

武汉大学 2020-2021 第一学期
概率统计 B 期终试题 (测绘 A)

一、(12 分) 若事件 A, B 满足: $P(A)=0.6, P(B)=0.5, P(\overline{A}\overline{B})=0.4$, (1) 事件 A, B 独立吗? (2) 求 $P(\overline{A}|\overline{B})$ 。

二、(12 分) 若甲乙两人约好在 10 点至 12 点之间在某地见面: (1) 求甲乙两人到达时间相差不超过半小时的概率? (2) 求甲比乙先到半小时以上的概率?

三、(12 分) 若随机变量 X 在区间 $(-2, 2)$ 服从均匀分布: (1) 求方程 $y^2 + 2Xy + 1 = 0$ 有实根的概率。(2) 若对 X 观测 5 次, Y 表示上方程有实根的次数, 写出它的概率分布。

四、(16 分) 若随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-2y} & 0 \leq x \leq 1, y \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; (a \text{ 为常数})$$

1、求随机变量 X 和 Y 的边沿概率密度 $f_x(x); f_y(y)$;

2、 X 和 Y 是否独立? 3、求 $Z = Y + X$ 的概率密度。

五、(12 分) 若有一批体积相同的箱子, 这些箱子的平均重量为 10 千克, 标准差为 2 千克, 问最多装多少箱能保证他们总重超过 5000 千克的概率小于 2.3%? ($\Phi(2.0) = 0.977$)

六、(12 分) 若 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 5)$ 是正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 1、求常数 a, b, c (这里 $abc \neq 0$), 使 $Y = a(X_1 - X_2)^2 + b(2X_3 - X_4 - X_5)^2 \sim \chi^2(c)$, 并求此时 Y 的期望和方差。2、若 $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n), Y_1 = X_1 - \overline{X}, Y_2 = X_2 - \overline{X}$, 求 Y_1, Y_2 的相关系数。

七、(12 分) 求总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\mu)} & x > \mu \\ 0 & x \leq \mu \end{cases}$, 求参数 λ, μ 的最大似然估计, 并判别他们是否为无偏估计。

八、(12 分) 从某矿区任意抽取 25 块矿石, 测得其平均含量为 64.5%, 标准差为 5%, 问: 该矿区的含矿量是否显著大于 62%? 假定矿石含量近似服从正态分布。
($\alpha = 0.05$) ($t_{0.05}(24) = 1.711, t_{0.05}(25) = 1.708, z_{0.05} = 1.65$)

12' ① $P(AB) = 0.2$ $P(A\bar{B}) = 0.6 - P(AB) = 0.4$ 不独立
 ② $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$

12' ① $p = \frac{2^2 - (\frac{2}{2})^2}{2^2} = \frac{7}{16}$ 或 0.4375 ② $p = \frac{9}{32}$ 或 0.28125

12' ① $p = \frac{1}{2}$ ② $P\{Y=k\} = \frac{1}{32} C_5^k, k=0,1,2,\dots,5$

16' ① $a=2$ $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, \\ 0, \end{cases}$

② X 与 Y 独立 ③ $f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-2z}, & 0 < z < 1 \\ (e^2 - 1)e^{-2z}, & z \geq 1 \end{cases}$

12' $n=49$

12' 1. $a = \frac{1}{20^2}$ $b = \frac{1}{60^2}$ $c=2, E(Y)=2, D(Y)=$

2. $p_{12} = -\frac{1}{n-1}$

12' $\hat{\lambda} = \bar{x} - \min\{x_i\}$ $\hat{\mu} = \min\{x_i\}$
 都不是无偏估计

12' $H_0: \mu = \mu_0 = 62\%$ $H_1: \mu > \mu_0, \alpha = 0.05$
 检验统计量 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{n}S}$

拒绝域 $t \geq t_{\alpha}(24) = 1.711$

$t = 2.5 > t_{\alpha}$, 拒 H_0 接 H_1 , 认为...