武汉大学 2018-2019 学年第一学期期末考试

概率统计 B（A 卷答题卡）

姓名 ________ 学院 ________

考生学号												
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

注意事项

1. 答题前，考生先将自己的姓名、学号填写清楚，并填涂相应的考号信息点。
2. 解答题必须使用黑色墨水的签字笔书写，不得用铅笔或圆珠笔作解答题：字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答题无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卷面清洁，不要折叠、不要弄破。

一、（(12 分) 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A|B)=0.5$，求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ 和 $P((A-B)|(A+B))$。

解：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.5 \Rightarrow P(AB)=0.4\times0.5=0.2$

$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8$

$$P(A-B|A+B)=P(A-B|A\cup B)=\frac{P((A-B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}=\frac{0.5-0.2}{0.5+0.4-0.2}=\frac{3}{7}$$

二、(12 分) 一批元件，来自甲乙丙三厂，各占比例为 4∶4∶2，已知他们各自的优等品率分别为 15%, 10%, 25%；从这批元件中任取一件：求 (1)它是优等品的概率？ (2) 若它是优等品，它来自甲乙丙三厂的概率各是多少？

解：设 A：取出产品为优等品， B_i：取出产品来自第 i 个工厂 $i=1,2,3$.

(1) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.4\times0.15+0.4\times0.1+0.2\times0.25$
$=0.15$

(2) $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.4\times0.15}{0.15}=\dfrac{2}{5}$

$P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.4\times0.1}{0.15}=\dfrac{4}{15}$

$P(B_3|A)=\dfrac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\dfrac{0.2\times0.25}{0.15}=\dfrac{1}{3}$.

三、（12 分）在一次随机实验中，随机变量 X 在区间（0，4）服从均匀分布：

（1）求方程 $y^2-Xy+1=0$ 有实根的概率。

(2) 如果 $Y=-\ln\dfrac{X}{4}$，写出 Y 的概率密度并求其方差。

解：(1) P(方程有实根) $=P(\Delta\geq0)=P(X^2-4\geq0)=P(|X|\geq2)$

$=P(2\leq X<4)=\dfrac{4-2}{4-0}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(-\ln\tfrac{x}{4})\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^4 h(-\ln\tfrac{x}{4})\cdot\tfrac{1}{4}\,dx$

令 $-\ln\frac{x}{4}=y$ $x=4e^{-y}$ $dx=-4e^{-y}dy$

$x\to0 \Leftrightarrow y\to+\infty$
$x=4 \Leftrightarrow y=0$

原式 $=\displaystyle\int_{+\infty}^{0}h(y)\tfrac{1}{4}(-4)e^{-y}dy$

$=\displaystyle\int_0^{+\infty}h(y)\,e^{-y}\,dy$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leq0.\end{cases}$

$\because Y\sim E(\lambda)$
$\therefore E(Y)=\frac{1}{\lambda},\ D(Y)=\frac{1}{\lambda^2}$

即 Y 服从参数为 1 的指数分布. 故 $D(Y)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{1^2}=1$.

四、（16 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{2}y} & 0\leq x\leq1, y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$.

(1)求随机变量 X 和 Y 的边沿缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$；并判别他们是否独立？

（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

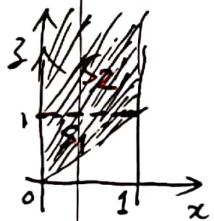
解：(1) $f_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}y}dy, & 0\leq x\leq1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}y}dx, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\because f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ $\therefore$ X, Y 独立.

