是白球的概率；

（2）如果最后一次从甲袋中取出的是白球，求第一次从甲袋中取出的也是白球的概率。

解：见参考答案，已给很详细了！

三、（12 分）一半径为 1 的球内有一质点，质点在球内任意区域的概率与该区域的体积成正比。令 X 表示质点离球心的距离。

（1）求 X 的密度函数；（2）求 X 的期望和方差。



解：(1) 先求 $F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3}=x^3, & 0<x<1 \text{ 时} \\ 0, & x\le 0 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

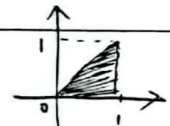
$\therefore F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^3, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ $\quad \therefore f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\frac{3}{5}$

$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$.

四、（16 分）若随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2 & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$.



（1）求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；（2）问 X 和 Y 是否独立？（3）求 $X+Y$ 的概率密度。

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 2dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $\quad$ 即 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 2dx=2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $\quad \therefore f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(2) $\because f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$ $\therefore X.Y$ 不独立

(3) 方法二(积分变换法)

$\iint_{R^2}h(x+y)\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^x h(x+y)\cdot 2dy\right]dx=\int_0^1\int_x^{2x}h(z)\cdot 2\,dx$

令 $x+y=z$，$dy=dz$，$y=0\leftrightarrow z=x$，$y=x\leftrightarrow z=2x$

交换积分次序

$S_1=\left\{(x,z)\,\middle|\,\begin{matrix}0<z<1\\ \frac{z}{2}<x<z\end{matrix}\right\}$，$S_2=\left\{(x,z)\,\middle|\,\begin{matrix}1<z<2\\ \frac{z}{2}<x<1\end{matrix}\right\}$

原式 $=\int_0^1\int_{\frac{z}{2}}^{z}h(z)\cdot 2dz+\int_1^2\int_{\frac{z}{2}}^{1}h(z)\cdot 2dz$

$=\int_0^1 h(z)\cdot z\,dz+\int_1^2 h(z)(2-z)dz$ $\quad \therefore f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

五、（12分）某产品的合格率0.9，试用中心极限定理求：

（1）抽检400个产品，合格品超过350个的概率；

（2）至少要抽检多少件产品，才能以99%可靠性保证抽检的产品中合格品率大于85%。（$\Phi(2.31)=0.99$）

解 (1) $n_A \sim B(400, 0.9)$，$n=400$, $p=0.9$

$P(n_A>350)=1-P(n_A\le 350)$

$=1-P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{350-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

$=1-P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le-\frac{5}{3}\right)$

$=1-\Phi(-\frac{5}{3})$

$=\Phi(\frac{5}{3})$

(2) 设需要抽检n件产品

$n_A \sim B(n,p)$，$p=0.9$

$P\left(\frac{n_A}{n}>85\%\right)\ge 0.99$

$P(n_A>0.85n)\ge 0.99$

$P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}>\frac{0.85n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right)\ge 0.99$

$P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}>-\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\ge 0.99$

$1-P\left(\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le-\frac{\sqrt{n}}{6}\right)\ge 0.99$

$1-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{6})\ge 0.99$

$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{6})\ge 0.99 \Rightarrow \Phi(\frac{\sqrt{n}}{6})\ge\Phi(2.31)$

$\frac{\sqrt{n}}{6}\ge 2.31$

$\Rightarrow n\ge 193.$

六、（12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，

（1）求常数 a_1,b_1,c_1,d_1（这里 $a_1b_1c_1\neq 0$），使 $Y=a_1X_1^2+b_1(2X_2-3X_3)^2+c_1(3X_4-2X_5-X_6)^2\sim\chi^2(d_1)$；

（2）试确定 a_2,b_2,c_2,d_2,m,n，（$b_2c_2d_2\neq 0$），使得 $\frac{a_2\left(X_1^2+b_2(3X_2-X_3)^2\right)}{c_2(3X_4-X_5-X_6)^2+d_2(2X_7-3X_8)^2}\sim F(m,n)$。

解 (1) $X_i\sim N(0,1)$

$E(2X_2-3X_3)=2E(X_2)-3E(X_3)=0$，

$D(2X_2-3X_3)\xrightarrow{独立}D(2X_2)+D(-3X_3)=4D(X_2)+9D(X_3)$

$=4+9=13$

$X_1\sim N(0,1)$

$2X_2-3X_3\sim N(0,13)\Rightarrow\frac{2X_2-X_3}{\sqrt{13}}\sim N(0,1)$

类似地 $3X_4-2X_5-X_6\sim N(0,14)$，$\frac{3X_4-2X_5-X_6}{\sqrt{14}}\sim N(0,1)$

$\therefore X_1^2+\left(\frac{2X_2-X_3}{\sqrt{13}}\right)^2+\left(\frac{3X_3-2X_5-X_6}{\sqrt{14}}\right)^2\sim\chi^2(3)$

$\therefore a_1=1$, $b_1=\frac{1}{13}$, $c_1=\frac{1}{14}$, $d_1=3$.

