武汉大学 ~~2011-2012~~ 2012-2013 学年第二学期期末考试

概率论与数理统计 B（A 卷答题卡）

姓名		班级		考生学号

填涂样例：正确填涂 ▬；错误填涂 [✓][✗][—][●]

注意事项：
1.答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2.解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3.请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4.保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（14 分）某系有三个班，1 班有 24 位同学，其中 12 人是特长生；2 班有 20 位同学，其中 8 人是特长生；3 班有 26 位同学，其中 8 人是特长生；现从此 70 个同学中任找一个同学：（1）求他是特长生的概率？（2）若他是特长生，求他来自 1 班的概率？

（3）若每班任找一人组成三人队参加数模竞赛，求此队的三人全是特长生的概率？

解：设 A_k 表示某人来自 k 班 $(k=1,2,3)$，B 表示此人是特长生

(1) $P(B)=\frac{12+8+8}{70}=\frac{14}{35}$

(2) $P(A_1|B)=\frac{12}{12+8+8}=\frac{3}{7}$

(3) $P=\frac{12\times8\times8}{24\times20\times26}=\frac{4}{65}$

二、（12 分）某真菌的寿命（单位：小时）在区间（0,5）服从均匀分布；

（1）求其寿命大于 3 小时的概率？（2）观测 3 个此类真菌，求恰有 2 个寿命大于 3 小时的概率？

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 0\le x\le5\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) $P\{X>3\}=\frac{2}{5}$

(2) $Y\sim B(3,\frac{2}{5})$

$P\{Y=2\}=C_3^2(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^1=\frac{36}{125}$

鸠鸠原创，版权所有

三、（14 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k & x^2+y^2\le1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad；k 为常数。$$

(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿概率密度 $f_x(x);f_y(y)$；(2) X 和 Y 是否独立 ？（3）求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度。

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}k\,dy, & -1\le x\le1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2k\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}k\,dx, & -1\le y\le1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}2k\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le1\\ 0, & 其他\end{cases}$

(2) $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4k^2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}, & -1\le x\le1,-1\le y\le1\\ 0, & 其他\end{cases}\ne f(x,y)$ X 和 Y 不独立

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h[g(x,y)]f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}h(\sqrt{x^2+y^2})\,k\,dx\right]dy$

$\underline{令 x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}$ $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 h(r)k\,r\,dr=\int_0^1 h(z)\,2\pi k z\,dz$

$f_Z(z)=\begin{cases}2\pi k z, & 0\le z\le1\\ 0, & 其他\end{cases}$

四、（12 分）设 A,B 为随机事件，$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$，设 X,Y 分别表示一次实验中 A,B 发生的次数。求：（1）二维随机变量（X,Y）的联合概率分布。　（2）X,Y 的相关系数 ρ。

解：(1) $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$　$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A+B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))=\frac{2}{3}$

$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$

$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) $E(X)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{4}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$D(X)=\frac{1}{4}-(\frac{1}{4})^2=\frac{3}{16}$

$E(Y)=0\times\frac{5}{6}+1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$E(Y^2)=0^2\times\frac{5}{6}+1^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$D(Y)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{6})^2=\frac{5}{36}$

$E(XY)=0\times\frac{11}{12}+1\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{24}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$

欢迎关注微信公众号 iShareWHU

五、（12 分）若一批种子的发芽率为0.8，分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计这样的种子 10000 粒发芽数在 7800——8200 之间的概率。（标准正态分布的分布函数用$\Phi(x)$表示）

解：设发芽数为X，则 $X\sim B(10000,\ 0.8)$

$E(X)=10000\times 0.8=8000 \quad D(X)=10000\times 0.8\times 0.2=1600$

(1) 用切比雪夫不等式估计

$P\{7800<X<8200\}=P\{|X-8000|<200\}\geq 1-\frac{1600}{200^2}=\frac{24}{25}$

(2) 用中心极限定理估计

$P\{7800<X<8200\}=P\{\frac{7800-8000}{40}<\frac{X-8000}{40}<\frac{8200-8000}{40}\}$

$\approx \phi(5)-\phi(-5)=2\phi(5)-1$

六、（12 分）若 $X_1\cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(m,\overset{\sigma^2}{\cancel{s^2}})$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本方差。(1) 求S^2的期望和方差。(2) 选取常数a,b，使得$t=a\frac{\overline{X}-b}{S}$服从$t(n-1)$分布。

