武汉大学 2014-2015 第一学期

概率统计 B 期终试题

（54 学时 A）

学院____________________专业______________学号____________姓名________________

一、(12 分）甲、乙两个棋迷意外得到 900 元，他们以下棋来决定这笔钱的归属：先赢三盘的人拿走全部的钱；下完三盘后意外中止，此时甲二胜一负，乙说：你拿 600，我拿 300；如果这是他们两个人的真实水平。问：这个分法合理吗？说明理由，你可不可以给出一个更合理的分配方案？

二、(12 分） 一批产品 10 件，其中 2 件不合格，现从中任取 2 件，若合格，便认为这批产品合格。(1）求这批产品合格的概率？

（2）若检验方法将合格品认为合格的概率为0.9，将不合格品认为合格的概率为0.2，那么在这个方法下，求这批产品合格的概率？

三、(12 分）若随机变量X在区间$(0,8)$服从均匀分布；(1）求方程$y^2+2y+X=0$有实根的概率。(2）若对随机变量X进行 4 次独立观察，记Y为上方程有解的次数，求Y的数学期望和方差。

四、(16 分）若随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} & x>0,y>(\\ 0 & 其他 \end{cases};$$

⑴求随机变量X和Y的边沿概率密度$f_x(x);f_y(y)$；(2）求$Z=X-Y$的概率密度。

五、(12 分）将 1、2、3、4 这四个数平均分为两组，记X,Y分别为这两组数的差的绝对值，

（1）求(X,Y)的联合概率分布；(2）求这两个随机变量的相关系数。

六、(12分）若$X_1,X_2,\cdots,X_{16}$是总体$N(0,4)$的样本，

（1）求$X=X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_{16}{}^2$的数学期望和方差。

（2）确定a，使得$t=a\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5{}^2+X_6{}^2+\cdots+X_{16}{}^2}}$服从$t(k)$分布，并求$k$。

七、(12分）若总体X的概率密度为$f(x)=\dfrac{2x}{\theta^2},x\in(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，分别求$\theta$的矩估计和极大似然估计，并判别他们是否无偏。

八、（12分）若总体X服从正态分布$N(\mu,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，

（1）若想要μ的0.95的置信区间长度小于0.5，样本容量n至少要多大？

（2）若某次取样，$n=25,\overline{X}=76.5$，可否认为μ显著大于76？（$\alpha=0.05$）

（$z_{0.05}=1.65,z_{0.025}=1.96$）

武汉大学 2014-2015 第一学期

概率统计 B 期终试题参考答案

（36 学时 A）

一、（12 分）解　记 $A=\{$乙获胜$\}$，由题意

$$P(A)=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}，\therefore \quad P(\overline{A})=\frac{8}{9}$$

故 分法不合适，正确的分法应是：甲分 800 元，乙分 100 元。

二、（12 分）解　记 $A=\{$产品合格$\}$，$B_i=\{$抽出 i 件不合格品$\}$，$i=0,1,2;$

（1）$P(A)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}\approx 0.62$，

（2）

$$P(A)=P(AB_0)P(B_0)+P(AB_1)P(B_1)+P(AB_2)P(B_2)=0.9^2\frac{56}{90}+0.9*0.2\frac{32}{90}+0.2^2\frac{2}{90}$$

$$=\frac{128}{225}\approx 0.57$$

三、（12 分）解　（1）$P=P\{\Delta=4-4X\geq 0\}=\dfrac{1}{8}$

（2）$Y\sim B(4,\dfrac{1}{8})$，所以 $E(Y)=\dfrac{1}{2},D(Y)=\dfrac{7}{16}$

四、（16 分）解　（1）

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

（2）$f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{z} & z\leq 0\\ \dfrac{1}{2}e^{-z} & z>0\end{cases}$

五、（12 分）解　（1）

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$
2		$\frac{1}{3}$	
3	$\frac{1}{6}$		

(2)

$$E(X)=\frac{5}{3},E(X^2)=\frac{10}{3},D(X)=\frac{5}{9},E(XY)=\frac{8}{3}$$

$$COV(X,Y)=-\frac{1}{9},\therefore \rho_{XY}=-\frac{1}{5}$$

六、（12分）解　(1)显然 $\frac{X_i}{2} \sim N(0,1), \frac{X}{4} \sim \chi^2$ (

$\therefore \quad E(X)=64, D(X)=$ [illegible]。

（2）$a=\sqrt{3},k=12$ 。

七、（12分）解　矩估计　$\theta=\frac{3}{2}\overline{X},E(\theta)=\theta$，所以，矩估计无偏；

极大似然估计　$\theta=Max\{X_1,X_2,\cdots X_n\},E(\theta)=\frac{2n}{2n+1}\theta$，所以，极大似然估计不是无偏。

八、（12分）

解　（1）μ 的0.95的置信区间为 $(\overline{X}\pm\frac{1}{\sqrt{n}}z_{0.025})$，其长度为 $\frac{2}{\sqrt{n}}z_{0.025}$，由题意

$\frac{2}{\sqrt{n}}z_{0.025}\le 0.5$，$\therefore \quad n\ge 62$ 。

（2）$H_0:\mu=76,H_1:\mu>76$

这里，$n=25,\overline{X}=76.5$，$\alpha=0.05$，查表，$z_{0.05}=1.65$,

检验统计量 $U=\frac{\overline{X}-76}{1}\sqrt{n}$，拒绝域为　$U\ge z_{0.05}=1.65$

计算：$U=2.5$，落在拒绝域，所以 拒绝 H_0，接受 H_1，认为 μ 显著大于76。