武汉大学 2021－2022 学年第二学期

《概率论与数理统计B》 期末试题 (A 卷)

一、(12 分)设 A 、B 为随机事件， $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$ 。

(1) 若 A 和 B 互不相容，求 $P(B)$； (2) 若 A 和 B 相互独立，求 $P(B)$。

二、(12 分) 袋中装有 3 个白球 2 个黑球，每次取一个球，取后放回并再放入 1 个与取出的球同颜色的球。求

(1) 第三次取出的球是白球的概率；

(2) 如果第三次取出的是白球，求第一次取出的也是白球的概率。

三、(12 分)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ Ax & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$。

(1) 求常数 A 的取值范围； (2) 求 $Y=X^2$ 的分布函数。

四、(16 分) 若随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3x & 0\le y\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$。

(1) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$； (2) 问 X 和 Y 是否独立 ？ (3) 求 $X+2Y$ 的概率密度。

五、(12分) 某产品的合格率0.9。现抽检200个产品，试分别用切比雪夫不等式和中心极限定理估计合格品数在175和185之间的概率。

六、(12 分) 若 $X_1,X_2...X_n$ 为来自 $N(\sigma,\mu^2)$ 的样本。$\overline{X}$ 为样本均值，$Y_i=X_i-\mu$，$Z_i=X_i-\overline{X}, i=1,2...n$ 。

(1) 求 $\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)$； (2) 求 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$ 和 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$ 的期望和方差。

七、(12 分) $X_1,\cdots,X_n$ 为总体 X 的样本，X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ，θ 为未知参数。

求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量，并判别它们的无偏性。

八、(12 分) 轴承内环的锻压零件的平均高度服从正态分布。 现从某天生产的产品中抽取 9 只内环，其平均高度 $\overline{x}=30.3$ 毫米，样本标准差 $s=0.6$ 毫米。正常生产时的零件平均高度为 30 毫米，标准差不超过 0.5 毫米。试在显著性水平为 $\alpha=0.05$ 的条件下，检验这天生产是否正常。

($\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.65)=0.95$， $t_{0.025}(8)=2.31$， $t_{0.05}(8)=1.86$ ， $\chi^2_{0.95}(8)=2.73$， $\chi^2_{0.05}(8)=15.51$，

$\chi^2_{0.95}(9)=3.33$， $\chi^2_{0.05}(9)=16.92$)

2021 - 2022 第二学期 概率B

一. (1) A·B 互不相容，即 $A\cap B=\phi$. ∴ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$P(B)=0.7-0.4=0.3$

(2) A·B 相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$ ∴ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

∴ $0.7=0.4+P(B)-0.4P(B)$ ∴ $P(B)=0.5$

二. A_i：第 i 次取出的球是白球，$i=1,2,3$

(1) $P(A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A_2}A_3)+P(\bar{A_1}A_2A_3)+P(\bar{A_1}\bar{A_2}A_3)$

$=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)+P(A_1)P(\bar{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\bar{A_2})+P(\bar{A_1})P(A_2|\bar{A_1})P(A_3|\bar{A_1}A_2)+P(\bar{A_1})P(\bar{A_2}|\bar{A_1})P(A_3|\bar{A_1}\bar{A_2})$

$=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{5}$

(2) $P(A_1|A_3)=\frac{P(A_1A_3)}{P(A_3)}=\frac{P(A_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A_2}A_3)}{P(A_3)}=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{5}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}$.

三. 随机变量X的分布函数满足单调不减，右连续，$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.

(1) ∴ $A>0$，且 $F(1-)\le F(1)$ ∴ $0<A\le 1$.

(2) $F_Y(y)\overset{定义}{=}P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=P(X\le\sqrt{y})-P(X<-\sqrt{y})$

$=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}-)$

$=A\sqrt{y}-0$

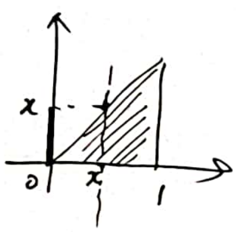
$=A\sqrt{y}$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)$

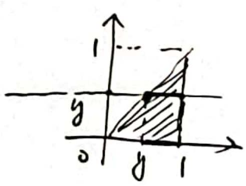
$=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}-)=1$

∴ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ A\sqrt{y}, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$

四. (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3x\,dy, & 0<x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$



$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3x\,dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

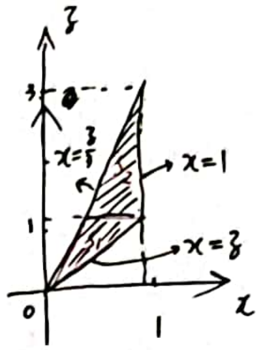


(2) ∵ $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$

∴ X, Y 不独立.