(2) $X_1\sim N(0,1)$，$3X_2-X_3\sim N(0,10)\Rightarrow\frac{3X_2-X_3}{\sqrt{10}}\sim N(0,1)$

$\therefore X_1^2+\left(\frac{3X_2-X_3}{\sqrt{10}}\right)^2=X_1^2+\frac{(3X_2-X_3)^2}{10}\sim\chi^2(2)$

类似地

$\frac{1}{11}(3X_4-X_5-X_6)^2+\frac{1}{13}(2X_7-3X_8)^2\sim\chi^2(2)$

$\therefore \begin{cases}a_2=1\\ b_2=\frac{1}{10}\\ c_2=\frac{1}{11}\\ d_2=\frac{1}{13}\end{cases}$ $m=2$, $n=2$

$\therefore \frac{\left(X_1^2+\frac{(3X_2-X_3)^2}{10}\right)/2}{\left(\frac{1}{11}(3X_4-X_5-X_6)^2+\frac{1}{13}(2X_7-3X_8)^2\right)/2}=\frac{X_1^2+\frac{(3X_2-X_3)^2}{10}}{\frac{1}{11}(3X_4-X_5-X_6)^2+\frac{1}{13}(2X_7-3X_8)^2}\sim F(2,2)$

七、（12分）已知 X 的概率密度为 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{3\theta^3}{2x^4} & |x|>\theta\\ 0 & 其他\end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本。试求参数 θ 的矩法估计量和最大似然估计量，并判别它们的无偏性。

解：先求θ的最大似然估计量：

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)\cdots f(x_n)$

$=\frac{3^n\cdot\theta^{3n}}{2^n(x_1\cdots x_n)^4}$，$|x_1|,\cdots,|x_n|>\theta$

$L(\theta)$ 对θ单调递增，即θ越大，$L(\theta)$ 取值越大，

θ最大值为 $\theta=\min\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$

$\therefore\hat\theta=\min\{|X_1|,\cdots,|X_n|\}$

先求 $|X|$ 的分布函数

$F_{|X|}(x)=P(|X|\le x)=P(-x\le X\le x)$

$=F_X(x)-F_X(-x)$，$x\ge 0$

$\therefore F_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ F_X(x)-F_X(-x), & x\ge 0\end{cases}$

$\therefore f_{|X|}(x)=F'_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ f_X(x)+f_X(-x), & x\ge 0\end{cases}$

$=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 2f_X(x), & x>\theta\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{3\theta^3}{x^4}, & x>\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\therefore F_{\hat\theta}(x)=1-\left(1-F_{|X|}(x)\right)^n$

课本126页(3.7.8)

$F_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ 1-\frac{\theta^3}{x^3}, & x>\theta\end{cases}$

$\therefore F_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ 1-\frac{\theta^{3n}}{x^{3n}}, & x>\theta\end{cases}$

$\therefore f_{\hat\theta}(x)=\begin{cases}3n\cdot\frac{\theta^{3n}}{x^{3n+1}}, & x>\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$E(\hat\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{\hat\theta}(x)dx$

$=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot 3n\cdot\frac{\theta^{3n}}{x^{3n+1}}dx$

$=\frac{3n}{3n-1}\theta\neq\theta$

∴极大似然估计不是无偏估计量

将 $|X|$ 看成一个新的随机变量，对其求估计

$E(|X|)=\frac{|X_1|+\cdots+|X_n|}{n}$，$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{|X|}(x)dx$

$=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot\frac{3\theta^3}{x^4}dx$

$=\frac{3}{2}\theta$

$\frac{3}{2}\theta=\frac{|X_1|+\cdots+|X_n|}{n}$

$\therefore\hat\theta=\frac{2}{3}\cdot\frac{|X_1|+\cdots+|X_n|}{n}$

$\because E(|X_i|)=E(|X|)=\frac{3}{2}\theta$

$\therefore E(\hat\theta)=E\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{|X_1|+\cdots+|X_n|}{n}\right)$

$=\frac{2}{3n}\left(E|X_1|+\cdots+E|X_n|\right)$

$=\theta$

∴矩估计量为无偏估计量

八、（12分）机器包装食盐，假设每袋盐的净重服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，机器正常工作时，平均每袋重量 μ 为500克，标准差 σ 不超过10克。某天开工后，为检查机器工作是否正常，从装好的食盐中随机抽取9袋，样本均值 $\bar x=508$ 克，样本标准差 $s=12$ 克。试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，这天包装机工作是否正常。

（$\Phi(1.96)=0.975$，$t_{0.025}(8)=2.306$，$\chi^2_{0.95}(8)=2.733$，$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$）

解：若机器正常工作，即 $\mu=500$，$\sigma\le 10$ 同时成立。

此题需检验 $\mu=500$ 和 $\sigma\le 10$ 是否同时成立。

先检验 μ，$H_0:\mu=500$，$H_1:\mu\neq 500$

检验统计量 $t=\frac{\bar X-500}{\frac{S}{\sqrt n}}$

拒绝域 $W=\{|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\{|t|>t_{0.025}(8)\}=\{|t|>2.306\}$

$\because |t|=\left|\frac{508-500}{\frac{12}{\sqrt9}}\right|=2<2.306$ 不在拒绝域中，故接受 H_0.

再检验 σ，$H_0:\sigma\le 10$，$H_1:\sigma>10$

统计量：$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{10^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域 $W=\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n-1)\}=\{\chi^2>\chi^2_{0.05}(8)\}=\{\chi^2>15.507\}$

$\because\chi^2=\frac{8\times 12^2}{10^2}=11.52<15.507$，不在拒绝域中，故接受 H_0.

综合 $\mu=500$，$\sigma\le 10$ 同时成立，即机器正常工作.