武汉大学 2017-2018 学年第一学期期末考试

· 概率统计 B 参考答案

一、（1） $\frac{1}{3}$；（2） $\frac{1}{2}$ 。

二、（1） $P=e^{-2}$；　（2） $1-(1-e^{-2})^{100}$ 。

三、（1） $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$ ；（2） $36(\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}\times 100+\frac{7}{12}\times 1)=521$ 万元。

四、（1） $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$； $f_Y(x)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$；独立；

（2） $f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-z} & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$。

五、（12 分）若某商品每周的需求量 X 服从区间 $[10,30]$ 的均匀分布，而进货量为此区间内的某一整数值；若每销售一单位商品可获利 500 元，而积压一单位则亏损 100 元，供不应求时可从外部调剂，此时一单位获利 300 元；试确定最小进货量，使得所获利润的期望不少于 9280 元。

解 由题意，需求量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{20}, & 10\le x\le 30 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$.

设进货量为 y，则利润

那么
$$L=L(X,y)=\begin{cases} 600X-100y & 10\le X\le y \\ 300X+200y & y\le X\le 30 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} E(L)&=\int_{-\infty}^{+\infty}L(x,y)f(x)dx \\ &=\frac{1}{20}(\int_{10}^{y}(600x-100y)dx+\int_{y}^{30}(300x+200y)dx) \\ &=-7.5y^2+350y+5250,\ \ y\in[10,30]. \end{aligned}$$

要使 $E(L)\ge 9280$ 时，则 $y\ge 21$. 故最小进货量为 21.

%%% 利润 L 是随机变量 X 的函数，也是一个随机变量，同时依赖于变量 y，但 y 不是随机变量. 最后的数字似乎并不好算，所以同学们一定要自己动手去算一算.

六、（1） $E(\overline{X})=0, D(\overline{X})=\frac{4}{n}, E(S^2)=4, D(S^2)=\frac{8}{n}$；（2） $k=\sqrt{n}$

七、

七、（16分）若总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & -\theta\le x\le\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本；（1）求$\theta^2$的矩估计，并判别是否无偏。（2）求$\theta$的极大似然估计，并判别是否无偏。（3）可否求$\theta$的一个无偏的矩估计。

解 (1)总体X的二阶矩

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\theta}^{\theta}x^2f(x)dx=\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}x^2dx=\frac{\theta^2}{3}.$$

令$\mu_2=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，既得$\theta^2$的矩估计量为

$$\hat{\theta}^2=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2.$$

由于

$$\begin{aligned}E(\hat{\theta}^2)&=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(D(X_i)+E^2(X_i)\right)\\&=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(D(X_i)+E^2(X_i)\right)=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{4\theta^2}{12}=\theta^2,\end{aligned}$$

故该会计无偏.

(2) 设样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则对应的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i}^{n}f(x_i,\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n},\ -\theta\le x_i\le\theta,\ i=1,2,\cdots,n.$$

$-\theta\le x_i\le\theta$即为$|x_i|\le\theta$. 要使$L(\theta)$最大, 则取θ的极大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots|x_n|\}.$$

故得θ的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\max\{|X_1|,|X_2|,\cdots|X_n|\}.$$

设$\hat{\theta}$的分布函数为$F_\theta(y)$，则当$y\le0$时，$F(y)=0$；当$y>0$时，有

$$\begin{aligned}F_\theta(y)&=P(\hat{\theta}\le y)=P(\max\{|X_1|,|X_2|,\cdots|X_n|\}\le y)\\&=P(|X_1|\le y,|X_2|\le y\cdots,|X_n|\le y)\\&=P(|X_1|\le y)P(|X_2|\le y)\cdots P(|X_n|\le y)\\&=\left(P(|X|\le y)\right)^n,\end{aligned}$$

这里

$$P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}f(y)dy=\begin{cases}\dfrac{y}{\theta},\ y\le\theta\\ 1,\quad y>\theta\end{cases}.$$

于是得$\hat{\theta}$的密度函数为

$$\begin{aligned}f_{\theta}(y)&=F_{\theta}'(y)=\frac{d}{dy}\left(P(|X|\le y)\right)^{n}\\&=n\left(P(|X|\le y)\right)\bullet\frac{d}{dy}P(|X|\le y)\\&=\begin{cases}n\left(\dfrac{y}{\theta}\right)^{n-1}\bullet\dfrac{1}{\theta},\ y\le\theta\\ \qquad 0,\quad y>\theta\end{cases}\\&=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^{n}},\qquad\qquad y\le\theta\\ 0,\quad y>\theta\text{ 或 }y\le 0\end{cases}.\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}E(\hat{\theta})&=\int_{-\infty}^{\infty}yf_{\theta}(y)dy\\&=\int_{0}^{\theta}y\frac{ny^{n-1}}{\theta^{n}}dy\\&=\frac{n\theta}{n+1}.\end{aligned}$$

故极大似然法得到的估计量$\hat{\theta}$不是无偏的.

%%%这个计算过程涉及最大值函数 max 的密度函数计算，并不容易做. 如果涉及的是最小值函数 min，则计算还要略微复杂一些. 所以希望大家要把每种题型的计算过程弄熟练，不能只是盯着看.

(3) 总体$|X|$的一阶矩为

$$E(|X|)=\int_{-\theta}^{\theta}|x|f(x)dx=\frac{\theta}{2}.$$

令$E|X|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$，既得$\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|,$$

这是的无偏估计量.

%%% 验证这里的估计量是无偏的.

八、（12 分）某种矿石，取 25 个样本测试，发现品位的平均值为32.5，样本方差为6.25。问：此矿品位是不是显著高于 30？　（$\alpha = 0.05$）（假设矿石品位近似服从正态分布）　已知：

$t_{0.95}(25) = 1.708, t_{0.95}(24) = 1.712, t_{0.975}(25) = 2.060, t_{0.975}(24) = 2.064$，

$u_{0.95} = 1.65, u_{0.975} = 1.96$

解　由题意，设检验假设为

$$H_0 : \mu = 30, H_1 : \mu > 30 \text{（写成} H_0 : \mu \le 30, H_1 : \mu > 30 \text{也可）}$$

取检验统计量为$t = \dfrac{\overline{X} - 30}{S/\sqrt{n}}$，则$t \sim t(n-1)$. 那么在显著性水平$\alpha = 0.05$及$n = 25$时的拒绝域为

$$t \ge t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(24) = 1.712 .$$

由 $\overline{x} = 32.5,\ s^2 = 6.25,$ 以及$n = 25$，得$t = 5 > 1.712$，故拒绝H_0，接受H_1，即认为此矿的品位显著高于 30.

%%%这是假设检验问题的标准写法,供参考.