武汉大学 2020-2021 学年第一学期期末考试

概率统计 B（A 卷答题卡）

姓名：________________

班级：________________

考生学号

缺考填涂：☐

注意事项

1. 答题前，考生先将自己的姓名、班级填写清楚，并填涂相应的学号信息点。
2. 解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题；字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（12 分）若事件 A,B 满足：$P(A)=0.6, P(B)=0.5, P(A\bar{B})=0.2$，（1）事件 A,B 至少发生一个的概率？（2）求 $P(\bar{A}\mid\bar{B})$。

解：(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\because P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.2 \Rightarrow P(AB)=0.6-0.2=0.4$

$\therefore P(A\cup B)=0.6+0.5-0.4=0.7$

(2) $P(\bar{A}\mid\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\dfrac{1-0.7}{1-0.5}=\dfrac{3}{5}$

二、（12 分）假设在数字通信中传送信号 0 与 1 的概率为0.8和0.2；由于随机干扰，当传送信号 0 时接收到信号 0 的概率为0.8，当传送信号 1 时接收到信号 1 的概率为0.9；求 (1) 接收到信号 0 的概率？ (2) 当接收到信号 0 时传送的信号是 0 的概率？

解：B_1：传送信号0，　B_2：传送信号1．　A：接收信号0

(1) $P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)$

$\because P(B_1)=0.8$，$P(B_2)=0.2$，$P(A\mid B_1)=0.8$，$P(\bar{A}\mid B_2)=0.9 \Rightarrow P(A\mid B_2)=0.1$

$\therefore P(A)=0.8\times0.8+0.2\times0.1=0.66$

(2) $P(B_1\mid A)=\dfrac{P(B_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.8\times0.8}{0.66}=\dfrac{64}{66}=\dfrac{32}{33}$.

三、（12 分）若随机变量 X 在区间 $(-1,3)$ 服从均匀分布：（1）求方程 $y^2+2Xy+1=0$ 有实根的概率。（2）若对 X 观测 4 次，Y 表示上方程有实根的次数，写出它的概率分布。

解：(1) $P(\text{方程有实根})=P(\Delta\ge0)=P((2X)^2-4\times1\times1\ge0)=P(|X|\ge1)$

$=P(1\le X\le3)=\dfrac{3-1}{3-(-1)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $Y\sim B(4,\frac{1}{2})$

$P(Y=k)=C_4^k\cdot(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{4-k}=C_4^k\cdot\frac{1}{16}$，$k=0,1,2,3,4$.

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le y, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$.

(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_X(x); f_Y(y)$：并判别他们是否独立？

（2）求 $Z=Y-X$ 的概率密度。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy, & x\ge0\\ 0, & x<0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^y e^{-y}dx, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$\because f_X(x)\,f_Y(y)\ne f(x,y)$　$\therefore X,Y$ 不独立

(2) 方法一：先求 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(Y-X\le z)=P((X,Y)\in$ [阴影区域，$y=x+z$] $)$

当 $z\le0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\iint f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}\left[\int_x^{x+z}e^{-y}dy\right]dx$

$=\int_0^{+\infty}(1-e^{-z})e^{-x}dx=1-e^{-z}$

[阴影区域] $=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}0<x<+\infty\\ x\le y\le x+z\end{matrix}\right\}$

$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le0\end{cases}$

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,

此题也可用积分转换法

或用教材116页公式.

五、（12 分）若 X 是某种商品的销售量，其概率密度为 $f(x)=\frac{1}{100}, x\in(0,100)$，已知每销售一单位获利 500 元，若供大于求，则没卖出去的处理后每单位亏损 100 元；若供不应求则可临时调剂，此时每单位可获利 300 元；试确定进货量，使商店平均获利最大？

解：设需进货 y 个单位，则利润为

$$g(X)=\begin{cases}500X-100(y-X), & 0\le X\le y\\ 500y+300(X-y) & y<X\le 100\end{cases}$$

$$=\begin{cases}600X-100y, & 0\le X\le y\\ 300X+200y, & y<X\le 100\end{cases}$$

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{100} g(x)\cdot\frac{1}{100}\,dx$$

$$=\int_0^{y}(600x-100y)\cdot\frac{1}{100}\,dx+\int_y^{100}(300x+100y)\cdot\frac{1}{100}\,dx$$

$$=-\frac{3}{2}y^2+200y+1500$$

∴ 当 $y=\frac{200}{3}$ 时，上式取最大值

∴ 进货量为 $\frac{200}{3}$ 个单位.