(2) $\displaystyle\iint_{R^2}h(x+y)f(x,y)dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{+\infty}h(x+y)\,xe^{-\frac{1}{2}y}dy\right]dx$

令 $x+y=z$ $y=z-x$ $dy=dz$, $y=0\Leftrightarrow z=x$, $y=+\infty\Leftrightarrow z=+\infty$



$=\displaystyle\int_0^1\left[\int_x^{+\infty}h(z)\,x\,e^{-\frac{1}{2}(z-x)}dz\right]dx$ 在 S_1, S_2 两块上分别交换积分次序

$S_1=\left\{(x,z)\,\middle|\,\begin{matrix}0\leq z\leq1\\0\leq x\leq z\end{matrix}\right\}$, $S_2=\left\{(x,z)\,\middle|\,\begin{matrix}z\geq1\\0\leq x\leq1\end{matrix}\right\}$

$=\displaystyle\int_0^1\left[\int_0^z h(z)\,x\,e^{-\frac{1}{2}z}e^{\frac{1}{2}x}dx\right]dz+\int_1^{+\infty}\left[\int_0^1 h(z)\,x\,e^{-\frac{1}{2}z}e^{\frac{1}{2}x}dx\right]dz$

$=\displaystyle\int_0^1\left[(2z-4)e^{-\frac{1}{2}z}+4\right]h(z)dz+\int_1^{+\infty}(4-2e^{\frac{1}{2}})e^{-\frac{1}{2}z}h(z)dz$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}(2z-4)e^{-\frac{z}{2}}+4, & 0\leq z\leq1\\ (4-2e^{\frac{1}{2}})e^{-\frac{z}{2}}, & z>1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$E(X_i^2)=8^2\times0.8+(-2)^2\times0.2=52$, $D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)=52-6^2=16$

五、（12分）某生产线加工产品的合格率为0.8，已知，合格每件可获利8元，不合格每件亏损2元。（1）为保证每天的平均利润达到30000元，问他们要加工多少件产品？此时用切比雪夫不等式估计利润大于29000小于31000的概率有多大？（2）为保证每天的利润不低于30000元的概率大于0.977，问他们至少要加工多少件产品？（已知$\Phi(2.0)=0.977$）

解.(1) 设 X_i：第i件产品的利润，则X_i的分布律为

X_i	8	-2
P	0.8	0.2

$E(X_i)=8\times0.8+(-2)\times0.2=6$

设加工n件，$E(X_1+\cdots+X_n)=30000$

$E(X_1)+\cdots+E(X_n)=30000$, $6n=30000$, $\therefore n=5000$

$Z=X_1+\cdots+X_{5000}$

$P(|Z-E(Z)|<\varepsilon)\geq1-\frac{D(Z)}{\varepsilon^2}$

$E(Z)=E(X_1+\cdots+X_{5000})=5000\times6=30000$

$D(Z)=D(X_1+\cdots+X_{5000})=5000D(X_1)=5000\times16$

$P(29000\leq X_1+\cdots+X_{5000}\leq31000)$

$=P(|X_1+\cdots+X_{5000}-30000|\leq1000)$

$\geq1-\frac{5000\times16}{1000^2}=0.92$.

(2) 设加工n件.

$P(X_1+\cdots+X_n\geq30000)\geq0.977$

$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-6n}{4\sqrt n}\geq\frac{30000-6n}{4\sqrt n}\right)\geq0.977$

$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-6n}{4\sqrt n}<\frac{30000-6n}{4\sqrt n}\right)\leq1-0.977=\Phi(-2)$

$\therefore\Phi\left(\frac{30000-6n}{4\sqrt n}\right)\leq\Phi(-2)$

$\therefore\frac{30000-6n}{4\sqrt n}\leq-2$

$\therefore n\geq5009.6$.

六、（12分）若$X_1,X_2,\cdots,X_8$是正态总体$N(0,1)$的样本，（1）求常数a,b,c,d（这里$abc\neq0$），使$Y=aX_1^2+b(2X_2-X_3)^2+c(3X_4-2X_5-X_6)^2+X_7^2+X_8^2\sim\chi^2(d)$；（2）求$Y$的期望与方差。

解:(1) $\because X_1,X_2,\cdots,X_8\sim N(0,1)$，且相互独立

$\therefore 2X_2-X_3\sim N(0,5)$

$E(2X_2-X_3)=2E(X_2)-E(X_3)=2\times0-0=0$

$D(2X_2-X_3)=4D(X_2)+1\cdot D(X_3)=5$

$\therefore\frac{2X_2-X_3}{\sqrt5}\sim N(0,1)$

类似地

$3X_4-2X_5-X_6\sim N(0,14)$ $\therefore\frac{3X_4-2X_5-X_6}{\sqrt{14}}\sim N(0,1)$

