武汉大学 2019-2020 学年第一学期期末考试

概率统计 B（A 卷答题卡）

姓名 ________ 学院 ________

考生学号

[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

注意事项

1. 答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2. 解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（12 分）已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(A\mid B)=0.5$，求 $P(\overline{A\cup B})$ 和 $P(A\overline{B}\mid A\cup B)$。

解：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.5 \Rightarrow P(AB)=0.6\times0.5=0.3$

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-0.5-0.6+0.3=0.2$

$P(A\overline{B}|A\cup B)=\frac{P((A\overline{B})\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$=\frac{0.5-0.3}{0.5+0.6-0.3}=\frac{1}{4}.$

二、（12 分）一批外表完全一样的元件，来自甲乙丙三厂，各占比例为 5∶3∶2，已知他们各自的次品率分别为 0.02, 0.01, 0.03；从这批元件中任取一件；求 (1)它是次品的概率？ (2) 若它是次品，它来自甲乙丙三厂的概率各是多少？

解：(1) A: 取一产品为次品。 B_i: 取的产品来自第 i 个工厂.

$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A|B_i)=0.5\times0.02+0.03\times0.01+0.2\times0.03$

$=0.019$

(2) $P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.5\times0.02}{0.019}=\frac{10}{19}$

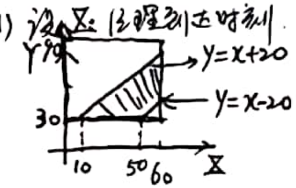
类似地 $P(B_2|A)=\frac{3}{19}$

$P(B_3|A)=\frac{6}{19}.$

三、（12 分）若公司经理每天上班的时间在 9 到 10 点的任意时刻，而秘书在 8:30 到 9:30 的任意时刻，以 A 记事件“两人到达时间相差不超过 20 分钟”。 （1）求 A 发生的概率。

(2) 平常的一周（5 天）中，求 A 恰好发生三次的概率。

解：(1) 设 X: 经理到达时刻　Y: 秘书到达时刻



$S_{阴}=\frac{1}{2}\times50^2-\frac{1}{2}\times10^2=1200$

$P(A)=\frac{S_{阴}}{S_{正}}=\frac{1200}{60\times60}=\frac{1}{3}.$

(2) Y: 5次中A发生三次数　$Y\sim B(5,\frac{1}{3})$

$P(Y=3)=C_5^3(\frac{1}{3})^3\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{40}{243}.$

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & x>0, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$．(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；并判别他们是否独立？ （2）求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

类似地 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\because f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$　$\therefore$ X, Y 独立

(2) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le z)$　当 $z\le0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D\frac{2}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$

$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le z, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

$dxdy=rdrd\theta,$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{z}\frac{2}{\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right]d\theta=1-e^{-\frac{z^2}{2}}$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\\ 0, & 其它\end{cases}$　$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

五、（12 分）某机器一天正常工作的概率为0.8，已知：正常时一台机器每天获利 8 万元，故障时每台机器亏损 2 万元。现有 100 台此机器：（1）求每天的平均利润，若希望平均利润达到 700 万元，试提出一个解决办法。（2）现有情况下，为保证一天的利润不低于 3000 万元的概率大于 0.977，问要增加工多少台机器？（已知 $\Phi(2.0)=0.977$）

解：设 X_i：第 i 台机器的利润.

X_i	8	-2
P	0.8	0.2

$\mu=E(X_i)=8\times0.8+(-2)\times0.2=6$

$E(X_i^2)=8^2\times0.8+(-2)^2\times0.2=52$

$\sigma^2=D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)=52-6^2=16.$

(1)

$E(X_1+\cdots+X_{100})$
$=E(X_1)+\cdots+E(X_{100})=100\times6=600$（万元）

若将正常工作概率提高到 0.9，则此时 $E(X_i)=7$，平均利润每天为 700万元.

(2) 设共需 n 台机器，则

$P(X_1+X_2+\cdots+X_n\geq3000)\geq0.977$

$P(X_1+\cdots+X_n<3000)\leq1-0.977$

$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}<\frac{3000-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\leq1-0.977$

$\Phi\left(\frac{3000-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)\leq\Phi(-2)$

$\frac{3000-6n}{4\sqrt{n}}\leq-2$

$\therefore n\geq531$

$\therefore$ 需增加 431 台机器.

六、（12 分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，（1）求常数 a,b,c,d（这里 $abc\neq0$），使 $Y=a(X_1-X_2)^2+b(2X_3-X_4-X_5)^2+c(3X_6-2X_7-X_8)^2\sim\chi^2(d)$；

（2）若 $Z=\sum_{i=1}^{8}(X_i-\mu)^2$，求 Z 的期望与方差。

解：(1) $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X_1,\cdots,X_8$ 相互独立

$\therefore E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=\mu-\mu=0$

$D(X_1-X_2)\overset{独立}{=}D(X_1)+D(-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2$

$\therefore X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$

类似地 $2X_3-X_4-X_5\sim N(0,6\sigma^2)$，$\frac{2X_3-X_4-X_5}{\sqrt{6}\sigma}\sim N(0,1)$

$3X_6-2X_7-X_8\sim N(0,14\sigma^2)$，$\frac{3X_6-2X_7-X_8}{\sqrt{14}\sigma}\sim N(0,1)$

$\therefore\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2+\left(\frac{2X_3-X_4-X_5}{\sqrt{6}\sigma}\right)^2+\left(\frac{3X_6-2X_7-X_8}{\sqrt{14}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(3)$

$\therefore a=\frac{1}{2\sigma^2}$，$b=\frac{1}{6\sigma^2}$，$c=\frac{1}{14\sigma^2}$，$d=3$

(2) $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ $\therefore\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{8}(X_i-\mu)^2=\frac{Z}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$

$\therefore E\left(\frac{Z}{\sigma^2}\right)=8\Rightarrow\frac{1}{\sigma^2}E(Z)=8\Rightarrow E(Z)=8\sigma^2$

$D\left(\frac{Z}{\sigma^2}\right)=2\times8=16\Rightarrow\frac{1}{\sigma^4}D(Z)=16\Rightarrow D(Z)=16\sigma^4.$

$\boxed{E(\chi^2(n))=n,\ D(\chi^2(n))=2n}$

七、（12 分）已知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\mu)} & x>\mu\\ 0 & x\leq\mu\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是样本，试求参数 μ,λ 的最大似然估计，并判别是否无偏。

解 此题与 2020~2021 年第七题一样，答已上传.

八、（12 分）某作物的产量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现发现新的种子，取 25 块样田做实验，发现平均亩产为 1864 公斤，样本标准差为 50 公斤；问：此新种子的亩产量是不是显著大于 1800 公斤？（$\alpha=0.05$）已知：$u_{0.05}=1.65,u_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(25)=1.708,t_{0.05}(24)=1.712,t_{0.025}(25)=2.060,t_{0.025}(24)=2.064$

解：H_0：$\mu=1800$　　H_1：$\mu>1800$

统计量 $t=\frac{\bar{X}-1800}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

拒绝域 $W=\{t>t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(24)=1.712\}$

$\because t=\frac{1864-1800}{\frac{50}{\sqrt{25}}}=6.4>1.712$ 在拒绝域中，

$\therefore$ 拒绝 H_0，接受 H_1，即显著大于 1800公斤.