六、（12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是正态总体 $N(0,4)$ 的样本，（1）求常数 a,b,c,n（这里 $abc\neq 0$），使 $Y=aX_1^2+b(2X_2-X_3)^2+c(3X_4-2X_5-X_6)^2\sim\chi^2(n)$；（2）问 $\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}$ 服从什么分布（说明理由）？

解：(1) $X_i\sim N(0,4)\xRightarrow{P_{75}(2.4.3)}\frac{X_i-0}{2}\sim N(0,1)$ ∴ $\frac{X_1}{2}\sim N(0,1)$

$2X_2-X_3\sim N(0,20)\ \xRightarrow[\text{与}X\text{同分布}]{P_{75}(2.4.3)}\ \frac{2X_2-X_3-0}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$

（∵ $E(2X_2-X_3)=2E(X_2)-E(X_3)=2E(X)-E(X)=0$

$D(2X_2-X_3)\overset{\text{独立}}{=\!=}D(2X_2)+D(-X_3)=4D(X_2)+D(X_3)=4D(X)+D(X)=4\times4+4=20$）

类似地，$3X_4-2X_5-X_6\sim N(0,56)\Rightarrow\frac{3X_4-2X_5-X_6}{\sqrt{20}}\sim N(0,1)$

∴ $\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\left(\frac{2X_2-X_3}{\sqrt{20}}\right)^2+\left(\frac{3X_4-2X_5-X_6}{\sqrt{20}}\right)^2\sim\chi^2(3)$

∴ $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{20}$，$c=\frac{1}{56}$. $n=3$

(2) $X_1+X_2+X_3\sim N(0,12)\Rightarrow\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{12}}\sim N(0,1)$

$X_5-X_6\sim N(0,8)\Rightarrow\frac{X_5-X_6}{\sqrt{8}}\sim N(0,1)\Rightarrow\left(\frac{X_5-X_6}{\sqrt{8}}\right)^2\sim\chi^2(1)$，且两者独立.

∴ $\dfrac{\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{12}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{X_5-X_6}{\sqrt{8}}\right)^2}{1}}}\sim t(1)$ 即 $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}\sim t(1)$.

七、（12 分）求总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\mu)} & x>\mu\\ 0 & x\le\mu\end{cases}$，求参数 λ,μ 的最大似然估计，并判别他们是否为无偏估计。

解：$L(\lambda,\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$

$=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}(x_1+\cdots+x_n-n\mu)}$，$x_1,\cdots,x_n>\mu$

$\ln L(\lambda,\mu)=-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}(x_1+\cdots+x_n-n\mu)$

$\frac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=0\Rightarrow -n\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}(x_1+\cdots+x_n-n\mu)=0$

$\Rightarrow\lambda=\bar{x}-\mu$ (∗)

$\frac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=\frac{n}{\lambda}>0$，即关于 μ 单调递增，

故 μ 需取最大值

又 ∵ $x_1,x_2,\cdots,x_n\ge\mu$ ∴ μ 最大值为 $\min\{x_1,\cdots,x_n\}$

故 μ 之最大似然估计值 $\hat{\mu}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

由(∗)知 $\hat{\lambda}=\bar{X}-\hat{\mu}=\bar{X}-\min\{X_1,\cdots,X_n\}$

λ 之最大似然估计值

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_{\mu}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\mu)}\,dx$

$=\int_{\mu}^{+\infty}-x\,d e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}=-xe^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}\Big|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}dx$

$=\mu+\int_{\mu}^{+\infty}e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}dx=\mu+\lambda$

由教材 126页 (3.7.8) 知，$\hat{\mu}$ 之分布函数 $F_{\hat{\mu}}(x)=1-(1-F_X(x))^n$

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}1-e^{-\frac{x-\mu}{\lambda}}, & x\ge\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$

∴ $F_{\hat{\mu}}(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}, & x\ge\mu\\ 0, & x<\mu\end{cases}$，∴ $f_{\hat{\mu}}(x)=F_{\hat{\mu}}'(x)=\begin{cases}\frac{n}{\lambda}e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}, & x>\mu\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

∴ $E(\hat{\mu})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\mu}}(x)\,dx=\int_{\mu}^{+\infty}x\frac{n}{\lambda}e^{-\frac{n(x-\mu)}{\lambda}}dx=\mu+\frac{\lambda}{n}\neq\mu$

$E(\hat{\lambda})=E(\bar{X}-\hat{\mu})=E(\bar{X})-E(\hat{\mu})$

$=E(X)-E(\hat{\mu})=\mu+\lambda-(\mu+\frac{\lambda}{n})$

$=\frac{n-1}{n}\lambda$

∴ $\hat{\mu}$ 与 $\hat{\lambda}$ 都不是无偏估计

八、（12 分）某班有 25 个同学，某次测验平均分数为 81.5，标准差为 5，问：该次测验的分数是否显著大于 80？假定分数近似服从正态分布。（$\alpha=0.05$）

（$t_{0.05}(24)=1.711, t_{0.05}(25)=1.708, z_{0.05}=1.65$）

解：H_0：$\mu=80$ H_1：$\mu>80$

检验统计量 $t=\frac{\bar{X}-80}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域 $W=\left\{\frac{\bar{x}-80}{S/\sqrt{n}}>t_\alpha(n-1)\right\}=\left\{\frac{\bar{x}-80}{S/\sqrt{n}}>1.711\right\}$

∵ $t=\frac{81.5-80}{5/\sqrt{25}}=1.5<1.711$ 不在拒绝域中

∴ 接受 H_0，即不能认为显著大于80.

拒绝 H_1