解：(1) $E(S^2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{x})^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{x}^2\right)$

$=\frac{n}{n-1}\left(E(X^2)-E(\bar{x}^2)\right)=\frac{n}{n-1}\left(D(X)+E^2(X)-D(\bar{x})-E^2(\bar{x})\right)$

$=\frac{n}{n-1}\left(\sigma^2+m^2-\frac{\sigma^2}{n}-m^2\right)=\sigma^2$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi(n-1) \quad E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=n-1 \quad D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=2n-2$

$E\left(\frac{(n-1)^2S^4}{\sigma^4}\right)=D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)+E^2\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=n^2-1$

$D(S^2)=E(S^4)-E^2(S^2)=\frac{n^2-1}{(n-1)^2}\sigma^4-\sigma^4=\frac{2}{n-1}\sigma^4$

(2) $\bar{x}\sim N(m,\frac{\sigma^2}{n})$

$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-m}{S}\sim t(n-1)$

$a=\sqrt{n},\ b=m$

七、（12 分）若总体在区间$(1,q)$服从均匀分布，$X_1\cdots X_n$ 是其样本，

（1）求q的矩估计和极大似然估计。（2）判别他们的无偏性。并将不是无偏估计的估计化为无偏估计。

解：(1) ① 矩估计

$\because X\sim U(1,q) \quad \therefore E(X)=\frac{1+q}{2}=\bar{x} \quad \therefore \hat{q}_1=2\bar{x}-1$

② 极大似然估计

$\because f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q-1}, & 1<x<q\\ 0, & 其他\end{cases} \quad \therefore L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{(q-1)^n}, & 1<x_i<q\ (i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\because L(\theta)=\frac{1}{(q-1)^n}\ (q>1)$ 是减函数 $\therefore \hat{q}_2=X_{(n)}$

(2) ① 矩估计

$E(\hat{q}_1)=E(2\bar{x}-1)=2E(\bar{x})-1=2E(X)-1=q$ 无偏

② 极大似然估计

$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1\\ \frac{x-1}{q-1}, & 1<x<q\\ 1, & x\geq 1\end{cases} \quad F_{X_{(n)}}(x)=F^n(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1\\ \left(\frac{x-1}{q-1}\right)^n, & 1<x<q\\ 1, & x\geq 1\end{cases}$

$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\frac{n(x-1)^{n-1}}{(q-1)^n}, & 1<x<q\\ 0, & 其他\end{cases}$

$E(\hat{q}_2)=E(X_{(n)})=\int_1^q x\frac{n(x-1)^{n-1}}{(q-1)^n}dx=\frac{n}{(q-1)^n}\int_1^q\left((x-1)^n+(x-1)^{n-1}\right)d(x-1)$

$=\frac{n}{(q-1)^n}\left[\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}+\frac{1}{n}(x-1)^n\right]\Big|_1^q=\frac{nq+1}{n+1}$ 渐近无偏

令 $\hat{q}_3=\frac{(n+1)\hat{q}_2-1}{n}$，则 $E(\hat{q}_3)=\frac{(n+1)E(\hat{q}_2)-1}{n}=q$

八、（12 分）据报道：12 月 7 日，全球有感地震 18 次，其中 6 级以上 2 次，某专家说：全球每年发生 6 级以上地震大约 250 次，标准差约为 60 次，最近 9 年，测得 6 级以上地震年平均约 274.0 次，问：可否认为近年地球的 6 级以上地震次数有大幅增加？（$\alpha=0.05$）（假设地震次数近似服从正态分布$N(m,s^2)$，数据为计算方便有改动）

已知：$\Phi(1.65)=0.95, \Phi(1.96)=0.975$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数。

解：本题为正态总体在s^2已知情形下，关于m的单侧检验问题

作检验假设 $H_0: m=m_0=250$；$H_1: m>m_0$

当原假设成立时，选取检验统计量 $U=\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-m_0)}{S}\sim N(0,1)$

对显著性水平 $\alpha=0.05$，$u_{1-\alpha}=u_{0.95}=1.65$

从而 H_0 的拒绝域为 $W=\{u>1.65\}$

由 $n=9,\ \bar{x}=274,\ s=60,\ m_0=250$

得知统计量的观察值为 $u=\frac{\sqrt{9}(274-250)}{60}=1.2$

可见 $u\notin W$，故接受H_0。

即可认为近年地球的6级以上地震次数没有大幅增加