$\therefore X_1^2+\left(\frac{2X_2-X_3}{\sqrt5}\right)^2+\left(\frac{3X_4-2X_5-X_6}{\sqrt{14}}\right)^2+X_7^2+X_8^2\sim\chi^2(5)$

故 $a=1$, $b=\frac15$, $c=\frac1{14}$, $d=5$

(2) 因为 $Y\sim\chi^2(5)$

故 $E(Y)=5$.

$D(Y)=2\times5=10$.

（若 $Y\sim\chi^2(n)$

则由教材知

$E(Y)=n$

$D(Y)=2n$）

七、（12分）若$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的样本，已知X在区间$(-1,\theta)$服从均匀分布。试求（1）θ的矩估计和最大似然估计，并判别是否无偏。（2）计算两个估计量的方差。

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta+1}, & -1<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

解:(1) 矩估计 $E(X)=\bar X\Rightarrow\frac{-1+\theta}{2}=\bar X\Rightarrow\hat\theta_1=2\bar X+1$

最大似然估计: $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\frac{1}{(\theta+1)^n}$, $-1<x_1,\cdots,x_n<\theta$

故θ越小，$L(\theta)$取值越大，而 $x_1,x_2,\cdots,x_n<\theta\Rightarrow\hat\theta_2=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$.

$E(\hat\theta_1)=E(2\bar X+1)=2E(\bar X)+1=2E(X)+1=2\times\frac{-1+\theta}{2}+1=\theta$，无偏估计.

$F_{\hat\theta_2}(x)=F_{X_1}^n(x)=F_X^n(x)=\begin{cases}0, & x\leq-1\\ \left(\frac{x+1}{\theta+1}\right)^n, & -1<x<\theta\\ 1, & x\geq\theta\end{cases}$，$\therefore f_{\hat\theta_2}(x)=\begin{cases}\frac{n(x+1)^{n-1}}{(\theta+1)^n}, & -1<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\therefore E(\hat\theta_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat\theta_2}(x)dx=\int_{-1}^{\theta}x\cdot\frac{n(x+1)^{n-1}}{(\theta+1)^n}dx=\theta-\frac{\theta+1}{n+1}=\frac{n\theta-1}{n+1}$.

(2) $D(\hat\theta_1)=D(2\bar X+1)=D(2\bar X)=4D(\bar X)=4\cdot\frac{D(X)}{n}=\frac4n\cdot\frac{(\theta+1)^2}{12}=\frac{(\theta+1)^2}{3n}$.

$D(\hat\theta_2)=E(\hat\theta_2^2)-[E(\hat\theta_2)]^2=\int_{-1}^{\theta}x^2\cdot\frac{n(x+1)^{n-1}}{(\theta+1)^n}dx-\left(\frac{n\theta-1}{n+1}\right)^2=\frac{n(\theta+1)^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

八、（12分）某地发现一个金矿，取25个样本测试，发现每吨平均含金量为5.5克，样本标准差为1.5克；问：此矿的每吨含金量是不是显著大于5克？（$\alpha=0.05$）（假设矿石含量近似服从正态分布）已知：

$t_{0.05}(25)=1.708, t_{0.05}(24)=1.712, t_{0.025}(25)=2.060, t_{0.025}(24)=2.064$，$u_{0.05}=1.65, u_{0.025}=1.96$

解: H_0: $\mu=5$ H_1: $\mu>5$

统计量: $t=\frac{\bar X-5}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$

拒绝域 $W=\{t>t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(24)=1.712\}$

$\because t=\frac{5.5-5}{\frac{1.5}{\sqrt{25}}}=1.67<1.712$，不在拒绝域中.

故接受H_0，即含金量不是显著大于5克.