(3) $\iint_{\mathbb{R}^2} h(x+2y)\cdot f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\left[\int_0^x h(x+2y)\cdot 3x\,dy\right]dx$

令 $x+2y=z$ $\quad y=\frac{z-x}{2}$ $\quad dy=\frac{1}{2}dz$ $\quad y=0 \leftrightarrow z=x$, $\quad y=x \leftrightarrow z=3x$



$= \int_0^1\left[\int_x^{3x} h(z)\cdot 3x\,\frac{1}{2}dz\right]dx$

$= \iint_{S_1} h(z)\frac{3}{2}x\,dz\,dx + \iint_{S_2} h(z)\frac{3}{2}x\,dz\,dx$

$S_1=\left\{(x,z)\ \middle|\ \begin{array}{l}0<z<1\\ \frac{z}{3}<x<z\end{array}\right\}$

$S_2=\left\{(x,z)\ \middle|\ \begin{array}{l}1<z<3\\ \frac{z}{3}<x<1\end{array}\right\}$

$= \int_0^1\left[\int_{\frac{z}{3}}^{z} h(z)\cdot\frac{3}{2}x\,dx\right]dz + \int_1^3\left[\int_{\frac{z}{3}}^{1} h(z)\,\frac{3}{2}x\,dx\right]dz$

$= \int_0^1 h(z)\cdot\frac{2}{3}z^2\,dz + \int_1^3 h(z)\left(\frac{3}{4}-\frac{z^2}{12}\right)dz$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{3}z^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{4}-\frac{z^2}{12}, & 1<z<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

五. $n_A \sim B(200, 0.9)$ $\qquad E(n_A)=np=200\times0.9=180 \qquad D(n_A)=np(1-p)=200\times0.9\times0.1=18$

(1) $P(175\le n_A\le 185) = P(|n_A-E(n_A)|\le 5) \ge 1-\frac{D(n_A)}{5^2} = 1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$

(2) $P(175\le n_A\le 185) = P\left(-\frac{5}{3\sqrt2}\le\frac{n_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{5}{3\sqrt2}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3\sqrt2}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{3\sqrt2}\right)$

$= 2\Phi\left(\frac{5}{3\sqrt2}\right)-1$

六. (1). $Z_1 = X_1-\bar X = X_1-\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} = \frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n$

$Z_2 = X_2-\bar X = X_2-\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} = -\frac{1}{n}X_1+\frac{n-1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n$

$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{cov}\left(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n,\ -\frac{1}{n}X_1+\frac{n-1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n\right)$

$\overset{\because X_1,\cdots,X_n\text{独立}}{=} \frac{n-1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right)D(X_1)+\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n-1}{n}D(X_2)+\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)D(X_3)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)D(X_n)$

$= -\frac{2(n-1)}{n^2}D(X)+\frac{n-2}{n^2}D(X) = -\frac{1}{n}D(X) = -\frac{\sigma^2}{n}$

或者

$\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{cov}(X_1-\bar X, X_2-\bar X)$

$=\mathrm{cov}(X_1,X_2)-\mathrm{cov}(X_1,\bar X)-\mathrm{cov}(X_2,\bar X)+\mathrm{cov}(\bar X,\bar X)$

$= -\mathrm{cov}\left(X_1,\frac{X_1}{n}+\cdots+\frac{X_n}{n}\right)-\mathrm{cov}\left(X_2,\frac{X_1}{n}+\cdots+\frac{X_n}{n}\right)+D(\bar X) = -\frac{1}{n}\mathrm{cov}(X_1,X_1)-\frac{1}{n}\mathrm{cov}(X_2,X_2)+D(\bar X)$

$= -\frac{2}{n}D(X)+D(\bar X) = -\frac{2}{n}D(X)+\frac{1}{n}D(X) = -\frac{1}{n}D(X) = -\frac{\sigma^2}{n}$

