

武汉大学 2011--2012 第一学期概率统计 B 试题

(54 学时 A)

学院 _____ 专业 _____ 学号 _____ 姓名 _____

一、(12 分) 若事件 B 和 A 满足: $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, $P(AB) = 0.3$

求 (1) $P(A \cup B)$; (2) $P((A-B)|A)$ 。

二、(12 分) 对以往数据的分析表明, 当机器良好时, 产品的合格率为 90%; 当机器故障时, 合格率为 30%。若每天开机时机器的良好率为 75%。试求某日的第一件产品不合格时, 机器良好的概率。

三、(12 分) 随机变量 X, Y 独立且都服从泊松分布 $p(\lambda)$:

(1) 证明: $Z = X + Y$ 服从参数为 2λ 的泊松分布。

(2) 若 $P\{X=1\} = P\{X=0\}$, 求 $E(X^2 Y^2)$ 。

四、(12 分) 随机变量 X 服从区间 $(0, 4)$ 的均匀分布:

(1) 求关于 y 的方程 $y^2 + Xy + 1 = 0$ 有实根的概率;

(2) 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

五、(14 分) 若随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

(1) 求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$;

(2) X 和 Y 是否独立? (3) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

六、(12 分) 一商店经销某种商品, 每天的进货量 X 与销售量 Y 都服从 $[10, 20]$ 上的均匀分布, 而且相互独立。已知商店每售出一单位商品可获利 1200 元, 积压一单位则亏损 300 元。试求此商店每天的平均利润。

七、(14 分) 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是其样本,

求 (1) μ, σ^2 的极大似然估计。 (2) 判别他们的无偏性。如果有偏, 化为无偏估计, 并计算其方差。

八、(12 分) 若 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{16} 是其样本, $\bar{X} = 567.2, S^2 = 121.0$

问: μ 是否显著大于 560? ($\alpha = 0.05$) ($z_{0.05} = 1.65, z_{0.025} = 1.96$)

($t_{0.05}(15) = 1.75, t_{0.025}(15) = 2.13, t_{0.05}(16) = 1.75, t_{0.025}(16) = 2.12$)

武汉大学 2011--2012 第一学期概率统计 B 试题答案

(54 学时 A)

一、(12 分) 若事件 B 和 A 满足: $P(A)=0.5, P(B)=0.4$, $P(AB)=0.3$

求 (1) $P(A \cup B)$; (2) $P((A-B)|A)$ 。

解: (1) $P(A \cup B)=0.6$,

$$(2) P((A-B)|A) = \frac{P(A-B)}{P(A)} = 0.4$$

二、(12 分) 对以往数据的分析表明, 当机器良好时, 产品的合格率为 90%; 当机器故障时, 合格率为 30%。若每天开机时机器的良好率为 75%。试求某日的第一件产品不合格时, 机器良好的概率。

解: 设 $A=\{\text{产品合格}\}$, $B=\{\text{机器调整良好}\}$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|B)P(B)}{P(\bar{A}|B)P(B) + P(\bar{A}|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.1 \times 0.75}{0.1 \times 0.75 + 0.7 \times 0.25} = 0.3$$

三、(12 分) 随机变量 X, Y 独立且都服从泊松分布 $p(\lambda)$;

(1) 证明: $Z = X + Y$ 服从参数为 2λ 的泊松分布。

(2) 若 $P\{X=1\} = P\{X=0\}$, 求 $E(X^2 Y^2)$ 。

$$\text{证明 (1) } P(Z=k) = \sum_{i=0}^k P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^k P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} = \frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}$$

$$(2) \because P\{X=1\} = P\{X=0\}, \therefore \lambda = 1$$

$$E(X^2 Y^2) = E(X^2)E(Y^2) = 4。$$

四、(12 分) 随机变量 X 服从区间 $(0, 4)$ 的均匀分布;

(1) 求关于 y 的方程 $y^2 + Xy + 1 = 0$ 有实根的概率;

(2) 求 $Y = X^2$ 的概率密度。

解: (1) $P = P(X^2 - 4 \geq 0) = P(X \geq 2) = 0.5$

$$(2) F_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{4} & 0 < y < 16 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{y}} & 0 < y < 16 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

五、(14分) 若随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases};$$

(1) 求随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_x(x); f_y(y)$;

(2) X 和 Y 是否独立? (3) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度。

$$\text{解: (1) } f_x(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; f_y(y) = \begin{cases} 2y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(2) $\because f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$, $\therefore X$ 和 Y 独立。

$$(3) f_z(z) = \begin{cases} \frac{2}{3}z^3 & 0 < z \leq 1 \\ -\frac{2}{3}z^3 + 4z - \frac{8}{3} & 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

六、(12分) 一商店经销某种商品, 每天的进货量 X 与销售量 Y 都服从 $[10, 20]$ 上的均匀分布, 而且相互独立。已知商店每售出一单位商品可获利 1200 元, 积压一单位则亏损 300 元。试求此商店每天的平均利润。

$$\text{解: 利润 } L(x, y) = \begin{cases} 1200x & 10 \leq x \leq y \\ 1500y - 300x & y \leq x \leq 20 \end{cases}$$

$$E(L) = \int_{10}^{20} dx \int_x^{20} 1200x \times \frac{1}{100} dy + \int_{10}^{20} dx \int_0^x (1500y - 300x) \times \frac{1}{100} dy \\ = 15500.$$

七、(14分) 若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是其样本,

求 (1) μ, σ^2 的极大似然估计。 (2) 判别他们的无偏性。如果有偏, 化为无偏估计, 并计算其方差。

$$\text{解: (1) } \hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$(2) E(\bar{X}) = \mu, E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \text{ 所以 } \bar{X} \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计。而}$$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计。无偏化为 $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sigma^2, D(S^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4$$

八、(12分) 若 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, \dots, X_{16} 是其样本, $\bar{X} = 567.2, S^2 = 121.0$

问: μ 是否显著大于 560? ($\alpha = 0.05$) ($z_{0.05} = 1.65, z_{0.025} = 1.96$)

($t_{0.05}(15) = 1.75, t_{0.025}(15) = 2.13, t_{0.05}(16) = 1.75, t_{0.025}(16) = 2.12$)

解: 做出假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

$$\text{检验统计量 } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$$

拒接域形式为 $T \geq t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(15) = 1.75$

计算得: $T = 2.62$ 。所以拒接 H_0 , 接受 H_1 。认为 μ 是否显著大于 560。