武汉大学 2013-2014 第二学期

概率统计 B 期终试题

（理 54 学时 B）

学院＿＿＿＿＿＿＿＿专业＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿＿

一、（12 分）已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B\mid A)=0.6,$ 求 $P(AB)$ 和 $P(\overline{B}\mid\overline{A})$。

解 （1）$P(AB)=P(B\mid A)P(A)=0.5\times 0.6=0.3$；

(2) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=P(\overline{A}\overline{B}\mid\overline{A})=0.4$.

二、（12 分）某工厂有三条生产线生产同一产品，其产量分别占总产量的 $20\%, 30\%, 50\%$；三条生产线的优等品率依次为 $0.15, 0.1, 0, 2$；现从出厂的产品中任取一件，求它是优等品的概率？

解 设 $A_i=\{$产品来自第i条生产线$\}, i=1,2,3; B=\{$优等品$\}$；则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)=0.16。$$

三、（12 分）若随机变量 X 在区间 $(0,5)$ 服从均匀分布；（1）求方程 $y^2+2y+X=0$ 有实根的概率。（2）若对随机变量 X 进行 3 次独立观察，求上方程恰好二次有实根的概率。

解 （1）$P=P\{4-4X\ge 0\}=\int_0^1\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}$；

（2）设方程有解的次数为 Y，则 $Y\sim B(3,\frac{1}{5})$；所以

$$P\{Y=2\}=\frac{12}{125}\quad。$$

四、（12 分）若随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-2x} & 0\le y\le 1, x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad;$$

⑴求随机变量 X 和 Y 的边沿概率密度 $f_X(x); f_Y(y)$；

⑵ X 和 Y 是否独立 ？

⑶求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解 （1）$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}; f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（2）因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 独立。

（3） $f_z(z)=\begin{cases} 1-e^{-2z} & 0<z<1 \\ (e^2-1)e^{-2z} & z\ge 1 \end{cases}$ 。

五、（16 分）某届世界杯在 B 国举行，当时世界的 4 只强队 A,B,C,D 进入了半决赛，半决赛的一场比赛在 A,D 之间进行，B 队对 C,D 队有主场优势，胜率约为 0.6，而对同一地域的 A 队，胜率不相上下；A,C,D 队的胜率相同；（1）求 B 队取得冠军的概率。（2）若一场半决赛的预期收入为 m 万元，而决赛的预期收入为 $2m$ 万元；但有 B 队参加的话收入增加一半；而 D 国是世界经济强国，D 队夺冠的话后期收入增加 $2m$ 万元；求组委会的预期收入。

解　（1）B 队取得冠军的概率= B 队对 C 获胜的概率×（B 队对 A 获胜的概率× A 队对 D 获胜的概率+ B 队对 D 获胜的概率× D 队对 A 获胜的概率）

$$=0.6(0.5\times 0.5+0.6\times 0.5)=0.33$$

同理 D 队取得冠军的概率$=0.5(0.4\times 0.6+0.5\times 0.4)=0.22$

（2）组委会的预期收入$=5.54m$ 万元。

六、（12分）若 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是正态总体 $N(0,1)$ 的样本，求常数 a,b,c,n（这里 $abc\ne 0$），使 $Y=aX_1^{\ 2}+b(X_2-X_3)^2+c(X_4+X_5+X_6)^2 \sim \chi^2(n)$，并求 Y 的期望和方差。

解　$a=1,b=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{3},n=3;E(Y)=3,D(Y)=6$ 。

七、（12 分）求正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数 μ,σ^2 的最大似然估计，并判别估计的无偏性。

解　$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

八、（12 分）期末考试，从某系任意抽取 16 位同学，其平均成绩为 84，标准差为 8，问：该系此次平均成绩是否显著大于 80 分？取 $\alpha=0.05$，可以假定该系成绩服从正态分布。（$t_{0.05}(15)=1.753,t_{0.05}(16)=1.746,z_{0.05}=1.65$）

解　$H_0:\mu=80,H_1:\mu>80$

检验统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-80}{S}\sqrt{n}$，拒绝域为 $t\ge t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.753$

计算得　$t=2.0$，落在拒绝域内，所以拒绝原假设；即认为该系此次平均成绩显著大于 80 分。