(2) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = S^2$

由 P105 定理 6.2.1 知 $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

或者由 P113 定理 6.3.1(2) 知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$\therefore \begin{matrix} E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \\ D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2) = n-1 \\ \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2) = 2(n-1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E(S^2) = \sigma^2 \\ D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{matrix}.$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

$\because X_i \sim N(\mu,\sigma^2) \xRightarrow{P75} \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 又 $X_1,\cdots,X_n$ 独立

$\therefore \left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

$$\therefore \begin{matrix} E\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = n \\ D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = 2n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = n\sigma^2 \\ D\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = 2n\sigma^4 \end{matrix}$$

$$\therefore E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = \frac{1}{n}\cdot n\sigma^2 = \sigma^2$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) = \frac{1}{n^2}\cdot 2n\sigma^4 = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

七. 矩估计: $\because E(X) = 0$ $\therefore$ 对 $|X|$ 作矩估计.

$$\frac{|X_1|+|X_2|+\cdots+|X_n|}{n} = E(|X|)$$

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x)\,dx = \int_{-\theta}^{\theta}|x|\cdot\frac{1}{2\theta}\,dx = \int_0^{\theta}x\cdot\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} = \frac{|X_1|+\cdots+|X_n|}{n} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{2}{n}(|X_1|+\cdots+|X_n|)$$

最大似然估计:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \frac{1}{(2\theta)^n},\quad -\theta \le x_1,\cdots,x_n \le \theta$$

要 $L(\theta)$ 取值越大, 即 θ 越小越好.

又 $-\theta \le x_1,\cdots,x_n \le \theta \Leftrightarrow |x_1|,\cdots,|x_n| \le \theta$

$\therefore \hat{\theta} = \max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$

$\therefore \theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_2 = \max\{|X_1|,|X_2|,\cdots,|X_n|\}$.

$\because E(|X|) = \frac{\theta}{2}$ $\therefore E(\hat{\theta}_1) = E\left[\frac{2}{n}(|X_1|+\cdots+|X_n|)\right] = \frac{2}{n}\left[E(|X_1|)+\cdots+E(|X_n|)\right]$

$= \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{\theta}{2}+\cdots+\frac{\theta}{2}\right) = \theta$

$\therefore \hat{\theta}_1$ 是无偏估计

$X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & -\theta\le x\le\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$F_{|X|}(x) \overset{P41}{=} P(|X|\le x)=\begin{cases}0, & x<0\\ P(X\le x)-P(X<-x), & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ F_X(x)-F_X(-x), & x\ge 0\end{cases}$$

或者

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$

$$\therefore f_{|X|}(x)=F'_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ f_X(x)+f_X(-x), & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由P126 (3.7.7)

$$F_{\hat\theta_2}(x)=F^n_{|X|}(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}\qquad \therefore f_{\hat\theta_2}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$\therefore E(\hat\theta_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{\hat\theta_2}(x)\,dx=\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\,dx=\frac{n}{n+1}\theta\ne\theta$$

$\therefore \hat\theta_2$ 不是无偏估计.

八. 正常工作时 $\mu=30$, $\sigma\le 0.5$，故需对两者都加以检验

对μ作检验.

$H_0: \mu=30$. $H_1: \mu\ne 30$

检验统计量 $\frac{\bar X-30}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$

拒绝域 $W=\left\{\left|\frac{\bar x-30}{s/\sqrt n}\right|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\left\{\left|\frac{\bar x-30}{s/\sqrt n}\right|>2.31\right\}$

$\because \left|\frac{\bar x-30}{s/\sqrt n}\right|=\left|\frac{30.3-30}{0.6/\sqrt9}\right|=1.5<2.31$ ∴不在拒绝域中. 故接受H_0, 即 $\mu=30$

再对σ作检验.

$H_0: \sigma\le 0.5$ $H_1: \sigma>0.5$

检验统计量: $\frac{(n-1)S^2}{0.5^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域 $W=\left\{\frac{(n-1)s^2}{0.5^2}>\chi^2_\alpha(n-1)\right\}=\left\{\frac{(n-1)s^2}{0.5^2}>15.51\right\}$

$\because \frac{(n-1)s^2}{0.5^2}=\frac{8\times0.6^2}{0.5^2}=11.52<15.51$ ∴不在拒绝域中. 故接受H_0. 即 $\sigma\le 0.5$

∴这天生产正常.