武汉大学 2023-2024 第一学期

概率统计 B 期终试题（A 卷）参考答案

一、填空题（每空 5 分，共 40 分）

1.0.3；2、$\dfrac{P_6^5}{6^5}$3.、0.6；4、0.99；5、132；6、$\dfrac{5}{13}$；7、$304\sigma^4$，$\dfrac{9}{2}$

二、计算与应用题（每题 12 分，共 60 分）

1、设有来自三个地区的各 10、15、25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3、7、5 份，随机取一个地区的报名表，从中先后抽出两份。（1）先抽到的是女生表的概率；（2）已知后抽到的是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率。

解：设 $H_i=$ {报名表是第 i 区考生的}，$i=1,2,3$；$A_j=$ {第 j 次抽到男生}，$j=1,2$。则

（1）$P(\overline{A_1})=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}\mid H_i)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{25})=\dfrac{29}{90}$

（2）$P(A_2)=\dfrac{61}{90},P(\overline{A_1}A_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A}_1A_2\mid H_i)=\dfrac{2}{9}$

$\therefore \quad P(\overline{A_1}\mid A_2)=\dfrac{20}{61}$

2、若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y & 1\ge x>0,1\ge y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

⑴求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x);f_y(y)$；并判别他们是否独立？（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：（1）$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-x & 0<x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-y & 0<y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$；显然不独立。

（2）$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2 & 0<z<1\\ (2-z)^2 & 1\le z<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

3、若某商品每周的需求量 X 服从区间 $[10,30]$ 的均匀分布，而进货量为此区间内的某一整数值；若每销售一单位商品可获利 500 元，而积压一单位则亏损 100 元，供不应求时可从外部调剂，此时一单位获利 300 元；（1）试确定最小进货量，使得所获利润的期望不少于 9280 元。（2）进货多少时，获利期望最大？

解：设进货量为一，则

$$L(y)=\begin{cases}600x-100y & 10\le x\le y\\ 300x+200y & y<x\le 30\end{cases}$$

$$E(L(y)) = -7.5y^2 + 350y + 5250$$

（1） 解不等式：$E(L(y)) = -7.5y^2 + 350y + 5250 \geq 9280$，得：$20.7 \leq x \leq 26, \therefore x = 21$

（2） 令 $\frac{d}{dy}E(L(y)) = -15y + 350 = 0, \therefore x = 23$

4、已知随机变量 X 在区间 $(0,\theta)$ 服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是样本，试求参数 θ 的矩估计和最大似然估计，并判别是否无偏。

解：矩估计为：$\hat{\theta} = 2\overline{X}$，$E(\hat{\theta}) = 2E(\overline{X}) = \theta$；所以是无偏估计。

极大似然估计为：$\hat{\theta} = Max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，数学期望为：$\frac{n}{n+1}\theta$，不是无偏估计。

5、若某校学生成绩近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现抽取 25 个学生测验，得平均成绩为 86.4 分，标准差为 5.0 分；问：可否认为此校学生平均成绩在 85 分左右？ （$\alpha = 0.05$） 已知：$u_{0.05} = 1.65, u_{0.025} = 1.96$

$t_{0.05}(25) = 1.708, t_{0.05}(24) = 1.712, t_{0.025}(25) = 2.060, t_{0.025}(24) = 2.064$

解：$H_0 : \mu = \mu_0 = 85, H_1 : \mu \neq \mu_0$

这里：$\overline{x} = 86.4, s = 5., n = 25, \alpha = 0.05$

检验统计量为：$\overline{T} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$，当 H_0 成立时服从 $t(n-1)$ 分布，

拒接域为：$|\overline{T}| \geq t_{0.025}(24) = 2.064$

计算：$\overline{T} = 1.4$

所以接受原假设，即没有足够的理由拒接原假设。